

數 學 講 話

廖 蔭 謙 著

總 經 售

讀書生活出版社

中華民國二十六年四月初版

數 學 講 話

每 冊 實 價 四 角

著 作 者 廖 庶 謙

發 行 者 廖 庶 謙

上 海 靜 安 寺 路

總 經 售 讀 書 生 活 出 版 社

斜 橋 弄 七 一 號

版 權 所 有 不 准 翻 印

中 華 民 國 二 十 六 年 四 月 初 版

序

這裏總共有十九篇文章。前面的十二篇是曾經在生活知識上發表過的，後面的七篇，有三篇是在讀書生活上發表過的；有三篇是用張健那個筆名在青年界上發表過的；最後一篇是艾思奇先生所寫，也是在讀書生活上發表過的。

前面的十二篇，本來是繼續寫成的，所以稍微有一點次序，現在合起來叫做上篇。後面的六篇，本來不是繼續寫成的，所以不是有系統的東西；——不僅內容上還間常有一些重複，甚至連所用的方法也有一些舊的東西。現在就合起來叫做下篇。至於艾先生所寫的那一篇，那是因為讀者們在看數學底對象和極限的思維那一篇以前就必須先看一下，所以也附錄在後面。

就這些文章底內容說，也並不是全部都出自我個人

底私見，而是把前人底意見摘取了許多過來，作為自己底口氣，把它稍稍地寫得通俗一些，使初學的讀者們稍微容易懂得一些罷了。

至於出自我個人的私見，也不是完全沒有。比方，在第九，第十，第十一，第十七等篇裏面，大部份都是我個人底私見。在其他的篇數裏面，加進了個人私見的地方也有一些。

近幾年來，有許多的讀者們很高興研究新興的哲學；但他們一碰到和數學有關係的地方，常常是解釋不來；這本書對於那樣的讀者們或許有一點點幫助。

我所以要把這幾篇文章出版，也還有另外一個希望：那就是希望我們這些研究自然科學的朋友們，大家對於新興的自然科學注意起來，集體地來研究新興的自然科學。

自然，在這本不曾成熟的小書裏面，理論上的錯誤一定是免不了的。因此我很希望：朋友們對於這部書，尤其是對於第九，第十，第十一，第十七等篇，加以嚴格的指正。

庶謙 民國二十六年四月一日在上海

目 錄

上 篇

- 一 從生活上底數量談起
- 二 數學是怎樣發生的
- 三 數學上研究一些什麼
- 四 數學底抽象性和現實性
- 五 數學上底公理
- 六 數學是純粹研究形式的嗎
- 七 自然科學社會科學和數學
- 八 幾何和代數底關係
- 九 矛盾的「零」和矛盾的「點」
- 十 代數上矛盾底發展
- 十一 從「三度空間」到「 N 度空間」
- 十二 目前應該怎樣研究數學

下 篇

十三 店員學徒們怎樣自修數學

十四 珠算和筆算

十五 怎樣研究珠算

十六 怎樣研究算術

十七 怎樣研究代數

十八 數學底對象和極限的思維

「附錄」 數學公理底來源

一 從生活上底數量談起

文學書，一向是大家最高興讀的；若是社會科學的書，那就有些人不大高興讀了。然而爲了要認識或推動目前這一個社會的緣故，對於新興的社會科學，近年來也有很多人注意到了。

至於自然科學，那倒是很倒霉，幾乎沒有幾個人睬它了。雖然在最近的過去，有人在大聲疾呼地提倡過「科工」；然而，並不因爲有人那樣提倡，自然科學便被大家重視起來。

中國目前的大衆，對於自然科學像這樣比較地看不起，這正也不是偶然；這正是表示目前的中國主要的需要是社會科學而不是自然科學。

這固然是不錯；然而，我認爲「科工」意義以外的自然科學，卻還是大家目前所需要的。

比方：近年來，有許多人在着重寫作自然科學的小品；但這種科學小品，它是要在有了文學的素養以外，再加上新的自然科學的知識，才能夠產生出好的成績的。因此，對於新的自然科學的研究，在科學小品的寫作上，就成了一種當前的需要。

又，近年來，大眾對於新的哲學是在很熱烈地研究；然而，我們若是對於新的自然科學還研究得不够，那是對於新哲學的瞭解，有許多困難的。因此，我們爲了研究新哲學上的幫助，是應該對於新的自然科學加以注意的。

數學這一科，在目前，還是列在自然科學以內的。它比起物理，化學，生物學等等的科學來，是特別地不大受到大家的歡迎的。比方，有許多學生們，他們在功課表上看到那一小時要上數學，他們就頭痛起來了。

可是，在這裏，我卻偏偏想和大家來談一談數學；但這並不是要故意使得大家頭痛，而是爲了數學這一科，它是各種科學上一種基礎的原故。

過去大家所學過的數學，大都是把數學和人們的生活分開，專門只在一二三四等等不名數的加減乘除上，以及A B C D等等文字的公式或方程式上講來講去；講的人

費盡無窮之力，聽的人却是越聽越糊塗。所以，看見了數學這兩個字便要頭痛起來，這並不是偶然的事。

我們現在是想把過去那種研究的態度反轉來，從數學和我們生活的關係上談起。

在我們的周圍，包圍着許多東西：有的是自然界的東西，有的是人類社會上的東西。這許多東西，隨時隨地都在那裏變動着，隨時隨地都在一種互相激盪的過程中開展着。我們爲了要認識它們，要克服它們，不被它們所蒙蔽，不被它們所制服，便追尋到它們發展的過程當中去。

我們走進它們過程的當中，主要的是要找出它們本身上互相激盪的根本所在，並且還要看出它們所以變動和發展的原因，看出它們相互間各種各樣的聯繫。

我們要做這許多事情，這並不是一下就能够成功的。我們首先要對於這許多複雜的事物，一個一個地看出它們性質上相互的差異，以及數量上形狀上相互的差異。

要看出事物間數量上形狀上相互間的差異，或是還再進一步要看出這些數量和形狀的變動過程以及它們本身上的許多法則，這就是我們數學上要做的事情。

在我們的日常生活上，也就隨時隨地都有數學的問題發現；我們在不知不覺中經常地解答過這些問題，這也就是我們研究數學問題，認識當前事物問題的開始。比方，我們說：「張三比李四高」，「今天比昨天冷」，「普通人每晚要睡八小時」，「一斤半總共是二十四兩」，「兩個人分六塊錢每人得三塊」，……這樣的一些問題，是我們隨時都可以碰到的，這也就是我們研究數學的開始。

我現在要請問平日見了數學兩個字就要頭痛的朋友們，你們見了這樣一些日常生活上的數學問題頭痛不頭痛呢？

如果也還是頭痛，那末，總比平日的痛，痛得輕一點罷？如果頭不痛的話；那末，這是什麼原因呢？

從這裏，我們應該知道：我們研究數學，應該從我們日常生活上的問題開始；因為這些問題都是極容易使我們瞭解的。不過我平日問過幾位朋友，「你家裏幾口人吃飯呢？」他們的答案，却有的是「五六人」，有的是「七八人」。像這樣，對於自己家裏的幾個人還不能答出一個確定的數目來，這未免對於事物的數量太不注意了。

我們對於當前的周圍的事物，應該隨時隨地地去注

意它們的數量：「我每天做幾點鐘事情？」「休息幾點鐘？」「我每月賺多少錢？」「用多少錢？」「由我家裏到辦事的地方有多少路？」「走起來要多少時間？坐車要多少時間？」「每個月車錢要多少？」……由這樣一些經常的注意，推廣到非個人的數量問題的注意。比方「中國目前欠了多少外債？」「每年的入超多少？」「每年財政上的預算如何？」甚至「國際間債權債務的關係如何？」等等。這樣的注意，它是對於我們認識事物的任務上有種極大的幫助的。

我們對於當前數量問題的注意，它不僅只能够幫助我們去瞭解當前的事物。對於推測過去的事物，它也能够有許多的幫助。

比方，（一）我們一個樹枝的橫斷面上，看見它有七個圈子（這在植物學上叫做年輪），我們便可以推知，這個樹已經生長過八年了。（二）我們在一位旅客的行李上，看見了許多旅館的紙條，我們便知道這一位旅客所走過的旅程已經不少了。

對於當前事物的認識，以及對於過去事物的推知，這其間還有一個極大的作用；這就是幫助我們對於未來的

預見。比方：（一）我們先定下一個讀書計劃，便預先知道某本書到某天會要看完了。（二）我們若是定了旅行的計劃，便知道帶多少錢可以到某處，某天某時可以到某處了。（三）我們有了預算，便會知道我們多少錢可以用到什麼時候。（四）天文家用了他們的計算，預先知道何年何月何時有月蝕。（五）在海王星還不曾被發現的時候，科學家（拉維禮）預先就算出它在某時候要在某地方出現了。這樣的一些預見，它並不像戲劇上的孔明先生一樣，有一種神祕的「未卜先知」的本領，而是出於一種十分靠得住的科學根據。

朋友們！我們開始從自己的日常生活上注意數量問題罷！

二 數學是怎樣發生的

上一次，我們已經談過：我們要在日常生活上去注意數量上的問題；我們要研究數學，就應該從日常生活上的數量問題開始。不過，我們為什麼要從日常生活上的數量問題開始呢？這就因為：數學這一件東西，牠原來就是從我們人類實際需要上發生出來的。在我們那些老老前輩的時候，他們爲了應付環境上的需要，開始了數學的研究；在我們這些後生小子初學數學的時候，也應該從我們這種日常生活的環境需要上研究起；不過我們比起那些老前輩來，進步得格外快一點罷了。

數學這東西，真的是從應付環境的需要上發生的嗎？這有什麼證據呢？

第一，在歷史上，我們知道：在埃及有一條尼羅河，那河在每年一定的時候，一定要漲大水的。漲水的結果，那

兩岸的田地都被污泥壅塞了。那地方的人民，當每次水退以後，必須要把兩岸的田地重新劃分一下；因為從前所有的界線，通統被大水掃蕩了。在那種經常的情形之下，他們就開始「測量土地」的研究了。我們現在所學的幾何學，就是從他們那種每年「測量土地」的情形中發生的哩。

當我們的老前輩還在靠大家共同打獵來生活的时候，他們要把所打到的飛鳥和野獸大家記起數目來，或是要大家分起來，這也是要開始研究數學的。比方，我們現在所寫的「一」「二」「三」這幾個字，古時候是寫做「弋」「弋」「弋」的。這個「弋」字，就是指明用繩子上了箭頭去射飛鳥或野獸；這個「弋」字下面的「一」「二」「三」就是記明所射到的件數。這也就是表示我們的老前輩，他們在日常生活中發生了數學了。

第二，在古老的數學書上我們也看得出來。當紀元前大約一千五百年的時候，有一位埃及的教士，他名字叫做愛默斯(Ahmes)，他曾經手抄過一部數學書，這部書我們現在到倫敦博物院里還可以看到。在那部書裏面，把當時埃及所有算術和幾何的題目都抄上了；不過，每個算題

都只有答案，沒有演算，更談不到數學的理論了。

在我國一般的古數學書上也是一樣，那上面每個問題也只載上一個答案，或是一些極簡單的算法，至於計算的理由就一點也不提起了。

我們那些老前輩為什麼不把算法和理由通統寫出來呢？那就因為：他們那時候自己所知道的也還有限得很。他們所知道的，在算術上還僅只是一些計算上的技術，在幾何上還僅只是一些測量上的技巧。

在算術上他們還只僅僅知道某一件被計算的東西有一種怎樣的特性，還談不到對於那一類東西的計算上有一種一般的解答。比方，「五塊獸皮，用去三塊，還剩幾塊呢？」像這樣的題目，我們的老老前輩，他們是計算得出的。若是把這個題目裡頭底數目字反轉來，「有獸皮三塊，要用去五塊，還差幾塊呢？」像這樣的題目，恐怕就已經算不出了。即令他們連這樣的題目也算得出，但是，如果要他們把這兩個題目總成一個公式，像我們現在在代數上學過的一樣， $(A - B = C)$ ，或被減數 - 減數 = 差數）那末，恐怕他們無論怎樣也是想不到的。

同樣，在幾何上，他們也還只僅僅知道某一個特別圖

形有一個怎樣的特性，還談不到某一類圖形上一般的定律。比方，在中國的一部古數學書上（周髀算經），他們知道了一個特別的直角三角形的特性，這個直角三角形，一個直邊的長是三，另一個直邊的長是四，一個斜邊的長是五。他們又知道：這兩個直邊的長的平方的和恰巧和那斜邊的長的平方相等。但是，假如有另一個直角三角形，一個直邊的長是八，另一個直邊的長是十五，他們就不知道它的斜邊的長是十七了。若是那兩個直邊的長是小數，那他們更是無論怎樣也不知道那斜邊的長了。

這就因為：我們的前輩，在他們的日常生活上，還只能夠發生一種對於一個數目，或是一個圖形的特殊的解答來；至於要從許多的數目或圖形得出一種一般的原理來，那他們是辦不到的。並且，在他們的主觀需要上，也還只是一些應用上的計算，而不是一般數理的探討。

第三，我們從小孩子的認識數目上，以及那些不大開化的人民計算數目上，也可以看得出數學是怎樣發生的。比方，一個三四歲的小孩子，他的數數，首先是從他的玩具或是指頭開始的；他所知道的形狀是日常容易見到的圓或方。再，在有些還不曾十分開化的民族里，他們從