WUCHALILUNYUCELIANGPINGCHA

误差理论与测量平差

王穗辉 ⊙ 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

误差理论与测量平差

王穗辉　编著

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是测绘和地理信息系统及相关专业误差理论与测量平差基础课程的教材。本书全面系统地阐述了测量误差的基本理论、测量平差的基础方法以及近代平差的原理，在此基础上，加强和拓宽了测量平差理论应用的深度和广度，系统性地编制了大量的平差应用例题，通过这些例题多角度地对经典的测量平差方法进行了演绎。在本书的近代平差部分编入了序贯平差、秩亏自由网平差、附加系统参数的平差方法等。每一章的后面都附有相应的习题，书后附有参考答案。

本书内容翔实，系统性强，叙述详尽，并配有较多实例，既可作为工科院校测绘专业的教学用书，也可供工程技术人员学习和参考。

图书在版编目（CIP）数据

误差理论与测量平差/王穗辉编著. —上海：同济大学出版社，2010. 1

ISBN 978-7-5608-4209-7

Ⅰ.①误… Ⅱ.①王… Ⅲ.①误差理论—高等学校—教材②测量评差—高等学校—教材 Ⅳ.①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 220653 号

误差理论与测量平差

王穗辉 编著

责任编辑 高晓辉　　责任校对 杨江淮　　封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021—65985622）

经　销 全国各地新华书店

印　刷 江苏大丰印刷二厂

开　本 787mm×1092mm 1/16

印　张 16.5

印　数 1—3100

字　数 411000

版　次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-4209-7

定　价 33.00 元

前　言

测量平差课程是测绘工程本科专业的一门重要的专业基础课，它为其他后续的专业课打下有关数据处理方面的基础，也是攻读相关专业研究生的一门必修课程。本书是编者根据测绘和地理信息系统专业的教学要求，在原试用讲义的基础上，根据多年的平差课程的教学经验编写而成。

全书共分 9 章，第 1 章对平差学科的研究内容进行了介绍；第 2 章介绍了测量误差理论、观测误差的特性和衡量精度的标准；第 3 章介绍了广义传播律；第 4 章介绍了平差的数学模型和最小二乘原理；第 5 章介绍了条件平差和附有参数的条件平差；第 6 章介绍了间接平差和附有限制条件的间接平差；第 7 章介绍了误差椭圆；第 8 章介绍了统计假设原理在平差中的应用；第 9 章对近代平差的一些原理和方法进行了介绍。本书每一章后面都有相应的习题，且在最后附有参考答案。

本书的编写力图做到以下几点：

(1) 系统性。由浅入深地对从基本原理到平差应用的一些实际问题作了较详细的介绍。

(2) 通俗性。测量平差的许多理论和算法，涉及学科较多，理解和掌握比较困难，编者试图用通俗的方法讲述这些理论的基本思想，以扩大读者的范围。

(3) 实用性。测量平差实用性很强，对于大多数读者，学习它是为了解决工作中的问题。因此，本书在叙述中都配有计算实例，便于读者把理论应用到实践中去。

本书在理论阐述上保留了经典，公式推导上尽量化繁为简，平差理论的应用面上也力求有所拓展，编者在书中系统性地编制了大量的平差理论应用例题，通过这些例题多角度地对经典的测量平差方法进行了演绎。

本书适合工科院校测绘专业的师生学习使用。从发展看，测量平差的应用必将渗透到工程数据处理的各个领域。掌握这方面的知识，对于其他专业人员也大有裨益。

由于编者水平有限，书中难免会存在一些缺点和疏漏之处，敬请读者批评指正。

王穗辉

2009 年秋于同济大学

目　　录

1 绪　论

在工程建设和科学研究中，人们采用一定的仪器、工具、传感器或其他的手段对各种类型的物理量进行观测，从而获得大量的观测数据。观测数据可以是直接测量的结果，也可以是经过某些变换后的计算结果。由于观测数据中总是包含有信息和干扰（观测误差）两部分，为了对观测结果形成认识上的深化并反映事物内部的规律性，从而得出科学的结论，必须运用数学的方法按照一定的准则对获取的观测数据进行分析、处理，尽量排除或减弱干扰对观测值的影响，得到可用数学方式表述的某种规律。本章的目的就是说明观测误差的不可避免性以及测量平差学科的研究内容等。

1.1 观测误差

观测（测量）是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取与地球空间分布有关信息的过程和实际结果，而误差主要来源于观测过程之中。通过实践，人们认识到，任何一种观测都不可避免地要产生误差。当对某个物理量进行重复观测时，无论仪器多么精密，观测如何仔细，观测的方法如何合理，观测结果之间或观测结果与其理论值之间总会存在一些差异。例如，观测一个平面三角形的三个内角值，就会发现其观测值之和不等于 180°。这种在同一个量的各观测值之间或在观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象，在测量工作中是普遍存在的，这说明观测值中含有**观测误差**。

观测误差产生的原因，可分为三个方面：仪器误差是由于仪器构造上的缺陷和精密度的限制，使观测值含有误差；观测者的因素是由于观测者的感观能力的限制，如估读小数和照准目标都会产生一定的误差；外界条件的影响，是指测量时的环境，如不断变化着的空气温度、湿度、风力、明亮度、地球曲率和大气折光等，都会对观测数据直接产生影响，也必然会给观测值带来误差。通常将上述产生观测误差的三个主要因素：仪器误差、观测者的因素及外界条件的影响统称为测量的**观测条件**。

显而易见，观测条件好一些，观测成果的质量就会高一些，观测值的误差也会小一些，但由于各种因素的影响，存在观测误差是一件不可避免的事情。全部测量工作的重心，就是采用各种方法尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响，合理地分配观测误差以提高期望值的精度。因此形象地讲，数据处理的过程也就是减小误差影响的过程。

为了掌握误差出现的规律及其对观测结果准确性的影响，应按误差的性质进行分类，以便采取相应的方法加以处理。观测误差按性质可分为偶然误差、系统误差和粗差。

1. *偶然误差*

在相同的观测条件下进行了一系列的观测，如果观测误差的数值大小和符号都表现出偶然性，即从单个误差来看，该误差列不存在确定的规律性，这种误差即称为**偶然误差**。

偶然误差的产生，有仪器构造上的原因，如量度单位不能尽物体的大小；有观测者感观能力的限制，如仪器没有严格照准目标，水准尺的毫米刻画估读不准确等；测量时气候变化

引起观测数据产生的微小变化等都属于偶然误差。一般而言，偶然误差是指观测中许多微小偶然误差项的总和，由于影响每项微小偶然误差的偶然因素不断变化，数值忽大忽小，其符号或正或负，所以由它们的总和构成的观测值的偶然误差的大小和符号都是不能事先预知的，是随机的，也是不可避免的。偶然误差又称为**随机误差**，其分布规律符合或近似符合正态分布。

2. *系统误差*

在相同观测条件下进行一系列观测，如果观测误差在数值大小、符号上保持不变，或在观测过程中按一定的规律变化，则称这种误差为**系统误差**。

系统误差按其表现形式主要分为四类：线性系差、恒定系差、周期系差、复杂性系差。例如，用一把含有尺长误差的钢尺丈量距离，距离越长，累积的误差就越大，这种误差属于系统误差中的线性系差，即误差是随测量时间或其他因素变化而逐渐增加或减少的；恒定系差指误差不随时间或其他因素而变化，为恒定常数；周期系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈周期性变化，如沉降监测中，在两固定点间每天重复进行水准测量，就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差；复杂性系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈十分复杂的规律，可能是前三种系差的叠加或服从某种较为复杂的分布。

系统误差在相同观测条件下不能通过多次重复测量而减少，它也不像偶然误差那样服从正态分布。其对于观测结果的影响一般具有累积作用，对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差的影响，达到实际上可以忽略不计的程度，即将残余的系统误差控制在小于或至多等于偶然误差的量级内。

消除系统误差的根本原则是，使测量和数据处理的过程满足确定的物理模型或理想的假设条件。**消除方法**包括以下三个方面：

(1) 合理选择观测条件。如根据经验可知，三角测量中的系统误差来源于观测条件的不同，主要是天气（指太阳照射方向、日间或夜间、风向、风力、气温、气压等），若观测条件改变，如由日间观测改为夜间观测，则观测值服从另一母体，有另一均值，因而有另一系统误差，同一观测角值的分群现象也可由此得到解释。所以利用不同的观测条件进行观测，系统误差就近似于偶然误差，取其平均，就可减少系统误差的影响。

(2) 实验估计法。对在测量中无法消除但却可以估计出大小和符号的系统误差，可在测量结果中给予改正，如距离丈量中的尺长改正。

(3) 理论计算估计法。对已知误差源，但既无法消除又无法测定时，可用误差分析的方法对系统误差进行估计。

3. *粗差*

在测量工作中，除了以上两类误差外，还可能存在粗差。**粗差**一般指超限误差，即指比最大偶然误差还要大的误差，它的存在将极大地危害测量最终成果。随着现代测绘技术的发展，特别是空间技术在对地观测中发挥着愈来愈大的作用，可以在短时间内通过自动化采集等方法获得大量的观测值，这样难以避免会有粗差混入信息之中。粗差问题在现今的高新测量技术（GPS，GIS，RS）中尤为突出。识别粗差不是用简单方法就可以达到目的的，需要通过数据处理方法进行识别和消除其影响。

1.2 测量平差学科的研究对象及任务

测量平差是测绘学中一个有悠久历史的专有名词。测量平差发展到现在，从其理论构成和计算技术来看，它是集概率统计学、近代代数学、计算机软件、误差理论、测量数据处理技术为一体的一门不断发展和完善的学科，其理论和方法对其他学科，如计量学、物理学、电工学、化工学及各类工程学科等，只要是处理带有误差的观测数据，有多余观测值的问题，均可应用，所以测量平差学科的适用范围十分广泛。

本书的主要内容是关于经典平差。**经典平差**方法包括间接平差、条件平差、附有限制条件的间接平差及附有参数的条件平差。**经典平差**是指测量平差学科研究的基础内容，也是应用范围最广和理论研究中最重要的基础部分。**经典平差处理的观测值限于仅含有偶然误差的观测值。**

当观测值中除了含有偶然误差，还包含有系统误差或粗差或两者兼而有之时，这种数据处理的方法就属于近代平差研究的范围。

无论是经典平差还是近代平差，其进行平差计算的前提条件是要有**多余观测值**，即有效观测值的个数多于必要观测值的个数。

经典平差研究的是含有偶然误差的观测值，所以本课程还必须研究偶然误差概率统计理论，包括偶然误差的分布、评定精度的指标、误差的传播规律、误差检验和误差分析等。

经典平差遵循的准则是最小二乘估计的准则。尽管经典平差各种方法的数学模型不同，但它们所依据的平差准则是相同的，其差别仅在于：在不同的数学模型下，它们的具体求解方法有所不同。由于采用了相同的平差准则，所以对于同一个平差问题，若采用经典平差中的不同方法进行平差，其得到的平差结果应该是完全相同的，至于应该采取哪种平差方法，应视具体情况而定。

测量平差学科的任务主要有：依据某种最优化准则消除观测值之间的矛盾；求定未知量的最优估值（也称平差值、最或然值、最佳估值或最可靠值等）；对测量成果及未知量的精度进行评定。从误差处理的角度，平差的任务还包括：建立误差分析体系，研究误差来源、误差类型、度量误差的指标、研究误差的空间传播机制，削弱误差对测绘产品的质量影响，用统计分析理论进行产品的质量控制等。

习 题 1

1-1 在测量工作中，产生误差的原因有哪几种？试举例说明。

1-2 什么是观测条件？观测条件与观测误差有什么关系？

1-3 粗差对观测成果有何影响？怎样才能避免粗差的发生？

1-4 系统误差对观测成果会带来什么影响？怎样削弱或消除它？

1-5 为什么在观测成果中一定存在偶然误差？能否将其消除？为什么？

1-6 什么是多余观测？为什么要有多余观测？

1-7 测量平差的任务是什么？

1-8 在测角中用正倒镜观测，水准测量中，使前后视距相等。这些规定都是为了消除什么误差？

1-9 用钢尺丈量距离，有以下几种情况，使量得的结果产生误差，试分别判定误差的性质及符号（只讨论含偶然误差还是系统误差，粗差不予考虑）。

（1）尺长不准确；

（2）尺不水平；

（3）估计小数不准确；

（4）尺垂曲；

（5）尺端偏离直线方向。

1-10 在水准测量中，有以下几种情况使水准尺读数带有误差，试判别误差的性质及其符号。

（1）视准轴与水准轴不平行；

（2）仪器下沉；

（3）读数不准确；

（4）水准尺下沉。

2 偶然误差的统计特性及精度指标

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最佳估值，并评定测量成果的精度，解决这两个问题的基础，是研究观测误差的理论，简称**误差理论**。

由于观测中产生偶然误差的误差源有很多，各误差源所产生的偶然误差都是随机变量且相互独立、在整个偶然误差中各自所占比例也都是很小的，故根据相互独立的随机变量之和渐近服从正态分布的中心极限定理，合成的偶然误差服从于正态分布，所以正态分布特性也是误差理论的基础理论之一。

偶然误差是一种随机变量，但从大量观测值的偶然误差来看，可以发现隐藏在偶然性中的必然性。这种规律性可根据概率原理，用统计学的方法进行研究。

为了使用方便，人们希望用一个量化的数字特征来衡量观测值的精度，这个数字特征就称为**精度指标**。本章将对几种主要的精度指标进行介绍。

2.1 正态分布

2.1.1 正态分布

正态分布(高斯分布)是一种经常使用的、重要的连续型分布。偶然误差的概率分布曲线很接近正态分布曲线，且随着观测值个数 n 的无限增大，正态分布就是偶然误差分布的极限分布，所以偶然误差 Δ 是一种服从正态分布的随机变量。

定义：若连续型随机变量 X 的概率密度函数为(为书写方便，常将 e^x 写成 $\exp x$)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{2-1-1}$$

则定义 X 服从正态分布，参数 μ 为分布的数学期望，σ^2 为方差，$\sigma>0$。简记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。在$(-\infty,+\infty)$的范围内，$f(x)$的积分为 1。X 相应的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x \tag{2-1-2}$$

任意连续型分布的数学期望和方差的定义式为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{2-1-3}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{2-1-4}$$

其中，$f(x)$为连续型分布的密度函数。若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$。

有时为使用需要，可将随机变量 X 标准化：$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。$N(0,1)$ 中，$E(X)=0$，

$D(X)=1$，称为**标准正态分布**。标准正态分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \tag{2-1-5}$$

以上为正态分布的一些重要的概率特性。此外，正态分布还具有以下特性：

(1) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且具有有限的数学期望和方差：$E(X_i)=\mu_i$，$D(X_i)=\sigma_i^2\neq 0\ (i=1, 2, \cdots, n)$，设 $B^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$，测量学中设 $[X]=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，即常用 $[X]$ 来表示 X 各分量之和。则随机变量

$$Y=\frac{[X]-[\mu]}{B} \tag{2-1-6}$$

在 $n\to\infty$ 时，$Y\sim N(0, 1)$。即当某些随机变量不知其分布时，只要它们在总和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 中的影响都均匀地小，且观测量较大时，其随机变量之和均可当作正态分布处理，这就给处理分布未知的变量带来很大的方便。如测量中的偶然误差 Δ 是由多个相互独立的误差源产生的微小误差之和，所以可以认为偶然误差 Δ 是服从于正态分布的随机变量。

(2) 有许多种分布，如二项分布、t 分布、χ^2 分布等，在其自由度 $n\to\infty$ 时，它们都趋近于正态分布。所以说，正态分布是多种分布的极限分布，当要研究的某变量不知其分布且 n 较大时，可用正态分布代替。

(3) 正态分布具有可加性（重现性）。设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立的正态变量，且 $X_i\sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则变量

$$Y=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n \tag{2-1-7}$$

有 $Y\sim N(E(Y), D(Y))$，其中，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为常数，且

$$E(Y)=k_1\mu_1+k_2\mu_2+\cdots+k_n\mu_n,\ D(Y)=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2 \tag{2-1-8}$$

即正态变量的线性函数 Y 仍服从正态分布。

(4) 正态随机变量 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ 出现在给定区间 (x_1, x_2) 内的概率为

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{2-1-9}$$

令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，可将 $F(x)$ 变成标准正态分布函数，即

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(t_2)-\Phi(t_1) \tag{2-1-10}$$

其中，$t_1=\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}$，$t_2=\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}$，而 $\Phi(t_1)=\Phi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$，$\Phi(t_2)=\Phi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$，由正态分布表查取。

特殊情况下，当 $x_1=-k\sigma$，$x_2=k\sigma$ 时，即 X 在区间 $(-k\sigma,\ k\sigma)$ 内的概率为

$$P(-k\sigma<X\leqslant k\sigma)=\Phi\left(\frac{k\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-k\sigma-\mu}{\sigma}\right)=1-2\Phi\left(\frac{k\sigma-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-1-11}$$

2.1.2 n 维正态分布

在测量工作中，通常用纵、横坐标来确定平面点的位置，而纵、横坐标误差就是二维正态随机变量，它们服从的分布为二维正态分布。二维正态随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布概率密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \tag{2-1-12}$$

式中，参数 μ_x，μ_y，σ_x^2，σ_y^2 和 ρ 分别是随机变量 X 和 Y 的数学期望、方差和相关系数。

当对随机变量 X，Y 进行分别研究时，可求得边缘分布密度函数为

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma_x}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \tag{2-1-13}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\sigma_y}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \tag{2-1-14}$$

当相关系数 $\rho=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=0$，即 X 和 Y 互不相关时，将 $\rho=0$ 代入式(2-1-12)，有

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{2-1-15}$$

式(2-1-15)说明，正态随机变量 X，Y 相互独立，可见，对于正态随机变量而言，互不相关和互相独立是等价的。

设有 n 维**随机向量** $\boldsymbol{X}=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]^{\mathrm{T}}$，如果 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布，则 n 维正态随机向量的密度函数为

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\ |D_{XX}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^{\mathrm{T}}D_{XX}^{-1}(x-\mu_X)\right\} \tag{2-1-16}$$

式中，随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和方差 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 为

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{\mu}_X}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{bmatrix},\ \underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}=\begin{bmatrix}\sigma_{X_1}^2&\sigma_{X_1X_2}&\cdots&\sigma_{X_1X_n}\\\sigma_{X_2X_1}&\sigma_{X_2}^2&\cdots&\sigma_{X_2X_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sigma_{X_nX_1}&\sigma_{X_nX_2}&\cdots&\sigma_{X_n}^2\end{bmatrix} \tag{2-1-17}$$

数学期望向量 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和方差阵 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 是 n 维正态随机向量的数字特征。$\boldsymbol{\mu}_X$ 中各元素 μ_i 为随

机变量 X_i 的数学期望，$\boldsymbol{D}_{XX}$ 中各主对角线上的元素 $\sigma_{X_i}^2$ 为 X_i 的方差，非主对角线中的元素 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 X_i 关于 X_j 的协方差，是描述随机变量 X_i 和 X_j 之间相关性的量。

随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的方差 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 也称为方差-协方差阵，简称为方差阵或协方差阵，将在第 3.2 节对方差阵的性质中作详细介绍。

2.2 偶然误差的统计特性

2.2.1 真值与估值

任何一个被观测的量，客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值，这个数值就称为该观测值的**真值**。有些观测值的真值是已知的，如三角形内角之和应等于 180°；有些观测值的真值称为**约定真值**，即相对于观测值而言约定真值是一个高精度的已知值（约定真值可以是通过高精度观测得到，也可以是高等级控制网平差后的平差值）。

设对真值为$\widetilde{L}$的物理量观测了 n 次，观测值向量为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}$，其对应的真误差为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{\Delta}}$，则有

$$\boldsymbol{L} = \widetilde{L} - \boldsymbol{\Delta} \tag{2-2-1}$$

因此可得各真误差的计算式：

$$\begin{gathered}\Delta_1 = \widetilde{L} - L_1 \\ \Delta_2 = \widetilde{L} - L_2 \\ \vdots \\ \Delta_n = \widetilde{L} - L_n\end{gathered}$$

等号两边各自取和，根据真误差（偶然误差）的数学期望等于零 $(E(\Delta) = 0)$ 的性质，有

$$\widetilde{L} = E(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[L] \tag{2-2-2}$$

所以，观测值的真值$\widetilde{L}$等于观测值的数学期望$E(L)$的前提条件是，观测值中仅含有偶然误差且观测值的个数 n 趋近于无穷大。

以上过程说明：从统计观点来看，观测值的真值理论上可用仅含偶然误差的观测值的数学期望来定义。

当 n 的个数有限而非无穷多次时，可用下式计算观测值真值的估值：

$$\hat{L} = \frac{1}{n}[L] \tag{2-2-3}$$

估值也称平差值、最或似值，用 $\hat{L}$ 表示。$\hat{L}$ 与真值 $\widetilde{L}$ 的关系是

$$\widetilde{L} = \lim_{n\to\infty} \hat{L} \tag{2-2-4}$$

应该注意的是，观测值的真值唯一存在，所以真值在理论上是一个常数，其方差为零，即 $D(\widetilde{L}) = 0$，而估值却由于有限个观测值带有的随机性而随机波动，所以**估值是一个随机变**

量，其方差不为零，即 $D(\hat{L}) \neq 0$。

2.2.2 偶然误差的统计规律性

由式(2-2-1)得真误差的定义式

$$\Delta_i = \tilde{L} - L_i \tag{2-2-5}$$

即**真误差**被定义为真值与观测值之差。有些教材或文献上将真误差定义为观测值与真值之差，与上面算式的符号正好相反。由于两种定义方式的结果对后续各种计算公式的推导并无实质上的影响，所以以后将不再特别指出。

本章所处理的观测值中仅含有偶然误差，不包括系统误差和粗差，而真误差 Δ 也是偶然误差，它具有偶然误差的所有特性和分布。

在第 1 章的偶然误差特性里已经指出，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，呈现出一种随机性，但通过对大量偶然误差的统计分析，却表现出一定的统计规律性，并且当误差个数越多，这种规律性就表现得越明显。为了揭示偶然误差的规律性，做了这样一个实验：在相同的观测条件下，对某测区 817 个三角形的内角进行独立观测，并按式(2-2-5)计算三角形内角和的真误差为

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 817)$$

式中，180°为三角形内角和的真值；$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 为第 i 个三角形内角和的观测值。

由于在观测值中已剔除了粗差，且系统误差已削弱到可以忽略不计，因此从整体讲，这些误差均为随机因素所致，它们都是偶然误差，而且各个误差之间是相互独立的。所谓独立，是指各个误差在数值上和符号上互不影响。与这样一组误差相对应的观测值称为**互相独立的观测值**。

现将误差出现的范围分为若干相等的小区间，每个区间的长度 dΔ 为 0.5″。将这一组误差数值按大小排列，统计出现在各区间内误差的个数 μ_i 以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 μ_i/n ($n = 817$)，其结果列于表 2-1 中。

表 2-1

误差区间 dΔ	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 μ_i	频率 μ_i/n	$\frac{\mu_i/n}{d\Delta}$	个数 μ_i	频率 μ_i/n	$\frac{\mu_i/n}{d\Delta}$	
0.0″～0.5″	123	0.151	0.302	121	0.148	0.296	Δ 数值等于区间左端值时，统计在该区间内
0.5″～1.0″	104	0.127	0.254	90	0.110	0.220	
1.0″～1.5″	75	0.092	0.184	78	0.096	0.192	
1.5″～2.0″	55	0.067	0.134	51	0.062	0.124	
2.0″～2.5″	27	0.033	0.066	39	0.048	0.096	
2.5″～3.0″	20	0.025	0.050	15	0.018	0.036	
3.0″～3.5″	10	0.012	0.024	9	0.011	0.022	
3.5″以上	0	0	0	0	0	0	
和	414	0.507		403	0.493		

从表 2-1 中可以看出，该组误差表现出这样的分布规律：绝对值较小的误差比绝对值

较大的误差多；绝对值相等的正误差与负误差个数相近；误差的绝对值有一定限值，最大不超过 3.5″。

为了更直观地表示偶然误差的正负及大小的分布情况，可利用表 2-1 中的数据作图2-1。图中横坐标表示误差的正负和大小，纵坐标表示误差出现在各区间的频率 μ_i/n 与区间长 $d\Delta$ 之比。所有区间按纵坐标形成矩形条，每一误差区间上的矩形条面积就代表了误差出现在该区间内的频率，矩形条面积总和等于1。该图在统计学中称之为**频率直方图**。

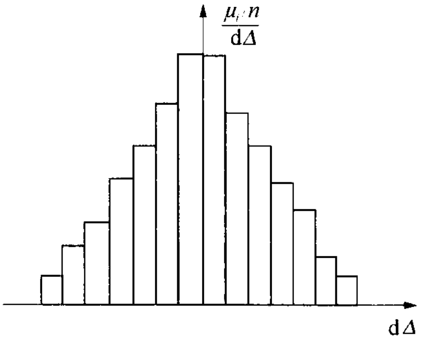

图 2-1

由此可知，在相同观测条件下所得到的一组独立观测误差，只要误差的总个数 n 足够大，那么出现在各区间内误差的频率就会稳定在某一常数(理论频率)附近，而且当观测个数愈多时，稳定的程度也就愈大。例如，表 2-1 中的一组误差，在观测条件不变的情况下，如果增加观测的三角形个数 n，这样误差出现在各区间内的频率将越来越稳定，变动的幅度也会越来越小，当 $n\to\infty$时，各频率也就趋于一个完全确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。也就是说，一定的观测条件，对应了一种确定的误差分布。

实际上，由于误差的取值是连续的，当误差的个数 n 无限增多，并无限缩小误差区间 $d\Delta$ 时，可以想象，图 2-1 中的各个小长方条顶边的折线就变成一条光滑曲线，此曲线为误差分布的概率密度函数曲线，简称**误差曲线**，它与正态分布曲线极为接近，其极限分布就是正态分布，所以可以认为偶然误差是服从正态分布的连续型随机变量。至此，关于偶然误差的分布可以用三种方法描述：一种为列表法，如表 2-1 所示；另一种为作图法，如图 2-1 所示；第三种为密度函数法，即用正态分布的密度函数来表示。由于密度函数法科学实用，大多数情况下都采用这种方法。

由式(2-1-1)可知正态分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2-2-6)$$

正态分布的参数为数学期望 μ 和方差 σ^2，这两个参数决定了正态分布密度函数曲线的位置和形状。在图 2-2 中给出了两条 σ 均为 1 而 μ 不相同的曲线，当 $\mu=0$ 时，曲线以纵轴为对称线；当 $\mu=3$ 时，曲线以直线 $x=3$ 为对称线，可见 μ 决定了曲线的位置。在图 2-3 中给出了三条 μ 均为零而 σ 不相同的曲线，当 σ 越小时，曲线形状越陡峭，反之，曲线越平缓。正态分布曲线具有两个拐点，它们在横轴上的坐标为 $x_{拐}=\mu\pm\sigma$，可见 σ 决定了曲线的形状。

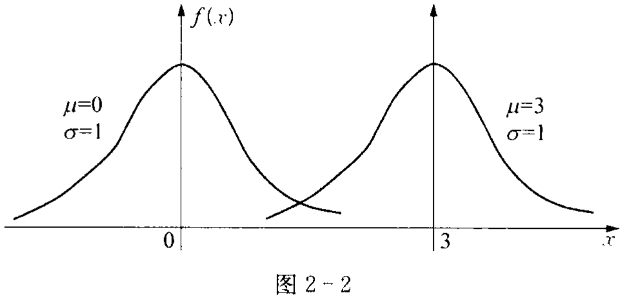

图 2-2

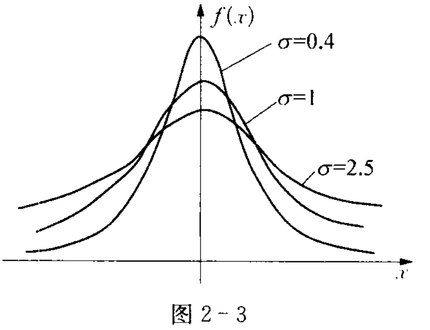

图 2-3

所以 μ 和 σ 是正态分布的两个很重要的数字特征。此外，无论曲线形状如何变化，曲线与横轴线包围的面积恒为 1。

(1) 把偶然误差特性用概率的术语总结如下：

① 在一定的观测条件下，误差的绝对值不会超过一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零；

② 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大；

③ 绝对值相等的正负误差出现的概率相同；

④ 偶然误差的数学期望为零。

(2) 为便于记忆，也可把**偶然误差特性**简单描述如下：

① 误差的**有界性**。设 B 为误差限值，即误差在 $[-B, B]$ 区间出现是一必然事件，其概率为

$$P(-B < \Delta \leqslant B) = \int_{-B}^{B} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = 1 \tag{2-2-7}$$

② 误差的**趋向性**。若 $\Delta_1 < \Delta_2$，则概率 $P(\Delta_1) > P(\Delta_2)$，或密度函数 $f(\Delta_1) > f(\Delta_2)$。

③ 误差的**对称性**。正负误差出现的概率相等：

$$P(+\Delta) = P(-\Delta) \tag{2-2-8}$$

④ 误差的**抵偿性**。

$$E(\Delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\Delta] = 0 \tag{2-2-9}$$

由上面的偶然误差特性④，可以得到，偶然误差服从于数学期望为零的正态分布，即 $\Delta \sim N(0, \sigma^2)$。所以，**偶然误差的密度函数公式**为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{2-2-10}$$

可见**偶然误差的分布曲线是以纵轴为对称轴**的，曲线的形状取决于方差 σ^2 的大小。

当观测误差中有系统误差存在时，观测误差的数学期望 $\mu \neq 0$，这时，分布曲线以横轴上 $x = \mu$ 的点为对称轴，以方差 σ^2 值的大小控制曲线的形状。

2.3 精度和衡量精度的指标

测量平差的重要任务之一，就是评定测量成果的精度。**精度**是指观测误差或观测值分布的离散程度，而且，观测值的精度等于其所对应的观测误差的精度（下文式(3-1-6)证明）。所以，若两组观测误差的分布相同，不仅这两组观测误差等精度，它们对应的两组观测值也等精度；反之，分布不同，精度也不会相同。

此外，在一定的观测条件下进行的一组观测，它应该对应着一种确定的误差分布，也就是说，这组观测值里面的每一个值，都对应着同一个精度。如表 2-1 中，统计了 817 个三角形真误差的分布状况，这些误差值有大有小，各不相同，但由于它们是相同的观测条件下得到的观测误差，这些观测误差属于同一种分布，所以这 817 个三角形角值的观测精度是相同