

王良驥編譯

三角難題詳解

北平甲戌學社出版

王良驥編譯

三角難題詳解

甲戌學社出版

北京大學承印

一九三四年三月出版

此書有著作權翻印必究

三角難題詳解

精裝
平裝

每冊實價大洋

貳元伍角
壹元捌角

(外埠函購另加郵費)

編譯者
出版兼發行者
印刷所
總發行所

閩侯王良驥
甲戌學社
北京大學出版部
大學出版社
景山西大石作廿八號

寄售處

上海山海關路仁濟里四十號
南京下關永寧街升雲里
南京城內太平路
天津法租界天祥市場前門道
北平宣武門外後河沿
王府井大街
北平西單商場
和平門外南華街
東安市場

機杼出版社
東南養蜂場
中國書局
萃文魁紙墨莊
著者書店
立達書局
大學出版社營業部
星雲堂書店
各大書店

(各省市各大書店均有代售)

編輯大意

編者因感國內數學界，素乏良善之參考書，以致學者對於數學公式之應用，及問題之演算，皆苦索解之莫從！故於一九三二年夏，即從事編譯本書，嗣因課務冗忙，曾擱置年餘之久，未能繼續進行；直至客冬，復因社友之催促與各校同學之要求，方拾暇以寒假一月之時間，將後八章譯竟，即在北京大學出版部付印；蓋取其近便而清楚也。

本書係以法國近代著名數學家范爾華(Henri Ferval)及其助教余樂德(J. Hulot)二氏合著之三角題解為藍本：因其編輯合理，演算說明，皆極詳盡；且將三角學中之各主要公式，以分章方法，應用完畢，而每章之集題，皆由淺入深，故升學自修者，在細讀本書一遍之後，對於各種三角公式之應用，與難題之解法，皆可有所適從矣。

又，本書第二章三角綫函數，第五章三角線導來式，第八章三角方程式及第十一章任意三角形的解法等四章，皆為他書所缺少或不詳者；而本書則為多設題目，詳加解釋，以資學者對此四種之三角主要概念，得有正確而諳熟之練習也。

綜上各優點，足見原著能於出版後，不數年內，行銷十餘版之多，而譽滿歐陸者，厥有由焉。

編者對於原著除刪去不重要之部份外，更在書後加二附錄：（1）以供學者便於檢查三角公式，（2）以供學者自測三角之學力，兼備升學者之參攷。

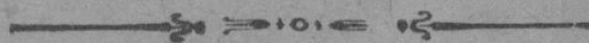
本書凡經數次讎校，而錯誤及印刷小疵，仍未全免，皆另作正誤表以正之，希讀者參閱而較正爲荷。

至於譯筆，自覺粗陋，深恐意難信達，尙希讀者諒而教之，俾成一部可讀之書，則幸甚矣。

本書承社友金華岳君及友人朱惺忪，蔣劍侯兩君，暨家兄王良駿，王揚瀾兩君，多方贊助，代爲修正；又蒙李續祖先生代爲經理初版印刷，均編者所深感；而友人張光瑋君代爲介紹之封面，因尺寸關係，一時未能應用，故特於此歉意中深致謝忱焉。

民國二十三年三月二十九日

王良驥謹誌於甲戌學社編輯部



三角難題詳解

目 錄

(附 120 個圖解)

第一章	弧角概論——弧和角	1—15
第二章	同弧各三角綫	16—78
第三章	投影定理—弧的加法—弧的乘法	79—143
第四章	公式的變化法，——對數	144—250
第五章	三角綫的導來式	251—292
第六章	直角三角形	293—352
第七章	弧的除法	353—396
第八章	三角方程式	397—543
第九章	三角形的六要件之各關係式	544—588
第十章	三角形的四個模範場合之解法	589—626
第十一章	任意三角形的解法	627—720
第十二章	平面測量法	721—749
附錄(1)	本書各章所用之主要公式表	750—756
附錄(2)	國立各大學三角法入學試題 (1930—1933)	757—762

三角難題詳解

第一章

弧角概論，弧和角。

1. 求將以等於半徑之單位弧測得之各弧如：

$$\frac{3\pi}{7}; \frac{15\pi}{8}; \frac{51\pi}{9}. \quad 1; \frac{3}{2}; \sqrt{3}.$$

1° 化爲六十分度法的度數，2° 化爲百分度法的度數。

第 [解] 1°. 設 A 爲在以同半徑等長之弧爲單位時所測之
角 某一弧之值，而 B 爲同一弧以六十分度法所測之值，則有：

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{B}{360}$$

由是

$$B = \frac{360}{2\pi} \cdot A.$$

第 應用此式於所與之各弧，則連有下式：

$$\frac{360}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{7} = 180 \cdot \frac{3}{7} = 77^{\circ} 8' 34'' \frac{2}{7};$$

$$\frac{360}{2\pi} \cdot \frac{15\pi}{8} = 180 \cdot \frac{15}{8} = 45 \cdot \frac{15}{2} = 337^{\circ} 30';$$

$$\frac{360}{2\pi} \cdot \frac{51\pi}{9} = 180 \cdot \frac{51}{9} = 20 \cdot 51 = 1020^\circ;$$

$$\frac{360}{2\pi} \cdot 1 = 180 \cdot \frac{1}{\pi} = 180 \cdot 0,3183098$$

$$= 57^\circ, 295764$$

$$= 57^\circ 17', 745$$

$$= 57^\circ 17' 44'', 7;$$

$$\frac{360}{2\pi} \cdot \frac{3}{2} = 90 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\pi} = 270 \cdot 0,3183098$$

$$= 85^\circ 56' 37'', 125;$$

$$\frac{360}{2\pi} \cdot \sqrt{3} = 180 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 1,732$$

$$= 180 \cdot 0,31830 \cdot 1,732$$

$$= 99^\circ 14' 10'', 14.$$

2° 設 C 爲測某一弧以百分法之值, 而 A 則爲測該弧以等於半徑之單位弧之值, 則有:

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{C}{400}$$

由是

$$C = \frac{400}{2\pi} \cdot A = \frac{200}{\pi} \cdot A;$$

界與 A 以所與之值, 則連有下式:

$$\frac{200}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{7} = 200 \cdot \frac{3}{7} = 85^G, 714;$$

$$\frac{200}{\pi} \cdot \frac{15\pi}{7} = 100 \cdot \frac{15}{4} = 25 \cdot 15 = 375^G;$$

$$\frac{200}{\pi} \cdot \frac{51\pi}{9} = 200 \cdot \frac{51}{9} = 1133^G, 33;$$

$$\frac{200}{\pi} \cdot 1 = 200 \cdot 0,31830 = 63^G, 662;$$

$$\frac{200}{\pi} \cdot \frac{3}{2} = 300 \cdot 0,3183 = 95^G, 49;$$

$$\frac{200}{\pi} \cdot \sqrt{3} = 200 \cdot 0,3183 \cdot 1,732 = 110^G, 262.$$

2. 求將下列各弧，變為以等於半徑之單位弧估計之值：

$$45^\circ; \quad 59^\circ 25'; \quad 320^\circ 18' 15'';$$

$$340^G, 1815; \quad 153^G, 2451; \quad 809^G, 27.$$

〔解〕 設 A, B, C 互為等於半徑之單位弧，六十分度法，或百度法測得同一弧之值。因有關係式：

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{B}{360} = \frac{C}{400}.$$

對於以六十分度法測得之前三弧，可用前一關係式：

$$A = \frac{2\pi}{360} \cdot B = \frac{\pi}{180} \cdot B$$

連有：

$$B = 45^\circ \quad A = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4};$$

$$B=59^{\circ}25' \quad A=\frac{\pi}{180 \cdot 60}(59 \cdot 60+25)$$

$$=\frac{\pi \cdot 3565}{180 \cdot 60}=\frac{713\pi}{2160};$$

$$B=320^{\circ}18'15'' \quad A=\frac{\pi \cdot 1153095}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$=1153095''$$

$$=\frac{76873\pi}{4320}.$$

對於其餘各弧，可用後一關係式：

$$A=\frac{2\pi}{400} \cdot C=\frac{\pi}{200} \cdot C;$$

故有：

$$C=340^{\circ}, 1815 \quad A=\frac{\pi}{200} \cdot 340,1815=1,7009075\pi;$$

$$C=153^{\circ}, 2451 \quad A=\frac{\pi}{200} \cdot 153,2451=0,7662255\pi;$$

$$C=809^{\circ}, 27 \quad A=\frac{\pi}{200} \cdot 809,27=4,04635\pi.$$

3. 求將下列表以六十分度法之度，分，秒之各弧變為表以百分度法之度，分，秒：

$$210^{\circ}41'8''; \quad 300^{\circ}4'35''; \quad 459^{\circ}15'10''.$$

〔解〕設 A, B 為六十分度法或百分度法測得同一弧之值，因有關係式：

$$\frac{B}{360} = \frac{C}{400}$$

由此 $C = \frac{400}{360} \cdot B = \frac{10}{9} B.$

如 B 爲度, 分, 秒, 應將其全部變爲秒, 則有:

$$\frac{B}{360 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{C}{400}$$

由此 $C = \frac{400 B}{360 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{B}{3240}.$

故有:

$$\begin{aligned} B &= 210^\circ 41' 8'' \\ &= 758465'' \end{aligned} \quad C = \frac{758465}{3240} = 234^G, 09;$$

$$\begin{aligned} B &= 300^\circ 4' 35'' \\ &= 1080275'' \end{aligned} \quad C = \frac{1080275}{3240} = 333^G, 28;$$

$$\begin{aligned} B &= 459^\circ 15' 10'' \\ &= 1653310'' \end{aligned} \quad C = \frac{1653310}{3240} = 510^G, 28.$$

4. 求將下列表以百分度法之度, 分, 秒之各弧變爲表以六十分度法之度, 分, 秒:

$$360^G, 21; \quad 650^G, 022; \quad 897^G, 0392.$$

〔解〕 由關係式:

$$\frac{B}{360} = \frac{C}{400}$$

設 A, B 爲六十分度法及百分度法測得同一弧之值, 則有:

$$B = \frac{360}{400} \cdot C = \frac{9}{10}C$$

故有：

$$C = 360^{\circ},21 \quad B = \frac{9}{10}360,21 = 324^{\circ},189$$

$$= 324^{\circ}11'20'',4;$$

$$C = 650^{\circ},022 \quad B = 585^{\circ},0198 = 585^{\circ}1'11'',28;$$

$$C = 897^{\circ},0392 \quad B = 807^{\circ},33528 = 807^{\circ}20'7''.$$

5. 在半徑爲 $2^m,5$ 之圓周上，求計 $286^{\circ}14'51''$ 及 $3^{\circ},2217$ 二弧之長度。

〔解〕 設 A 爲等於半徑之單位弧測得一弧之值則此弧之長度爲 $A.R$ ，設半徑之長爲 R 。

以等於半徑之單位弧估計 $286^{\circ}14'51''$ 之弧，則有：

$$286^{\circ}14'51'' = 1030491''$$

及

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{1030491}{360 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$A = \pi \cdot \frac{1030491}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$= \pi \cdot \frac{114499}{20 \cdot 60 \cdot 60}.$$

在半徑爲 $2^m,5$ 之圓內，該弧之長爲：

$$\frac{\pi \cdot 114499 \cdot 2,5}{20 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$= \frac{\pi \cdot 114499}{8 \cdot 60 \cdot 60} \text{公尺.}$$

對於 $3^{\circ} 22' 17''$ 弧, 則有:

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{3,2217}{400},$$

由是

$$A = \frac{2\pi \times 3,2217}{400} = \frac{\pi \times 3,2217}{200}$$

在半徑為 $2^m, 5$ 之圓上, 其長度為:

$$\frac{\pi \times 3,2217 \times 2,5}{200} = \frac{\pi \times 3,2217}{80} \text{公尺.}$$

6. 一個 $25^{\circ} 24'$ 弧具有 16 公尺之長度; 求計其半徑之長度, 並求其精確性達至千分之一者, 究為何值?

〔解〕 設 A 為用等於半徑之單位弧所測得某一弧之值; 則有:

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{25 \times 60 + 24}{360 \times 60}$$

由是

$$A = \frac{2\pi \cdot 1524}{360 \cdot 60}.$$

如 R 為半徑, 弧之長度為 $A \cdot R$, 且有:

$$A \cdot R = 16,$$

故推得:

$$R = \frac{16}{A} = \frac{16 \cdot 360 \cdot 60}{2\pi \cdot 1524}$$

$$= \frac{2 \cdot 120 \cdot 60}{\pi \cdot 127}$$

$$= 36^m, 091.$$

7. 二弧之和爲 17° 而其差爲 17^G , 求該二弧之值.

〔解〕 以百分度法估計之, 則有:

$$17^\circ = \frac{400 \times 17}{360} \text{grades}$$

$$= \frac{10 \cdot 17}{9} \text{grades},$$

如表該二弧以 x 及 y , 則有:

$$y + x = \frac{10 \cdot 17}{9}$$

$$x - y = 17$$

先加後減:

$$2x = \frac{10 \cdot 17}{9} + 17$$

$$2y = \frac{10 \cdot 17}{9} - 17$$

次有:

$$x = \frac{19 \cdot 17}{18}$$

$$y = \frac{17}{18}$$

此二弧, 如以六十分度法計之, 則互爲:

$$\frac{19.17}{18} \cdot \frac{9}{10} = 16^{\circ}9'$$

及

$$\frac{17.9}{18} \cdot \frac{9}{10} = 0^{\circ}51'.$$

8. 求作一角，已知其以六十分度法所測得之值與其以百分度法所測得之值之倒數差等於以半徑之單位弧測得之量除以 2π .

〔解〕 設 A 為以等於半徑之單位弧測得所求弧之量， B 為六十分度法測得該弧之量，而 C 則為同一弧以百分度法測得之量，故應有：

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \frac{A}{2\pi};$$

此外有關係式：

$$\frac{A}{2\pi} = \frac{B}{360} = \frac{C}{400}.$$

由後二式求出 B 及 C ，代入前一式，則有：

$$\frac{2\pi}{360A} - \frac{2\pi}{400A} = \frac{A}{2\pi}$$

由此

$$\frac{A^2}{4\pi^2} = \frac{4}{400 \cdot 36}$$

及

$$A = \frac{\pi}{30}$$

由此

$$B = 6^{\circ}$$

$$C = 6^{\circ}66'.$$

9. 已與 $\widehat{AM}$ 弧，其原點為 A ，終點為 M ，求証凡以 A 為原點之 $\frac{\widehat{AM}}{4}$ 弧，皆以一個正方形之各頂點為終點。

〔解〕 根據『同一原點之二箇三角弧，具有同一終點之必要與滿足條件，乃為其相互間之差，只為其圓周之正，負或零的整倍數』之定理，故知 $\widehat{AM}$ 各弧之量法，乃用下式：

$$a + 2k\pi$$

k 為一整數，或正，或負，或零，而 a 為測幾何弧 (圖 1) 之

算術量，由此得到 $\frac{\widehat{AM}}{4}$ 弧之量法，乃用

下式：

$$\frac{a}{4} + \frac{2k\pi}{4} = \frac{a}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

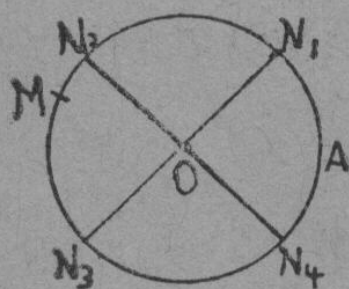


圖 1

作此各弧，可先由 A 點出發，

取得 $\frac{a}{4}$ 之 $\widehat{AN_1}$ 弧，次由 N_1 點出發，取得 $k\frac{\pi}{2}$ 之各弧。當昇與 k 以 1, 2, 3 各值，則有終點 N_2, N_3, N_4 ；當 $k=4$ ，則復得 N_1 點，由此易見，無論昇與 k 以何值，皆得到已知四點之一，此四點乃為一正方形之四頂點，因既有等於 $\frac{\pi}{2}$ 之 $N_1 N_2, N_2 N_3, N_3 N_4$ ，及 $N_4 N_1$ 各弧相等之故。

10. 在三角圓上如何位置具有同一原點之各弧之終點已知其長度如下：

$$a, \quad a + \frac{\pi}{3}, \quad a + \frac{2\pi}{3}.$$

[解] 在 O 圓上(圖2), 自原點 A 出發取得等於 α 之 $\widehat{AM}$ 弧, 次以 A 為原點作 $\alpha + \frac{\pi}{3}$ 弧, 可先由 A 點出發取得 $\widehat{AM}$ 弧, 再由 M 點出發取得等於 $+\frac{\pi}{3}$ 之 $\widehat{MN}$ 弧; 同法

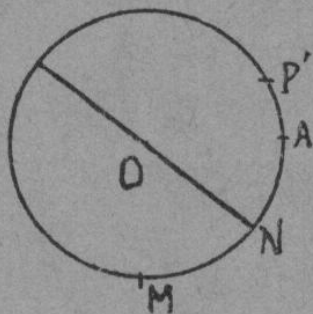


圖 2.

可作 $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ 弧, 亦可由 A 點出發, 先取得 α 弧, 則得一點 M .

再由 M 點出發取得 $\frac{2\pi}{3}$ 弧, 於是得一點 P , 該點乃以 N 點之半徑與 M 點成對稱.

11. 設在三角圓上, 已與四點 A, B, M, C , 而 M 為 $\widehat{BC}$ 弧之中點, 求証在 $\widehat{AM}$, $\widehat{AB}$ 及 $\widehat{AC}$ 各弧間有關係式為:

$$\widehat{AM} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AC}}{2} + k\pi.$$

[解] 據薩施樂 (chasles) 定理, 知有:

$$\widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{BM} + 2h\pi$$

$$\widehat{AM} = \widehat{AC} + \widehat{CM} + 2h'\pi$$

h 及 h' 為整數, 或正, 或負, 或零.