



高职高专“十一五”规划教材

经济数学 同步训练教程

王凌云 主编

中国石油大学出版社

高职高专“十一五”规划教材

JINGJISHUXUETONGBUXUNLIANJIAOCHENG

经 济 数 学 同 步 训 练 教 程

主 编 王凌云

副主编 王 峥 顾越昆 高 群

主 审 李德家

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学同步训练教程/王凌云等主编. —东营:中国
石油大学出版社, 2009. 7
ISBN 978-7-5636-2877-3

I. 经… II. 王… III. 经济数学—高等学校—教学参考
资料 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 120862 号

书 名: 经济数学同步训练教程
作 者: 王凌云

策划编辑: 宋秀勇(电话 0546—8392139)

责任编辑: 宋秀勇 满云凤

封面设计: 赵志勇

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营, 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: yibian8392139@163.com

印 刷 者: 沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0546—8392139)

开 本: 185×260 印张: 11.875 字数: 314 千字

版 次: 2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 16.00 元



QIANYAN

本书是高职高专“十一五”规划教材《经济数学》(王凌云主编)的配套辅导教材。它以上述教材为主要教科书,同时兼顾其他同类教材的内容,读者即使使用其他教材,也可采用本书作为参考书。本书是根据广大高职高专教师、学生实际需要编写的,既可以作为教师的“教学参考”,又可以成为学生的“学习指南”。

本书对《经济数学》中的重点、难点逐一进行分析讲解,对典型例题进行归纳,着重理清解题的思路、方法及其规律,帮助学生正确地理解概念,进而使学生理解知识点的内在联系,提高学生综合分析经济现象、解决实际问题的能力。

本书按照教学要求设计了五个板块:基本要求;知识要点;例题解答与思维开发;同步训练与复习思考题;自测题。

例题解答与思维开发,同步训练与复习思考题,自测题的选取力求由浅入深,由表及里,以使学生能举一反三,触类旁通,对运算技巧掌握得更熟练。

本书由王凌云任主编,王峥、顾越昆、高群任副主编,参加本书编写的还有孟玲、徐海燕、丁霞。

本书由李德家教授主审。

书中带“*”号的为选学内容。

由于编者水平所限,书中难免存在缺点和错误,敬请广大读者指正。

编 者

2009年6月



第一篇 微积分学

第一章 函数 极限 连续	(3)	第四章 不定积分及其应用	(50)
一、基本要求	(3)	一、基本要求	(50)
二、知识要点	(3)	二、知识要点	(50)
三、例题解答与思维开发	(8)	三、例题解答与思维开发	(51)
四、同步训练与复习思考题	(18)	四、同步训练与复习思考题	(58)
五、自测题	(19)	五、自测题	(59)
第二章 导数与微分	(21)	第五章 定积分及其应用	(61)
一、基本要求	(21)	一、基本要求	(61)
二、知识要点	(21)	二、知识要点	(61)
三、例题解答与思维开发	(24)	三、例题解答与思维开发	(65)
四、同步训练与复习思考题	(34)	四、同步训练与复习思考题	(71)
五、自测题	(35)	五、自测题	(72)
第三章 导数的应用	(37)	第六章 多元函数微分学	(74)
一、基本要求	(37)	一、基本要求	(74)
二、知识要点	(37)	二、知识要点	(74)
三、例题解答与思维开发	(40)	三、例题解答与思维开发	(77)
四、同步训练与复习思考题	(47)	四、同步训练与复习思考题	(88)
五、自测题	(48)	五、自测题	(89)

第二篇 线性代数

第七章 行列式	(93)	三、例题解答与思维开发	(114)
一、基本要求	(93)	四、同步训练与复习思考题	(123)
二、知识要点	(93)	五、自测题	(124)
三、例题解答与思维开发	(96)	第九章 向量组与线性方程组	(127)
四、同步训练与复习思考题	(105)	一、基本要求	(127)
五、自测题	(106)	二、知识要点	(127)
第八章 矩阵	(108)	三、例题解答与思维开发	(132)
一、基本要求	(108)	四、同步训练与复习思考题	(145)
二、知识要点	(108)	五、自测题	(147)



第三篇 概率与数理统计学

第十章 概率论初步	(151)	第十一章 数理统计初步	(164)
一、基本要求	(151)	一、基本要求	(164)
二、知识要点	(151)	二、知识要点	(164)
三、例题解答与思维开发	(153)	三、例题解答与思维开发	(168)
四、同步训练与复习思考题	(160)	四、同步训练与复习思考题	(173)
五、自测题	(161)	五、自测题	(174)
同步训练与复习思考题、自测题答案	(177)		
参考文献	(184)		

第一篇

微 积 分 学

第一章



函数 极限 连续



一、基本要求

1. 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念.
2. 理解需求函数与供给函数的概念.
3. 理解函数极限的描述性定义.
4. 理解函数在一点连续的概念及初等函数的连续性.
5. 理解无穷小的性质.
6. 了解反函数的概念.
7. 了解函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念.
8. 了解左、右极限的定义.
9. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系.
10. 了解闭区间上连续函数的性质.
11. 掌握复合函数的复合过程.
12. 掌握极限四则运算法则.
13. 会用函数关系描述经济问题.
14. 会对无穷小进行比较.
15. 会利用两个重要极限求极限.
16. 会求函数的间断点.
17. 会求连续函数和分段函数的极限.



二、知识要点

(一) 函数

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性:设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在一个正数 M ,对于所有的 $x \in D$,恒有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的;若不存在这样的正数 M ,则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

(2) 函数的奇偶性:设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任一 $x \in D$,则



偶函数: $f(-x)=f(x)$, 图像关于 y 对称;

奇函数: $f(-x)=-f(x)$, 图像关于原点对称.

(3) 函数的单调性: 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义; 若对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的; 若对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调减少的.

(4) 函数的周期性: 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 若存在正数 a , 对于属于定义域 D 的任意 x , $x+a \in D$, 使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 a 称为函数的周期.

3. 反函数

设 $y=f(x)$ 是 x 的函数, 其值域为 A , 若对于 A 中的每一个 y 值, 都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应, 则得到一个定义在 A 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 我们称它为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上记作 $y=f^{-1}(x)$.

4. 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数.

5. 基本初等函数

包含常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类. 其中指数函数和对数函数互为反函数, 三角函数和反三角函数互为反函数.

6. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 若 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中, 则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数, 称为 x 的复合函数, 记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的, 且可以用一个解析式子表示的函数叫做初等函数.

(二) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

若函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限, 则称在该变化过程中, $f(x)$ 为无穷小量.

2. 无穷大量

若在自变量 x 的某个变化过程中, 函数 $y=\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)}=0$, 则称在该变化过程中, $f(x)$ 为无穷大量, 简称无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty.$$

3. 无穷小量的性质

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量.

性质 2 有界变量乘无穷小量仍是无穷小量.

性质 3 常数乘无穷小量仍是无穷小量.

性质 4 无穷小量乘无穷小量仍是无穷小量.

4. 无穷小量的阶

设 α, β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小量, 也称 β 是比 α 低阶的无穷小量;

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c$ (c 是不等于零的常数), 则称 α 与 β 是同阶无穷小量; 若 $c=1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小量.

5. 变量极限与无穷小量的关系

函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是: $f(x)$ 可以表示为 A 与一个无穷小量之和, 即

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim \alpha = 0.$$

(三) 极限

1. 数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}$, 若当 n 无限变大时, x_n 趋于一个常数 A , 则称当 n 趋于无穷大时, 数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

2. $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

若当 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow \infty)$$

若当 $x > 0$ 且无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow +\infty)$$

若当 $x < 0$ 且 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow -\infty).$$

3. $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 (点 x_0 本身可以除外) 内有定义, 若当 x 趋于 x_0 ($x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0).$$

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域 (点 x_0 本身可以除外) 内有定义, 若当 $x > x_0$ 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的右极限是 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0^+).$$

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 左侧的某个邻域 (点 x_0 本身可以除外) 内有定义, 若当 $x < x_0$ 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的左极限是 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0^-).$$

4. 极限存在的充分必要条件

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$



5. 极限的运算法则

若 $\lim u(x) = A, \lim v(x) = B$, 则

$$(1) \lim[u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x) = A \cdot B;$$

(3) 当 $\lim v(x) \neq 0$ 时,

$$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \frac{A}{B}.$$

6. 求极限的方法

(1) 利用函数的连续性求极限. 设 $f(x)$ 是初等函数, 定义域为 (a, b) , 若 $x_0 \in (a, b)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(2) 当函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续时, 可以交换函数符号和极限符号, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

(3) 利用无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小求极限.

(4) 利用无穷小量与无穷大量的倒数关系求极限.

(5) 利用两个重要极限求极限. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{或} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

和由两个重要极限推出的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{x} = k \quad (k \neq 0)$$

和

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab} \quad (a, b, c \text{ 为常数})$$

都可以作为公式使用.

7. 有理分式的极限

(1) $x \rightarrow x_0$ 时, 当分母极限不为零时, 可直接利用函数的连续性求极限. 当分母极限为零时, 又分为两种情况: 若分子极限不为零, 则由无穷小量与无穷大量的倒数关系可得原式的极限为无穷大; 若分子极限也为零, 则分解因式, 消去无穷小量因子后再求极限.

(2) $x \rightarrow \infty$ 时, 有下面的结论 ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

(四) 函数的连续性

1. 函数在点 x_0 连续的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 若当自变量的改变量 Δx 趋于零时, 相应函数的改变量 Δy 也趋于零, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在, 且等于 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 函数在开区间连续的定义

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内任何一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续.

3. 函数在闭区间连续的定义

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b),$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

4. x_0 为 $f(x)$ 的间断点的条件

若 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一, 则点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点.

- (1) 在点 x_0 处, $f(x)$ 没有定义;
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- (3) 虽然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

5. 连续函数的运算法则

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则这两个函数的和 $f(x) + g(x)$ 、差 $f(x) - g(x)$ 、积 $f(x) \cdot g(x)$ 、商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 在点 x_0 处连续.

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

6. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的.

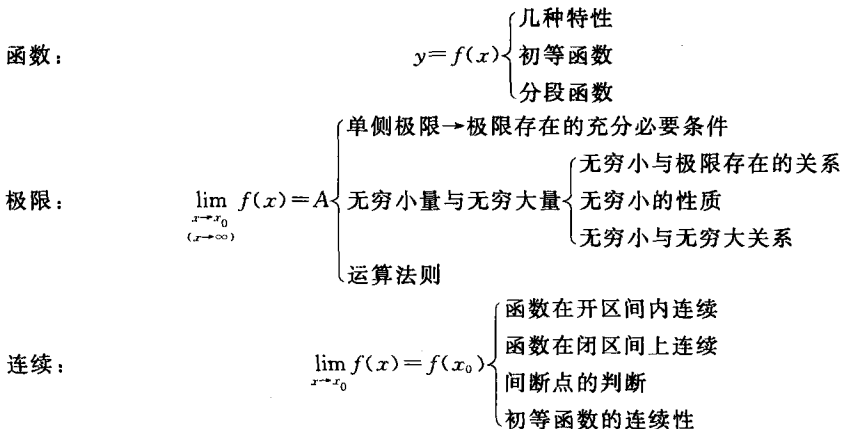
7. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它在这个区间上一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 则对介于 m 和 M 之间的任一实数 c , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$.

(3) 推论: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(五) 本章知识结构图





三、例题解答与思维开发

(一) 函数概念

例1 下列关系中,()是 y 与 x 的函数关系.

- A. $y=c$ (c 为常数) B. $x=a$ (a 为常数) C. $y=\ln(-x)$ D. $y=\ln(-x^2)$

解 A 项:从表面看来 $y=c$ 不含 x ,它表示的对应规则是“无论 x 取什么实数值,总以唯一确定的数值 c 与之对应”,符合函数定义,因此 $y=c$ 是 y 与 x 的函数关系.

B 项: $x=a$ 表明 y 不受任何限制,可以为任意值,即 $x=a$ 时, y 可以任意值与之对应,即有无穷多个值与 $x=a$ 对应,不符合函数定义,因此 $x=a$ 不是 y 与 x 的函数关系.

C 项:要使对数有意义,真数应该大于零,即 $-x>0$,因此只要 $x<0$ 就能够满足,所以 $y=\ln(-x)$ 是定义域为 $(-\infty, 0)$ 的 y 与 x 的函数关系

D 项:对应规则 $y=\ln(-x^2)$ 要求 $-x^2>0$,而实际上任何一个实数都不能满足这个不等式,即对任意实数 x ,都没有按规则 $y=\ln(-x^2)$ 与之对应的实数 y ,所以 $y=\ln(-x^2)$ 不是 y 与 x 的函数关系.

本题应该选 A, C.

例2 给定的各对函数中是相同的函数的有().

- A. $y=\ln[x(x-1)]$ 与 $y=\ln x+\ln(x-1)$

- B. $y=\ln \frac{1-x}{x}$ 与 $y=\ln(1-x)-\ln x$

解 A. $y=\ln[x(x-1)]$ 的定义域应满足 $x(x-1)>0$,于是有

$$\begin{cases} x>0, \\ x-1>0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x>0, \\ x>1, \end{cases} \quad \text{即} x>1;$$

或

$$\begin{cases} x<0, \\ x-1<0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x<0, \\ x<1, \end{cases} \quad \text{即} x<0.$$

所以 $y=\ln[x(x-1)]$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

而 $y=\ln x+\ln(x-1)$ 的定义域应满足

$$\begin{cases} x>0, \\ x-1>0, \end{cases} \quad \text{即} x>1.$$

所以 $y=\ln x+\ln(x-1)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$.

两个函数定义域不同,因此不是相同的函数.

- B. $y=\ln \frac{1-x}{x}$ 的定义域应满足 $\frac{1-x}{x}>0$,于是有

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ x>0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x<1, \\ x>0, \end{cases} \quad \text{即} 0<x<1;$$

或

$$\begin{cases} 1-x<0, \\ x<0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x>1, \\ x<0, \end{cases} \quad \text{无解.}$$

所以 $y=\ln \frac{1-x}{x}$ 的定义域为 $(0, 1)$.

$y=\ln(1-x)-\ln x$ 的定义域应满足 $\begin{cases} 1-x>0, \\ x>0, \end{cases}$ 即 $0<x<1$, 所以 $y=\ln(1-x)-\ln x$ 的

定义域是 $(0,1)$.

两函数有相同的定义域,相同的对应规则,因此是相同的函数.

本题应该选 B.

(二) 函数定义域

例 3 确定函数 $y = \sqrt[3]{1-5x} + \frac{2x+1}{x^2-3x-4}$ 的定义域.

解 当 $x^2-3x-4 \neq 0$ 时, $\frac{2x+1}{x^2-3x-4}$ 有定义,由 $x^2-3x-4 \neq 0$ 可得 $(x-4)(x+1) \neq 0$,得 $x \neq -1, x \neq 4$.

而对于任意的实数 x , 奇次根式 $\sqrt[3]{1-5x}$ 都有意义.

所以原函数的定义域是 $x \neq -1, x \neq 4$, 即 $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

例 4 确定函数 $y = \sqrt{3x-2} - \ln(5-x) + \frac{1}{x^2-4}$ 的定义域.

解 偶次根式要求被开方数非负, 即 $3x-2 \geq 0$; 对数的真数为正, 即 $5-x > 0$; 分式的分母不能为零, 即 $x^2-4 \neq 0$.

$$\text{于是有} \quad \begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ 5-x > 0, \\ x^2-4 \neq 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x < 5, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

所以原函数的定义域是 $\left[\frac{2}{3}, 2\right) \cup (2, 5)$.

(三) 函数特性

例 5 下列函数中, 在区间 $(0, 2)$ 内, 哪些是有界的? 哪些是无界的?

$$(1) xy = -2; \quad (2) y = \log_5 x; \quad (3) y = \frac{1}{3^x}; \quad (4) y = \operatorname{arccot} x.$$

解 函数 $xy = -2$ 和 $y = \log_5 x$ 在区间 $(0, 2)$ 内是无界的; 函数 $y = \frac{1}{3^x}$ 和 $y = \operatorname{arccot} x$ 在区间 $(0, 2)$ 内是有界的.

例 6 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = x \cdot \frac{1-a^x}{1+a^x}; \quad (2) f(x) = (x^2+x)\sin x; \quad (3) f(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) f(-x) &= (-x) \cdot \frac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}} = (-x) \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1} \\ &= (-x) \left(-\frac{1-a^x}{1+a^x} \right) = x \cdot \frac{1-a^x}{1+a^x} = f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数. 其中, 上式中的第二步是分子分母分别乘以 a^x 得到的.

$$\begin{aligned} (2) f(-x) &= [(-x)^2 + (-x)] \sin(-x) = (x^2 - x)(-\sin x) = -(x^2 - x)\sin x, \\ f(-x) &\neq f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

$$(3) f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是奇函数.}$$



(四) 判断极限存在

例7 判断函数 $y=10^{-\frac{1}{x-1}}+7$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的极限是否存在.

解 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $-\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, $10^{-\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (10^{-\frac{1}{x-1}} + 7) = 7.$$

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $-\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$, $10^{-\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (10^{-\frac{1}{x-1}} + 7) = +\infty.$$

由于 $x \rightarrow 1$ 时函数的左极限不存在(上面用的记号 ∞ 表示极限不存在的一种形式), 由极限存在的充分必要条件知当 $x \rightarrow 1$ 时函数的极限不存在.

(五) 无穷小量

例8 变量 $y=e^{\frac{1}{x}}-1$ 在()的变化过程中是无穷小量.

A. $x \rightarrow 0^+$ B. $x \rightarrow 0^-$ C. $x \rightarrow +\infty$ D. $x \rightarrow -\infty$

解 A. $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$.

B. $x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = -1$.

C. $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0$.

D. $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0$.

综上所述, 本题应选择 C, D.

(六) 极限的运算法则

例9 下述运算过程是否正确?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)} = \infty; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \uparrow} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

解 (1) 做法是不正确的. 虽然结果正确, 但过程是错误的. 在运用商的极限运算法则时, 要求分母极限不为零, 而本题中

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0.$$

正确做法是:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 2} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

由无穷小与无穷大的倒数关系, 得 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \infty$.

(2) 做法也是不正确的. 在运用乘积的极限运算法则时, 要求每个极限都存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

不存在,所以不能用乘积的运算法则.

正确的做法是:

因为 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 即 $\sin \frac{1}{x}$ 有界, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

由于无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3) 加法的极限运算法则只适用于有限项之和, 而本题中是无穷多项, 故不能使用. 原题中使用加法的极限运算法则是错误的.

正确做法是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right)}_{n \uparrow} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1.$$

(七) 利用两个重要极限求极限

例 10 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\tan x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \cos x}{x^2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{2+x} \right)^x.$$

解 (1) 很多初学者容易这样解这道题:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} = 1.$$

其实, 这种解法是错误的. 因为第一个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的极限过程是 $x \rightarrow 0$, 而本题中极限过程是 $x \rightarrow \pi$, 所以不能够使用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 来求极限. 正确的做法应该是作一个变换, 使新变量在 $x \rightarrow \pi$ 时趋于零, 可令 $u = x - \pi$, 则 $x = u + \pi$, 于是

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \pi)}{\tan(u + \pi)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin u}{\tan u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{\tan u} = -1.$$

(2) 本题可将原函数分解, 然后来求

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \sqrt{\cos 2x} \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \cdot \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 2x}} \right] \\ &= \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 本题是幂指型的函数, 应该考虑利用第二个重要极限求极限, 因为它的底数不是标准形式, 应先化成 1 与一个无穷小量的和.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{2+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2+x} \right)^x.$$

$$\text{令 } u = 2 + x, \text{ 原式} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{u} \right)^{u-2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{u} \right)^u \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{u} \right)^{-2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{u} \right)^{\frac{u}{2}} \right]^2 =$$

e^2 .