热传导理论

RECHUANDAO LILUN

胡汉平 编著

中国科学技术大学出版社

热传导理论

胡汉平　编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书主要论述在科学研究与工程技术的各领域有着广泛应用的热传导分析理论。在系统介绍热传导问题的各种求解方法的基础上，对具有实际意义的各类热传导问题，如稳态与非稳态、齐次与非齐次、线性与非线性、复合介质、各向异性等问题的求解给予充分的介绍。本书的特点为：注意讲清各类方法的思路和出发点，以及它们之间的联系或等价性，便于读者从整体上把握，使其易懂易学；对各种方法所能解决的问题、求解步骤、运用技巧给予充分阐释，并用大量例题加以说明，其中有相当一部分例题来源于科研和工程实际。所以本书不仅可作为“热传导”课程的教学用书以及学习“数理方程”和“应用数学”的参考书，同时还是一本较为实用的科技人员的工具书。

图书在版编目(CIP)数据

热传导理论/胡汉平编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-312-02581-5

Ⅰ.热…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.导热—高等学校—教材　Ⅳ.O551.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 193623 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
合肥学苑印务有限公司印刷
全国新华书店经销

开本：710×960　1/16　印张：18.75　字数：350 千
2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
定价：29.80 元

前　　言

本书为安徽省高等学校"十一五"省级规划教材，主要论述在科学研究与工程技术的各领域有着广泛应用的热传导分析理论。虽然热传导是一种较常见的自然现象，但系统介绍热传导理论的书籍却不多。目前国内外写得较好的主要有：

1. A. B. 雷柯夫[苏]. 热传导理论. 裘烈钧、丁履德译，高等教育出版社，1955。这本由前苏联雷柯夫院士写的《热传导理论》是我国早期采用的经典教材，它是从问题出发的。其优点是便于实际使用，能针对各类热传导问题查找解决方法。缺点是过于繁琐，不便系统掌握。原因很简单，问题是形形色色的，问题比方法要多得多，且其方法也基本限于分离变量法和拉式变换法这两种。

2. H.S.Carslaw, J. C. Jaeger[英]. Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press · Oxford, 1986。该书也是一本热传导的经典教材，也是从问题出发，但写得较为凝练，方法也增加了许多。因作者数学功底较好，对问题的处理有一定的深度和前瞻性，因而虽然已过去了许多年，现在使用仍不觉得过时。其缺点也是不便系统掌握，对读者数学水平要求高。许多问题只给出结果，而无详细的求解过程，因而适于作为求解热传导问题的查询工具书。

3. M. N. Özisk[美]. Heat Conduction, John Wiley and Sons Inc. New York, 1990. 中译本：M. N. 奥齐西克. 热传导. 俞昌铭译(根据其 1980 年版)，高等教育出版社，1984。该书与前面两本教材不同，它是从方法出发，阐明一般热传导问题的基本分析过程，对热传导问题的各种求解方法作了较全面的介绍，并就它们间的相互关系作了说明。因而较为系统，便于学习掌握。其缺点，有些问题阐释得不够深入，书中也有不少漏洞和错误以及逻辑上不太自洽的地方。但瑕不掩瑜，它还是目前国内外较好的热传导理论教材。

4. 张洪济[中]. 热传导. 高等教育出版社，1992。这是国内几本热传导教材中写得较好的一本。可以看出其深受雷柯夫的影响，但它是从方法出发的。因将大学"传热学"中热传导的内容也包含在内，故也便于本科生使用，其对移动热源和相

变的处理有自己的特色。不足之处是方法介绍的较少，基本上也只用了分离变量法和拉式变换法，对方法的把握高度不够，对方法间的关联没有介绍，深度稍感欠缺。

本教材秉持"授人以鱼不如授人以渔"的理念，采用和借鉴奥齐西克的方法，注重数学理论与热传导问题的结合。一方面，系统介绍热传导问题的各种求解方法，如分离变量法、杜哈美尔法、格林函数法、拉氏变换法与积分变换法等精确分析方法以及各种近似分析方法；另一方面，对具有实际意义的各类热传导问题，如稳态与非稳态、齐次与非齐次、线性与非线性、复合介质、各向异性等问题给予充分的介绍。从方法入手，以方法带问题。既注意对各种方法加以归类、总结，又结合作者的一些研究成果、心得体会，深入浅出地讲清它们的思路和出发点，以及各类方法间的联系或等价性，便于读者从总体上把握各种方法，使其易懂易学，又对各种方法所能解决的问题、运用技巧给予充分的阐释，并用大量例题加以说明，其中有相当一部分例题来源于科研和工程实际。针对目前许多高校尤其是工科院校的学生数学物理方法学得较少的情况，补充了相关数学知识，使有大学微积分基础的学生就可以看懂，做到热传导理论与数理方程同步学习。

作者期冀通过在半无限大及无限大物体热传导问题的分离变量法处理、稳态和准稳态热传导问题作为非稳态问题极限的处理、非稳态问题发展的三阶段阐释、准稳态温度分布的积分变换解、格林函数法解移动热源问题、稳态与非稳态问题的格林函数的关联与直接求解，以及打通格林函数法与积分变换法的等价性证明、多层复合及各向异性介质中的热传导问题的求解等方面的工作，能对前人书中的一些缺陷和错误有所弥补和修正，使热传导理论更为系统和完善，热传导问题的求解更加程式化。

虽然尽了很大努力，但囿于作者学识水平，肯定还有不少疏漏与不足之处，诚望各位读者不吝赐教，以便今后改进。

胡汉平

2009 年 7 月

目　次

第 1 章　绪　　论

本章介绍热传导理论的定义、任务、构成及基本方法。

1.1　定义和任务

静态物体(固体、静止流体)由于区域间的温度差异而引起的热(能)的流动称为热传导。所迁移热能的大小简称为热量。

从微观上看,热传导就是直接构成物体的微观粒子(分子或原子或离子和自由电子)不规则运动(平动、振动和转动)的能量转移。

热传导理论,顾名思义就是论述如何求得这种物体上各处热流量大小的方法体系。

物体内的热流不能直接测量。但热流的效应是使物体上各区域的热能量重新分配,表现为温度场的改变。在实验观察基础上得出的经验定律——傅立叶(Fourier)定律将热流量与可测量温度联系在一起。如对均匀各向同性物体,其为

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t) = -k\,\nabla T(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1}$$

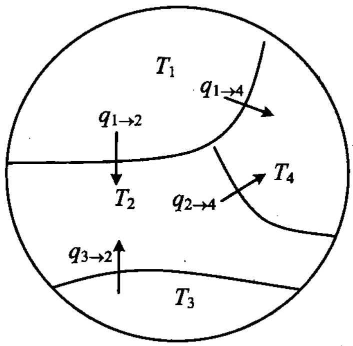

图 1.1　热传导示意图

即物体上某处 $\boldsymbol{r}$ 某时刻 t 的热流密度矢量 $\boldsymbol{q}$(W/m^2)的大小与该处该时刻的温度 T 的梯度值成比例,方向指向温度梯度的负方向;比例系数 k(W/(m·K))是一与物体材料性质有关的量,称为导热系数。

由上式可见,在材料特性已知的情况下,物体上温度场一旦确定,其上的热流

场也随之确定，反之未必。因而，热传导理论的最基本任务就是确定固体（或静止流体）内的温度分布 $T(\boldsymbol{r},t)$。

1.2 主要构成

一个理论一般包括原理和计算方法两大部分。

1.2.1 基本原理

设物体上的热流分布为 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$，则对物体内某点 $\boldsymbol{r}$ 处一微元体，在时刻 t 从中每单位时间单位体积流出的热量为 $\nabla\cdot\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$。由该微元体上的能量平衡得

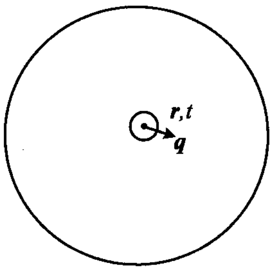

图 1.2 物体上的微元体示意图

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)+g(\boldsymbol{r},t)=\rho c_p\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\tag{1.2}$$

式中，$g(\boldsymbol{r},t)$ 为微元体中热源单位时间单位体积的产热量。ρ,c_p 分别为微元体的密度和定压比热容。

对均匀各向同性介质，将式(1.1)代入式(1.2)得

$$\nabla\cdot[k\,\nabla T(\boldsymbol{r},t)]+g(\boldsymbol{r},t)=\rho c_p\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\tag{1.3}$$

一般地，导热系数 k 为介质材料的热物性，对选定的介质，其通常又是温度的缓变函数。若其可视为常数，则

$$\nabla^2 T(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{k}g(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\tag{1.4}$$

式中，$\alpha\equiv k/\rho c_p$ 称为热扩散系数，或导温系数。

式(1.4)即为最简单也最常用的温度场控制方程——含热源、常物性的均匀各向同性物体区域的**热传导微分方程**。

这只是物体上一般点处的温度变化规律，相应的偏微分方程被称为泛定方程。要真正确定温度场，还必须考虑物体内部跃变点处（如介质特性参数的跃变、外界作用的跃变等）的温度变化规律以及物体边界处的温度变化规律。其推导方法与推导泛定方程完全一样，只是所考虑的微元取在跃变点或边界点处，界面微元的体积

为零。通常有：

边界条件

第一类：$T = f_i(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{r} \in$ 边界面 S_i，$t > 0$ (1.5)

此是边界面温度给定的情况。

第二类：$\dfrac{\partial T}{\partial n_i} = f_i(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{r} \in$ 边界面 S_i，$t > 0$ (1.6)

此是边界面热流给定的情况。

第三类：$k_i \dfrac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = f_i(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{r} \in$ 边界面 S_i，$t > 0$ (1.7)

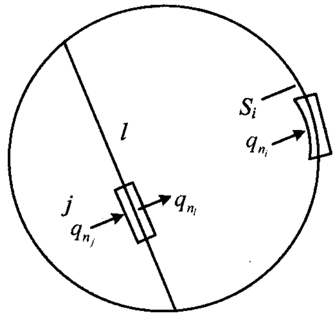

图 1.3 界面处微元体示意图

此是边界面按牛顿冷却定律换热的情况。h_i 为边界面与其环境的换热系数。

衔接条件

$$k_j \frac{\partial T_j}{\partial n_j} = k_l \frac{\partial T_l}{\partial n_l} \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{r} \in j, l \text{ 界面}$$

$$-k_j \frac{\partial T_j}{\partial n_j} = h_{jl}(T_j - T_l) \tag{1.9}$$

衔接条件有时也称接触边界条件或第四类边界条件，此是在介质热物性跃变处热流必须连续的要求。式中 h_{jl} 为界面换热系数，其倒数即是界面接触热阻，$R_{jl} \equiv 1/h_{jl}$。当界面接触良好，热阻很小，即 $k_j/h_{jl} \to 0$，则式(1.9)可化简为

$$T_j = T_l, \quad \boldsymbol{r} \in j, l \text{ 界面} \tag{1.10}$$

此为温度连续条件。

上述各条件推导中利用了界面某处法向 $\boldsymbol{n}$ 的热流表达式

$$q_n = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = -k \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.11}$$

对于温度场随时间变化的非稳态情况，还必须给出初始条件，它是温度场发展的基础。

初始条件

$$T(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r}), \quad t = 0, \ \boldsymbol{r} \in R \tag{1.12}$$

这样，就构成了一个封闭的热传导定解问题。

广义来看，它是由描述系统内一般点处的运动规律（即泛定方程）、跃变点处的运动规律（即衔接条件）、系统边界处的运动规律（即边界条件）以及初始条件所组

成。这种完整的数学模型有唯一确定的解所以称为定解问题。

1.2.2　计算方法

由于原理是简明的，因而热传导理论主要是论述在各个不同情况下上述定解问题的各种求解方法。

它可分为三大类：解析解法（精确解法）、近似解法和数值解法。其中解析解法与近似解法又统称为分析解法。

这三类方法各有其特点和用处，一般在能有解析解的情况下，尽量求其解析解，因其精度最高。即使在必须采用数值解的情况，若能在部分解析解的基础上进行，也使数值解的机时大大缩短，效率大大提高。

解析解：(1) 便于分析，其所提供的结果有助于人们去理解影响传热过程的各种因素的作用，突出问题的一些主要特征。

(2) 便于考察数值法的精度。

近似解：在解析解求不出或求解过程很复杂的情况下，它可以帮助很快了解影响过程的各种因素的作用及主要特征。

数值解：用于条件复杂，分析解无能为力的情况。它不便于分析，但能得到问题的数值结果，适合求解更实际的问题。

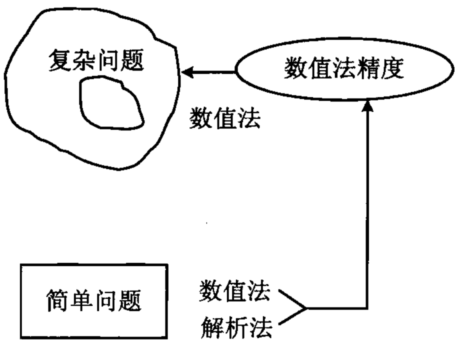

图 1.4　用解析法检验数值法

本书主要对在科研和工程技术中具有实际意义的各种热传导问题进行理论上的分析，重点讲述分析解法，尤其是解析解法。关于数值解法，它的计算方法与技巧本身就是一个庞大的体系，无法在本书尽述，可参考有关的专门论著：陶文铨《数值传热学》和孔祥谦《有限元法在传热学中的应用》。

读者可能注意到上述定解问题为一线性抛物型偏微分方程。当然热传导的定解问题也可以是非线性的，如热物性(k, α)随温度变化；有与温度4次方成正比的热辐射边界条件及与温度的5/4次方成正比的自然对流边界条件；还可能有与相变相联系的边界条件等非线性情况。本书主要讨论线性问题，对于非线性问题，由于其解法不具有普遍性故专辟一章介绍。

数学上，一个线性系统，由各种主动因素（不依赖于过程的表征量）即强迫外

源、边界扰动和初始扰动引起的运动可以进行线性分解，即可以看做是这些主动因素各自独立作用引起的运动的叠加。这个结论称为线性叠加原理或独立作用原理。

若将外源、边界扰动和初始扰动分别进行线性分解，则它们的作用也遵守独立作用原理。

满足线性叠加原理是线性系统的一个基本特征。

本书基于这一原理，重点讲述求解线性热传导问题的基本方法——分解-综合方法，特别是频谱分解法和脉冲分解法两大类。

频谱分解法即把源、边界扰动或初始扰动等主动因素（也可以称为输入信号）按某种完备的基本信号系（**频谱**）分解，然后考察这些基本信号系引起的运动，最后把这些运动综合起来便是所求线性系统的运动（也可以称为输出信号）。用频谱分解法处理的关键是基本信号系的选择，它随所处理系统的不同而不同，一般以选择系统的本征信号系最为方便。当然也可以选择别的完备的基本信号系，但这种分解常导致问题的复杂化。所以，频谱分解法的核心问题是正交展开，特别是本征函数系的正交展开。频谱分解法可分为空间频谱分解和时间频谱分解，谱又分为分离谱和连续谱。它主要有分离变量法、积分变换法（包括常见的傅氏变换法和拉氏变换法）。

脉冲分解法是另一种线性分解-综合方法，即把源、边界扰动或初始扰动等主动因素按一种特殊的基本信号系——脉冲信号系分解，然后考察脉冲信号引起的运动，最后把这些运动综合起来便是所求线性系统的运动。**脉冲**有时又称**点源**。脉冲分解法把时间脉冲、空间脉冲、时空脉冲、初始脉冲、边界脉冲等以统一的观点处理，因而又可称之为点源叠加法。它主要有杜哈美尔法、格林函数法。

1.3 广义正交坐标系中的热传导方程

我们在上一节中已得到了与坐标系无关的用场论形式表示的一般情况下的热传导方程及定解条件。它是一线性抛物型方程，特别当 $g(\boldsymbol{r},t)$，$f_i(\boldsymbol{r},t)$ 都为零时，则方程和边界条件都为齐次，称为齐次热传导问题，否则属非齐次问题。

在分析求解一个已知区域的热传导问题时，首先必须选择一个坐标平面能与已知区域的边界面相重合的正交坐标系，把场方程在该正交坐标系下表示出来。例如，对矩形或长方体用直角坐标系，对圆柱或球这样的物体分别用圆柱坐标系或球

坐标系，等等。

热传导方程(1.4) 在直角坐标系(x,y,z)下表示为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{k}g(x,y,z,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.13}$$

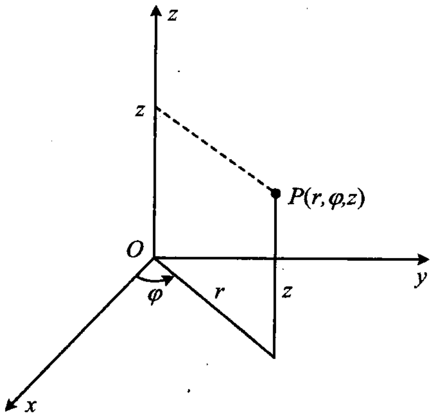

图 1.5　圆柱坐标系(r,φ,z)

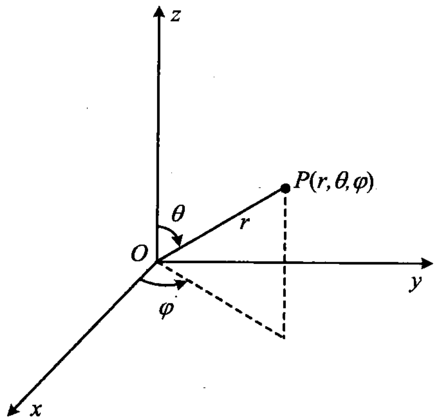

图 1.6　球坐标系(r,θ,φ)

在圆柱坐标系(r,φ,z)下表示为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{k}g(r,\varphi,z,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.14}$$

在球坐标系(r,θ,φ)下表示为

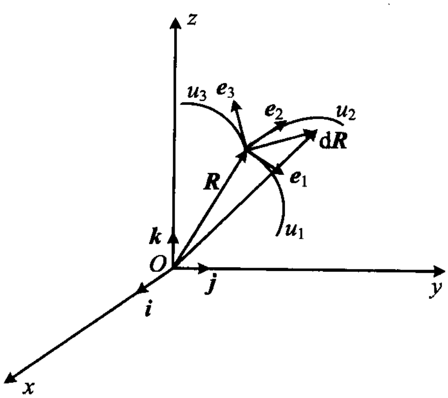

图 1.7　正交曲线坐标系(u_1,u_2,u_3)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{k}g(r,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.15}$$

下面，我们简要讨论在广义正交曲线坐标系内热传导方程的变换。

图 1.7 所示为一广义正交曲线坐标系。u_1,u_2,u_3 为坐标系的三个空间坐标，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别为 u_1,u_2,u_3 方向的单位基向量。与直角坐标系不同，它们的方向是随空间点的位置而变化的，但总是互相

垂直。正交曲线坐标(u_1, u_2, u_3)与直角坐标(x, y, z)之间的函数关系为 $x = X(u_1, u_2, u_3)$，$y = Y(u_1, u_2, u_3)$，$z = Z(u_1, u_2, u_3)$。

对于空间中任一点 P，其位置向量在直角坐标系下表示为

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.16}$$

其位置微小变化的微元矢为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{1.17}$$

在正交曲线坐标系下又可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R} = a_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.18}$$

其中

$$a_i\mathrm{d}u_i\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

所以

$$a_i\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u_i} = \frac{\partial(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\boldsymbol{k} \tag{1.20}$$

故

$$a_i^2 = a_i\boldsymbol{e}_i \cdot a_i\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2, \quad i = 1,2,3 \tag{1.21}$$

其中，系数 a_1, a_2, a_3 称为尺度系数，亦称拉梅系数。

尺度系数一经知道，正交曲线坐标系(u_1, u_2, u_3)下的温度梯度即可得到

$$\nabla T = \frac{1}{a_1}\frac{\partial T}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{a_2}\frac{\partial T}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{a_3}\frac{\partial T}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{1.22}$$

热流向量 $\boldsymbol{q}$ 的表达式变为

$$\boldsymbol{q} = -k\,\nabla T = -k\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\frac{\partial T}{\partial u_i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.23}$$

热流向量沿 u_1, u_2, u_3 坐标轴的三个分量为

$$q_i = -k\frac{1}{a_i}\frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad i = 1,2,3 \tag{1.24}$$

热流密度向量 $\boldsymbol{q}$ 的散度表达式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{q} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\partial u_1}\left(\frac{a}{a_1}q_1\right) + \frac{1}{\partial u_2}\left(\frac{a}{a_2}q_2\right) + \frac{1}{\partial u_3}\left(\frac{a}{a_3}q_3\right)\right] \tag{1.25}$$

式中，$a = a_1a_2a_3$。

将式(1.25)和(1.24)代入式(1.2)即可得广义正交曲线坐标系下的热传导微分方程

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(k\frac{a}{a_1^2}\frac{\partial T}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(k\frac{a}{a_2^2}\frac{\partial T}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(k\frac{a}{a_3^2}\frac{\partial T}{\partial u_3}\right)\right] + g = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.26}$$

若 k 与 u_1, u_2, u_3 无关,则

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{a}{a_1^2}\frac{\partial T}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{a}{a_2^2}\frac{\partial T}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{a}{a_3^2}\frac{\partial T}{\partial u_3}\right)\right] + \frac{1}{k}g(u_1, u_2, u_3, t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.27}$$

前面所列的直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系下的热传导方程(1.13)、(1.14)和(1.15)都是通用方程(1.27)的特殊情形。

对于直角坐标

$$a_x = a_y = a_z = 1$$

圆柱坐标

$$a_r = 1,\ a_\varphi = r,\ a_z = 1$$

球坐标

$$a_r = 1,\ a_\varphi = r\sin\theta,\ a_\theta = r$$

第 2 章　分离变量法

本章介绍求解偏微分方程最经典也是最基本的方法 —— 分离变量法，并分别在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系下给出用其对一维与多维、有限与无限、齐次与非齐次、稳态与非稳态各种热传导问题的求解方法。

2.1　分离变量法的预备知识

求解数学方程的基本思想是通过变换的方法将复杂的方程简化。实际上，整个数学都是如此，将复杂的未处理过的问题化成简单处理过的问题。例如，将一元二次方程化成二个一元一次方程来处理，等等。分离变量法是将变量分离形式的试探解代入偏微分方程，自变量各自分离，从而把它分解为几个常微分方程，把求偏微分方程解的问题转化为求解几个常微分方程。

分离变量的方法是 d'Alembert 于 1750 年在研究两端固定的弦振动方程混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

时引进的。从物理上看，对于两端有界弦的横振动波，由于在两个端点不断反射，可以预见其解将是分无穷段给出的。也正是由于无穷次的反射，出现了一对对频率、波速、振动方向、振幅都相同但行进方向相反的行波，叠加起来形成了驻波。

$$A\sin\left(\frac{n\pi}{l}+\frac{n\pi a}{l}t\right)+A\sin\left(\frac{n\pi}{l}x-\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

$$=2A\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\quad n=1,2,3,\cdots$$

它具有时空分离形式，弦上各点随时间作同样振动而振幅随地点而变。无穷多个这样的驻波组成了有界弦的振动波形。驻波只在一定的边界条件下才能产生，那么对一般的偏微分方程，它的解可否由“广义驻波”即一系列特殊形式的解 $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$ 组成，它们是变量分离的，既满足泛定方程，又满足边界条件？

从数学上看，当我们把解 $u(x,t)$ 按完备函数系 $\{X_n(x)\}$ 展开成级数时（t 看成参数），其系数 T_n 将是 t 的函数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

将其代入线性方程

$$Lu=0$$

假设线性运算 L 可以对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ 逐项进行，就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}Lu_n=0$$

令上式左端的每一项都为零，则每个分离变量的函数

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$$

都是方程 $Lu=0$ 的解。因此从这里也可以看到，利用先求变量分离形式的特殊解的方法是有可能求出此方程满足某些定解条件的特解。

2.1.1　分离变量的条件

如果方程及边界条件具有一定的特殊形状，则将分离变量形式的解代入方程及边界条件内可使 $u(x,t)$ 偏微分方程定解问题化为 $X(x)$ 及 $T(t)$ 的常微分方程并从而求出 $X(x)$，$T(t)$ 及 $u(x,t)$。

定理　称形如

$$\begin{cases}L_tu+\rho(t)L_xu=0, & x_1<x<x_2,\ t\in I\\ \alpha_iu(x_i,t)+\beta_i\dfrac{\partial u(x_i,t)}{\partial x}=0, & i=1,2\\ \text{关于 } t \text{ 的定解条件}\end{cases}\tag{2.1}$$

的偏微分方程定解问题为可分离变量定解问题。

其中，I 是有限或无限区间，$\rho(t)\neq0$，α_i，β_i 为任意常数，L_t 与 L_x 为线性偏微