信息与计算科学丛书——46

有限元方法

石钟慈　王鸣　著

科学出版社
www.sciencep.com

信息与计算科学丛书　46

有限元方法

石钟慈　王　鸣　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地论述了有限元方法的数学基础理论. 本书以椭圆偏微分方程的边值问题为例, 介绍了协调有限元方法以及非协调等非标准有限元方法的数学描述、收敛条件和性质、有限元解的先验和后验误差估计以及有限元空间的基本性质, 其中包括作者多年来的部分研究成果.

本书可以作为从事科学与工程计算的科研和工程技术人员的参考书, 也可以作为高等院校计算数学、应用数学等专业硕士研究生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法/石钟慈, 王鸣著. —北京: 科学出版社, 2010
(信息与计算科学丛书; 46)
ISBN 978-7-03-026475-6

Ⅰ. 有… Ⅱ. ① 石… ② 王… Ⅲ. 有限元法 Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 012953 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张: 24 1/4
印数: 1—2 500 字数: 468 000

定价: 75.00 元

《信息与计算科学丛书》编委会

（按姓氏拼音为序）

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编，科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于2004年9月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿，介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

有限元方法在 20 世纪 50 年代诞生于结构力学, 至今它已在众多领域取得了巨大的成功. 现在, 它是求解微分方程的成熟、有效的数值方法. 在有限元方法的创立和发展过程中, 我国学者作出了重要的贡献. 冯康的有关工作是开创性的, 独立于美国和欧洲之外创立并发展了有限元方法.

有限元方法的基本思想是根据变分原理, 利用有限元空间上的离散解近似无穷维空间 V 上的连续解. 构造有限元空间的典型步骤如下:

(1) 将连续解的定义域 Ω 剖分成若干个子区域, 称每个子区域为一个单元;

(2) 在每个单元上, 选取一个由多项式构成的 m 维空间和 m 个节点参数, 要求空间中的每个多项式都可以由一组节点参数值唯一确定, 函数或导数在单元某些点的值可以作为节点参数;

(3) 以某种方式连接各单元上的节点参数, 进而得到定义在 Ω 上的分片多项式空间 V_h, 称这样得到的 V_h 为有限元空间.

在有限元方法的数学理论中, 有下面著名的结果:

当 V_h 是 V 的子空间时, 有限元解对连续解的逼近性取决于有限元空间 V_h 对 V 的逼近性.

由有限元的插值理论可以得到有限元空间的逼近性质.

当有限元空间 V_h 是 V 的子空间时, 称有限元方法是协调的或标准的有限元方法. 通常, 用于求解 $2m$ 阶椭圆偏微分方程边值问题的有限元空间的协调性质导致 V_h 是 $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ 的子空间. 所以, 有时也称求解的问题为 C^{m-1} 问题. 对于二阶微分方程的边值问题, 有许多协调的有限元, 包括最少节点参数的情形. 对于四阶微分方程的边值问题, 也有若干协调的有限元, 但是它们的节点参数较多. 例如, 当单元是三角形时, 至少需要 18 个节点参数和 5 次多项式才能满足协调性条件. 当单元是四面体时, Zenicek 构造了一个协调元, 需要 9 次多项式和 220 个节点参数. 这样就带来了严重的计算困难, 不仅有限元空间的维数相当大, 而且空间的结构也很复杂. 如何减少节点参数的个数以及降低多项式的阶数是人们感兴趣的问题.

最初的尝试是把单元再分成小单元, 然后使用在整个单元上的低阶分片多项式来满足连续性要求. 这样得到的有限元空间仍然复杂, 失去了有限元方法的简单特性, 所以实际中极少使用.

一个成功的方法是放松在 Ω 上的 C^{m-1} 连续性要求. 称用这样的方法得到的

有限元为非协调元. 有些非协调元, 如 Wilson 元、Morley 元, 是收敛的; 而有些是不收敛的. 也有的非协调元, 如二维 Zienkiewicz 元, 只对 Ω 的某些特殊剖分收敛. 因此, 非协调元的收敛条件变得重要起来. Irons 从数值实践中提出一个方法, 称为"分片检验". 分片检验的思想基于: 对于常应变问题, 有限元方法应该得到精确解. 分片检验使用起来非常简单, 在力学和工程界非常流行. 但是, 如果不附加一些条件, 分片检验不是充分条件也不是必要条件. Stummel 从数学的角度提出了一个充分必要条件, 称之为广义分片检验. 石钟慈利用广义分片检验讨论了许多非协调元的收敛性, 同时提出了比广义分片检验更易于应用的一个充分条件, 称之为 F-E-M 检验.

虽然数学家证明了分片检验不充分也不必要, 但是力学家和工程师们仍然相信在某些条件下, 如弱连续条件, 分片检验仍然是非协调元收敛的充分必要条件. 直到王鸣的工作证明了: 在包括弱连续性在内的一定条件下, 分片检验是收敛的充分条件. 不仅如此, 如果某非协调元不通过分片检验, 则存在一簇剖分, 使得该非协调元在此簇剖分下是不收敛的.

除了非协调元外, 位移杂交有限元方法也放松了 C^{m-1} 连续性. 该方法把单元之间的连续性看成约束, 在单元内部边界上引入 Lagrange 乘子放松连续性要求. 这样原始的变分问题变成了依赖于 Ω 剖分的变分问题. 这样得到的有限元称为位移杂交有限元. 对应于每一个杂交元, 都有一个从它得到的非协调元. 在这种意义下, 位移杂交元方法可以看成是非协调元方法的一种特殊情形.

无论是分片检验还是广义分片检验, 它们都是有限元收敛的分析工具. 如何构造好的单元是另外一件事. 通常, 人们愿意用函数和导数在单元顶点的值作为节点参数, 这样可以得到简单的结构和少的总自由度. 但是, 这样难以保证单元内边界上的连续性条件, 如 Zienkiewicz 元. 以二维情形为例, 为了保证收敛性, 法向导数在单元边上的积分平均值、函数在边中点的函数值被选为节点参数, 如 Veubake 元, 这样就导致了整体自由度的增加.

为了得到好的单元, 力学家们提出了一些构造方法. 例如, 唐立民等提出的拟协调元方法、龙驭球等的广义协调元方法、Bergan 等的自由格式方法和能量正交方法. 由这些方法构造的某些单元具有很好的收敛性质. 张鸿庆等证明了拟协调元方法的收敛性, 石钟慈等证明了其他方法的收敛性.

非协调元、拟协调元、广义协调元、自由格式和能量正交等方法都与协调元方法有所不同, 所以, 称这些方法为非标准有限元方法. 为了讨论这些非标准有限元方法, 张鸿庆提出了多套函数逼近方法, 石钟慈和陈绍春提出了双参数方法, 这些数学工具成功地建立了非标准有限元方法的数学理论. 本书只准备介绍双参数方法, 关于多套函数方法, 有兴趣的读者可以在本书的参考文献中找到.

还有另外一条途径克服 C^{m-1} 连续性的困难 —— 混合有限元方法. 该方法把

原来的偏微分方程转化为低阶偏微分方程组, 如把重调和方程转化成两个二阶偏微分方程, 然后考虑转化后问题的有限元方法. 虽然最终得到的有限元格式与直接从原问题出发得到的可能不相同, 但是毕竟还是转化后问题的有限元方法. 从这个角度来看, 混合有限元方法不是非标准的有限元. 当然, 对于转化后的问题也可以使用非标准有限元方法.

有限元方法及其数学理论的内容十分丰富, 涉及的范围广泛. 本书考虑椭圆偏微分方程边值问题的标准和非标准有限元方法的数学理论, 介绍标准和非标准有限元方法的如下问题:

(1) 数学描述;

(2) 收敛条件;

(3) 有限元解的先验和后验误差估计;

(4) 有限元空间的基本性质,

可以把这些内容看成有限元方法的数学理论的学习或研究工作的入门介绍.

本书分为 12 章. 第 1 章介绍椭圆边值问题的变分原理, 内容包括: 需要用到的 Sobolev 空间的基本结果, Poisson 方程和重调和方程边值问题的变分形式, 抽象变分问题的 Lax-Milgram 引理、Ritz 法和 Galerkin 法及其抽象的误差估计.

第 2 章介绍有限元方法的基本内容, 包括构造有限元、有限元插值算子和有限元空间的方法, 椭圆边值问题的若干协调和非协调有限元. 从有限元和有限元空间的构造方法以及插值误差分析的角度来看, 协调元和非协调元没有区别. 另外, 从算法实现的角度来看, 它们也没有什么区别, 所以本书把它们列在一起给出.

第 3 章介绍有限元的插值理论, 内容包括仿射变换技巧、有限元的插值误差估计、逆不等式和有限元空间的逼近精度等, 最后介绍更一般情形的插值理论结果.

第 4 章考虑求解椭圆边值问题的协调有限元方法. 对于二阶和四阶问题, 介绍协调有限元方法的收敛性、误差估计和 Aubin-Nistche 技巧. 对于 $2m$ 阶问题, 介绍后验误差估计.

第 5 章和第 6 章介绍非协调元的数学理论. 第 5 章介绍二阶、四阶和 $2m$ 阶椭圆边值问题的非协调方法及其先后验误差估计. 第 6 章讨论非协调元的收敛条件, 包括分片检验、广义分片检验、弱分片检验、F-E-M 检验等, 并且介绍有限元的超逼近性质和若干非协调元的奇异收敛现象.

第 7 章介绍拟协调元方法, 内容包括拟协调元的基本思想、拟协调元的例子、拟协调元的收敛条件和先后验误差估计.

第 8 章介绍非传统有限元方法, 包括自由格式和能量正交等方法及其收敛性分析和先后验误差估计.

第 9 章介绍双参数方法, 一些非标准有限元可以用双参数方法进行统一讨论, 如广义协调元方法. 前两节介绍双参数法的构造方法、良定条件和收敛性质; 接着

两节介绍双参数法在非标准有限元分析中的应用和一些用双参数法构造的有限元; 最后介绍后验误差估计.

第 10 章考虑非标准有限元空间的性质, 这些性质类似于 Sobolev 空间的性质, 如嵌入性质和紧致性质. 另外, 还介绍有限元空间上的若干不等式, 如广义 Poincare-Friedrichs 不等式、Korn 不等式等.

最后两章分别讨论二维 Poisson 方程和薄板弯曲问题的有限元方法的 L^∞ 误差估计, 涉及的有限元包括协调元和非标准有限元.

关于有限元方法及其数学理论的文献浩瀚如海, 本书所列的参考文献只是其中极少的一部分, 这些文献或是本书内容的取材来源或是写作过程中参考过的.

本书的写作是在科学出版社林鹏先生的提议下进行的, 本书的初稿完成于 1996 年 6 月. 在初稿的基础上, 作者添加了一些新的内容形成了本书. 本书的第二作者曾在北京大学数学科学学院研究生课程“有限元方法 II”上讲授过本书前 6 章的内容. 在本书的初稿写作期间, 第二作者在香港裘槎基金会的资助下, 在香港理工大学应用数学系做访问学者. 作者感谢林鹏先生, 感谢香港裘槎基金会, 感谢香港理工大学当时的同事, 尤其是侯瑞鸿教授、石济民教授、林振宝教授和林兆玉女士. 作者感谢北京大学数学科学学院计算数学专业阅读过本书书稿, 并提出宝贵意见的研究生们, 尤其是高博然同学.

作　者

2009 年 3 月于北京

《信息与计算科学丛书》已出版书目

1 样条函数方法 1979.6 李岳生 齐东旭 著
2 高维数值积分 1980.3 徐利治 周蕴时 著
3 快速数论变换 1980.10 孙 琦等 著
4 线性规划计算方法 1981.10 赵凤治 编著
5 样条函数与计算几何 1982.12 孙家昶 著
6 无约束最优化计算方法 1982.12 邓乃扬等 著
7 解数学物理问题的异步并行算法 1985.9 康立山等 著
8 矩阵扰动分析 1987.2 孙继广 著
9 非线性方程组的数值解法 1987.7 李庆扬等 著
10 二维非定常流体力学数值方法 1987.10 李德元等 著
11 刚性常微分方程初值问题的数值解法 1987.11 费景高等 著
12 多元函数逼近 1988.6 王仁宏等 著
13 代数方程组和计算复杂性理论 1989.5 徐森林等 著
14 一维非定常流体力学 1990.8 周毓麟 著
15 椭圆边值问题的边界元分析 1991.5 祝家麟 著
16 约束最优化方法 1991.8 赵凤治等 著
17 双曲型守恒律方程及其差分方法 1991.11 应隆安等 著
18 线性代数方程组的迭代解法 1991.12 胡家赣 著
19 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术 1992.5 吕 涛等 著
20 软件工程方法 1992.8 崔俊芝等 著
21 有限元结构分析并行计算 1994.4 周树荃等 著
22 非数值并行算法(第一册)模拟退火算法 1994.4 康立山等 著
23 矩阵与算子广义逆 1994.6 王国荣 著
24 偏微分方程并行有限差分方法 1994.9 张宝琳等 著
25 非数值并行算法(第二册)遗传算法 1995.1 刘 勇等 著
26 准确计算方法 1996.3 邓健新 著
27 最优化理论与方法 1997.1 袁亚湘 孙文瑜 著
28 黏性流体的混合有限分析解法 2000.1 李 炜 著
29 线性规划 2002.6 张建中等 著
30 反问题的数值解法 2003.9 肖庭延等 著
31 有理函数逼近及其应用 2004.1 王仁宏等 著
32 小波分析·应用算法 2004.5 徐 晨等 著
33 非线性微分方程多解计算的搜索延拓法 2005.7 陈传淼 谢资清 著
34 边值问题的Galerkin有限元法 2005.8 李荣华 著
35 Numerical Linear Algebra and Its Applications 2005.8 Xiao-qing Jin, Yi-min Wei
36 不适定问题的正则化方法及应用 2005.9 刘继军 著

37 Developments and Applications of Block Toeplitz Iterative Solvers 2006.3 Xiao-qing Jin
38 非线性分歧：理论和计算 2007.1 杨忠华 著
39 科学计算概论 2007.3 陈传淼 著
40 Superconvergence Analysis and a Posteriori Error Estimation in Finite Element Methods 2008.3 Ningning Yan
41 Adaptive Finite Element Methods for Optimal Control Governed by PDEs 2008.6 Wenbin Liu Ningning Yan
42 计算几何中的几何偏微分方程方法 2008.10 徐国良 著
43 矩阵计算 2008.10 蒋尔雄 著
44 边界元分析 2009.10 祝家麟 袁政强 著
45 大气海洋中的偏微分方程组与波动学引论 2009.10 〔美〕 Andrew Majda 著
46 有限元方法 2010.1 石钟慈 王 鸣 著

目　录

第 1 章　变 分 原 理

有限元方法是以偏微分方程的变分形式为基础的, 冯康最早关于有限元的工作 [1] 的论文题目就是“基于变分原理的差分格式”. 对于偏微分方程对应的变分问题, 有经典的 Ritz 和 Galerkin 近似求解方法. 在 Ritz 法或者 Galerkin 法中, 取有限维空间为有限元空间就得到了有限元方法. 介绍有限元的数学理论, 需要 Sobolev 空间的一些内容作为预备知识, 为此, 1.1 节将不加证明地给出 Sobolev 空间的基本结果, 1.2 节和 1.3 节分别介绍 Poisson 方程和重调和方程边值问题的变分形式, 1.4 节介绍抽象变分问题的 Lax-Milgram 引理, 最后一节介绍 Galerkin 方法和 Ritz 方法.

本章 1.1 节的内容取自于 Adams 的著作 [2], 1.2 节和 1.3 节的内容取自于文献 [3], 最后两节的内容, 除了定理 1.5.2 之外, 均取自于 Ciarlet 的著作 [4].

1.1　Sobolev 空间

记 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界连通区域, 记其边界为 $\partial\Omega$. 当 m 表示非负整数或 ∞ 时, 用 $C^m(\Omega)$ 表示 Ω 上所有 m 次连续可微的函数构成的集合, 用 $C^m(\overline{\Omega})$ 表示 $\overline{\Omega}$ 上所有 m 次连续可微的函数构成的集合. 用 $C_0^m(\Omega)$ 表示 $C^m(\Omega)$ 中所有这样的函数构成集合, 这些函数的紧支集包含在 Ω 内. 当 $m=0$ 时, $C^0(\Omega), C^0(\overline{\Omega})$ 和 $C_0^0(\Omega)$ 可以略去上标, 分别记为 $C(\Omega), C(\overline{\Omega})$ 和 $C_0(\Omega)$.

称分量均为非负整数的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标, 记 $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 利用多重指标, 偏导数算子可以记为

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

记梯度算子为

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}.$$

当 m 为非负整数时, 对于线性空间 $C^m(\overline{\Omega})$, 赋予它如下范数:

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})}=\max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\max_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}}|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}v(\boldsymbol{x})|,\quad \forall v\in C^m(\overline{\Omega}),$$

它就是一个 Banach 空间.

定义 Sobolev 空间需要广义导数的概念. 对于 Ω 上局部 Lebesgue 可积函数 u, 如果存在另一个 Ω 上的局部 Lebesgue 可积函数 v 满足

$$\int_\Omega v\phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega u \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 v 是 u 的一个广义导数, 记为 $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u$. 显然, 广义导数是古典导数的推广.

对于非负整数 m 和实数 $\varrho \in [1, \infty]$, 定义

$$W^{m,\varrho}(\Omega) = \{ \, u \in L^\varrho(\Omega) \mid \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^\varrho(\Omega), \ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m \, \}.$$

在 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 上定义 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{m,\varrho,\Omega}$ 如下:

对 $u \in W^{m,\varrho}(\Omega)$,

$$\|u\|_{m,\varrho,\Omega} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \int_\Omega |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u|^\varrho \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/\varrho}, \quad 1 \leqslant \varrho < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \operatorname*{esssup}_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x})|,$$

则 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间, 称 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 为 Sobolev 空间. 当 $\varrho = 2$ 时, 记 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 为 $H^m(\Omega)$, 相应的范数为 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$, $H^m(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间. 在 Sobolev 空间的理论中有下述基本结果:

定理 1.1.1 *如果区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 并且 $1 \leqslant \varrho < \infty$, 则 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 中稠密.*

记 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,\varrho,\Omega}$ 下的完备化空间为 $W_0^{m,\varrho}(\Omega)$, 则 $W_0^{m,\varrho}(\Omega)$ 也是一个 Banach 空间. 当 $\varrho = 2$ 时, 它是一个 Hilbert 空间, 记为 $H_0^m(\Omega)$. 定义负数阶 Sobolev 空间$H^{-m}(\Omega)$ 为 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间, 其范数 $\|\cdot\|_{-m,\Omega}$ 如下定义:

对于 $v \in H^{-m}(\Omega)$,

$$\|v\|_{-m,\Omega} = \sup_{u \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|_{m,\Omega}},$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $H^{-m}(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 之间的对偶对. 当 $v \in L^2(\Omega)$ 时,

$$\langle v, u \rangle = (v, u),$$

其中, $(\cdot, \cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的内积.

在 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 上定义 Sobolev 半范如下:

对 $u \in W^{m,\varrho}(\Omega)$,

$$|u|_{m,\varrho,\Omega}=\left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\int_{\Omega}|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}u|^{\varrho}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/\varrho},\quad 1\leqslant\varrho<\infty,$$

$$|u|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\operatorname*{esssup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega}|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})|.$$

恒等算子 $Iu=u$ 明显是从 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 到 $L^{\varrho}(\Omega)$ 的连续算子, 这种嵌入关系记作

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to L^{\varrho}(\Omega).$$

这时, 称恒等算子为嵌入算子. 下面是 Sobolev 空间的嵌入定理.

定理 1.1.2 设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 并且 $1\leqslant\varrho\leqslant\infty$. 如果 $m\geqslant k+1$, 则当 $m<k+\dfrac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to W^{k,\mu}(\Omega),\quad 1\leqslant\mu\leqslant\frac{n\varrho}{n-(m-k)\varrho};$$

当 $m=k+\dfrac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to W^{k,\mu}(\Omega),\quad 1\leqslant\mu<\infty;$$

当 $m>k+\frac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to C^{k}(\overline{\Omega}).$$

定理 1.1.3 设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 并且 $1\leqslant\varrho\leqslant\infty$. 如果 $m\geqslant k+1$, 则描述下面嵌入关系的嵌入算子是紧的:

当 $m<k+\dfrac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to W^{k,\mu}(\Omega),\quad 1\leqslant\mu<\frac{n\varrho}{n-(m-k)\varrho};$$

当 $m=k+\dfrac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to W^{k,\mu}(\Omega),\quad 1\leqslant\mu<\infty;$$

当 $m>k+\dfrac{n}{\varrho}$ 时,

$$W^{m,\varrho}(\Omega)\to C^{k}(\overline{\Omega}).$$

因为 $\partial\Omega$ 的 n 维测度是零, 所以当 $u\in L^{\varrho}(\Omega)$ 时, u 在 $\partial\Omega$ 上的值是无意义的. 但是, 从定理 1.1.2 可知当 $m>\dfrac{n}{\varrho}$ 时, $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 可以嵌入到 $C(\overline{\Omega})$, 因而, 把