数学

2

全国建材中等专业学校新编数学教材

主编
王德安

全国建材中等专业学校新编数学教材

数　　学

（二）

主　编　王德安
副主编　张思民

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学(二)/王德安主编．—武汉:武汉工业大学出版社,1998.12
ISBN 7-5629-1416-8

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.数学-专业学校-教材 Ⅳ.O1-43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 03441 号

武汉工业大学出版社出版发行
(武汉市洪山区珞狮路 122 号 邮编 430070)
各地新华书店经销
武汉工业大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:7 字数:175 千字
1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷
印数:1～10000 册 定价:7.00 元

前　言

为了适应职业教育发展的需要，进一步深化中等职业教育教学改革，加强课程、教材建设，全国建材中专教学指导委员会于 1997 年 11 月在北京召开了全国建材中专数学教学研讨会，会议针对当前中等专业学校数学教学的现状，进行了充分的研讨，认为现行中专数学教材急需改革，以满足中等职业学校数学教学的需要，因此决定组建全国建材中专数学教材编委会，组织编写全国建材中专数学教材.

本套教材的主要编写特点是：(1)降低了部分数学教学内容的理论要求；(2)强调素质教育，注重体现以初等数学为基础，以高等数学为工具的编写思想；(3)注意了与国家教委制定的九年义务教育全日制初中数学教学内容的衔接；(4)优化体系，精简了传统中专数学教学内容中用处不大的内容，增加了部分适合建材中专的教学内容；(5)联系实际，加强了应用性.

本套教材的主编是北京建筑材料工业学校的高级讲师张进军，长春建材工业学校的高级讲师齐方任顾问. 教材分三册出版，第一册主要内容为代数、三角、几何；第二册主要内容为一元微积分；第三册主要内容为排列、组合、概率与统计、行列式与矩阵、级数与拉氏变换、优选法和正交设计. 带 * 号的内容供有关专业选学. 另外，每册教材都配有习题册，以供学生练习使用.

本书为第二册，主编是王德安(四川建筑材料工业学校)，副主编是张思民(山西建材学校). 参加本册编写的还有周素琴(上海建材学校)、杨永生(广西建材学校). 本册由福建建材学校黄兆平担任主审.

由于编者水平有限，编写时间仓促，教材中难免有缺点与错误，诚请使用该套教材的教师和学生提出宝贵意见，给予批评指正.

编委会

1998 年 9 月

目　　录

7 数　列

本章主要介绍数列的概念,并讨论两类特殊的数列——等差数列和等比数列的有关计算和应用.

7.1　数列的概念

先观察下面的例子.

例 1　把一批钢管堆成图 7.1 的形状,从最上面的一层起,各层钢管的根数依次为:

$$4,5,6,7,8,9,10. \qquad (1)$$

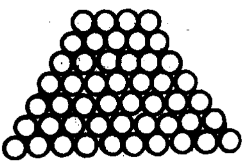

图 7.1

例 2　在我国战国时期,《庄子·天下篇》中有"一尺之棰,日取其半,万世不竭"之说,其意思是:一尺长的木杆,第一天取其一半,第二天再取第一天所留下杆长的一半,第三天再取第二天留下的杆长的一半,依次类推,永远不能取完.按此方法,我们将每天所取的木杆长度排列起来,就是

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots \qquad (2)$$

对于以上两例,它们都是按照一定的顺序排列起来的一串数,并且,它们和序号有某种对应关系:

对于(1)式:

序号	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
对应数值	4	5	6	7	8	9	10

对于(2)式:

序号	1	2	3	4	…	n	…
	↓	↓	↓	↓		↓	
对应数值	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

定义 以自然数 n 为自变量的函数 $f(n)$，按自然数顺序排列出来的函数值的集合叫做**数列**.

数列中的每一个数值叫做这个数列的一个**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，…. 通常我们用带下标的字母表示数列的项，数列的一般形式可以写成：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项. 如果数列的第 n 项 a_n 和项数 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示时，即 $a_n = f(n)$，则这个公式就叫做数列的**通项公式**.

例如，数列(1)的通项公式是 $a_n = n + 3$；

数列(2)的通项公式是 $a_n = \frac{1}{2^n}$.

如果一个数列的项数是有限的，那么这个数列叫做**有穷数列**，否则这个数列叫做**无穷数列**. 如例 1 中的数列是有穷数列，例 2 中的数列是无穷数列.

如果一个数列中的每一项都小于它的后一项，即 $a_n < a_{n+1}$，那么这个数列叫做**递增数列**；如果一个数列的每一项都大于它的后一项，即 $a_n > a_{n+1}$，那么这个数列叫做**递减数列**. 如例 1 中的数列是递增数列，例 2 中的数列是递减数列.

如果一个数列中的各项都相等，那么这个数列叫做**常数列**.

例 3 函数 $f(n) = \frac{1}{n}$，当自变量 n 取自然数 1，2，3，…时，所得函数值的全体组成一个数列，它们的各项为：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \qquad (3)$$

其通项公式为：$a_n = \frac{1}{n}$.

例 4 -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…排列成一数列：

$$-1,1,-1,1,-1,\cdots \tag{4}$$

其通项公式为：$a_n=(-1)^n$.

但不是每一数列都能写出通项公式，而只能用一种规律来表示．例如 $\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots$$

所构成的数列，就写不出它的通项公式．

例 5 根据数列的通项公式，写出它的前 5 项及第 50 项：

(1) $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}$； (2) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$.

解：(1)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$ 和 50，得到

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5} \text{ 和 } \frac{1}{50}.$$

(2)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$ 和 50，得到

$$0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3} \text{ 及 } \frac{49}{51}.$$

例 6 已知以下数列，求其通项公式：

(1) $2,4,6,8,10,\cdots$；

(2) $1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{9},\cdots$；

(3) $1-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5},\cdots$；

(4) $\dfrac{2^2-1}{2},\dfrac{3^2-1}{3},\dfrac{4^2-1}{4},\dfrac{5^2-1}{5},\cdots$.

解：(1)数列的前 5 项 2，4，6，8，10 都是序号的 2 倍，所以通项公式是

$$a_n=2n.$$

(2)数列的前 5 项其分母都是序号的 2 倍减 1，而且奇数项为正，偶数项为负，所以它的通项公式为

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

(3)数列的各项为二数之差，且前项(被减数)为序号的倒数，后项(减数)为序号加 1 的倒数，所以它的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

(4)数列的各项都是分母为序号加上 1，分子都是分母的平方减去 1，所以它的通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}.$$

习题 7.1

1. 根据下列各数列的通项公式，写出它的前 5 项和第 20 项：

(1) $a_n=4+\frac{n}{2}$；

(2) $a_n=\frac{n}{2n+1}$；

(3) $a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2n+1}$；

(4) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n(n+2)}{n+1}$.

2. 写出下列各数列的通项公式：

(1) $1,3,5,7,\cdots$；

(2) $15,25,35,45,\cdots$；

(3) $-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$；

(4) $\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{13}{2},\frac{17}{2},\cdots$.

3. 写出下面数列的前 5 项：

(1) $a_1=3,a_{n+1}=a_n+2$；

(2) $a_1=1,a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$；

(3) $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

4. 已知数列 $f(n)=n(n+1)$，问下列各数是不是这个数列的项，如果是的话，是第几项？

(1) 49；(2) 56；(3) 80；(4) 90.

7.2 等差数列

7.2.1 等差数列的定义

在上一节我们列举了钢管堆放的例子，自上而下各层钢管的根数为：

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

再看下面的数列：

$$3,6,9,12,15,\cdots \tag{2}$$

$$1,0,-1,-2,-3,\cdots \tag{3}$$

$$3,3,3,3,3,3,\cdots \tag{4}$$

我们容易发现：

对于数列(1)，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 1；

对于数列(2)，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 3；

对于数列(3)，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 -1；

对于数列(4)，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 0.

这些数列的共同特点为：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一常数．对于这类数列，有如下定义：

定义 如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，这个数列叫做**等差数列**．这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示．

前面所列举的数列都是等差数列，在数列(1)中，公差 $d=1$；在数列(2)中，公差 $d=3$；在数列(3)中，公差 $d=-1$；在数列(4)中，公差 $d=0$.

在等差数列中，若公差 $d>0$，数列是递增的，如数列(1)、(2)；若公差 $d=0$，则数列为常数列，如数列(4)；若公差 $d<0$，则数列是递减的，如数列(3).

7.2.2 等差数列的通项公式

对于等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$,公差为 d,那么根据等差数列的定义得到

$$a_2-a_1=d,$$
$$a_3-a_2=d,$$
$$a_4-a_3=d,$$
$$\cdots$$

所以 $a_2=a_1+d,$

$a_3=a_2+d=a_1+2d,$

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$

$\cdots$

由此可得

$$a_n=a_1+(n-1)d \tag{7.1}$$

上式称为等差数列的通项公式.在该公式中,共有 a_1,a_n,n,d 四个量,如果知道其中任何三个量,就可以求出另外一个量.

例 1 求等差数列 5,3,1,−1,−3,…的第 10 项.

解:因为 $a_1=5,d=3-5=-2,n=10$. 代入等差数列通项公式

所以 $a_{10}=5+(10-1)\times(-2)=-13.$

例 2 已知等差数列首项和公差都是 3,其第几项是 36?

解:因为 $a_1=3,d=3,a_n=36$,

代入等差数列通项公式,得

$$36=3+(n-1)\times 3,$$

所以 $n-1=11,$

即 $n=12.$

因此,该数列的第 12 项为 36.

例 3 已知等差数列的第 2 项是−2,第 4 项是 2,求它的第 12 项.

解：设该数列的首项为 a_1，公差为 d，按题意已知 $a_2=-2$，$a_4=2$，可列出方程组

$$\begin{cases} a_1+(2-1)d=-2, \\ a_1+(4-1)d=2. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_1+d=-2, \\ a_1+3d=2. \end{cases}$$

解得

$$a_1=-4, d=2.$$

所以

$$a_{12}=a_1+(12-1)d=-4+22=18.$$

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**．

根据等差数列的定义，有

$$A-a=b-A$$

即

$$A=\frac{a+b}{2} \tag{7.2}$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项．

例 4 求 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ 与 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 的等差中项．

解：$A=\dfrac{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7.2.3 等差数列前 n 项和的公式

我们通过一个例子，来说明求等差数列前 n 项和的方法．

为了求图 7.1 所示钢管的总数，也就是要算出

$$4+5+6+7+8+9+10$$

的值，当然依次相加可以算出它的结果，但是如果层数很多，这样求和就很麻烦．我们可以设想如图 7.2，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管．这样，每层的钢管数都相等，

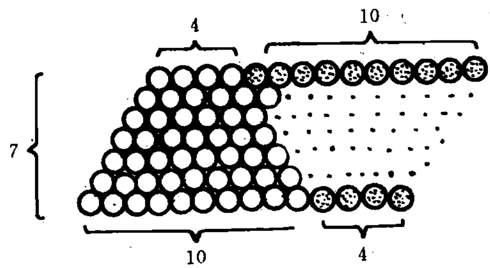

图 7.2

即 $$4+10=5+9=\cdots=10+4.$$

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是 $(4+10)\times7$，因此这堆钢管的总数是

$$\frac{(4+10)\times7}{2}=49.$$

一般地，设等差数列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \tag{1}$$

把(1)式的各项次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1 \tag{2}$$

把(1)式，(2)式的两边分别相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

上式每个括号内都是与首末两项等距离的两项的和，因此它们都等于首末两项的和 (a_1+a_n)。

于是 $$2S_n=n(a_1+a_n).$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \tag{7.3}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上式又可写成

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

例 5 (1)已知等差数列 $a_1=-2,a_9=12$，求 S_9.