高中平面幾何

全 一 册

教育總署編審會

編 輯 大 意

1. 本書教材，對於初中已習之定理，証法簡略，未能詳授之部分，儘量補充。

2. 本書將定理之有統一性者予以合併，不僅可使學生藉此明瞭幾何之連續性與一般性，對於教學進行，亦予以甚多之便利。

3. 高中平面幾何，復習教材占大部分，教學時能充分利用預習方法，不僅便利教學進行，學生亦易得温故知新之益。

4. 本書第一章緒論，可予學生對平面幾何有一總的認識，不僅將初中幾何得一總復習機會，即對於以後學習，亦可使更易進步；第二章共點綫與共綫點和對稱形，第三章共圓點與共點圓，第四章 Ceva. Menelaus, Desargues, Pascal 氏定理，調和列點與綫束，和極與極綫，第五章極大與極小，第六章軌迹，第七章作圖題，係高中幾何主要部分；教學時均宜多定時間，以資討論。

5. 本書除每章末補充題外，共有習題 400，優

等生可加做補充題，以資練習。

6. 本書對于人名，不予譯音，以存其眞。

7. 本書書後，附有中西名詞對照表．以便讀者參攷西書時之用。

高　中

平面幾何

目　次

第一章　緒　論

第二章　直線形

第三章　圓

第四章　比例及相似形

第五章　面積及圓之度量

第六章　軌　跡

第七章　作圖題

平面幾何

第一章 緒 論

幾何學之基本原理

§1. 幾何學之目的 吾人生存於空間，而環繞四周者，皆物體也；此形形色色之物體，大別之，有二種屬性：

(*a*) 物質的屬性 如物體的組織，色澤，軟硬，輕重……等是；其研究之範圍，屬於自然科學。

(*b*) 空間的屬性 任何物體，均有形象，大小，位置等屬性，吾人探究形象之種類和性質，大小之計算方法，位置之關係與變化，皆爲幾何學之目的。

§2. 幾何學之概念 吾人就形形色色之物體，一一加以觀察，雖組織，色澤，軟硬，輕重，……等屬性，俱各有別，但佔有空間之位置與大小，乃爲一切物體之公有屬性。吾人歸納此物體之公性，於

是在思想上形成一抽象概念，特名之曰體。故體者，有位置，大小二屬性之一抽象概念，與紅，白等抽象概念相同，如言“紙色白”即白是紙的一種屬性。“鉛筆是體”，因鉛筆有位置大小之屬性故也。

計算大小之方法，不外長，寬，高三度；故體者，亦可謂有位置，有長，有寬，有高等屬性之一抽象概念。反言之，凡具有位置，有長，有寬，有高等屬性者，皆可名曰體。

體既佔據空間一部分之位置，則其佔據部分與不佔據部分間，必有界限，吾人探究此界限，具有有位置，有長，有寬，但無高(即無厚薄)等屬性，特名之曰面。故面者，有位置，有長，有寬，無高等屬性之一抽象概念。

面與面有一交界，吾人探究此交界，具有有位置，有長，無寬，無高等屬性，特名之曰線。故線者，有位置，有長，無寬，無高等屬性之一抽象概念。

線與線有一交界，吾人探究此交界，具有有位置，無長，無寬，無高等屬性，特名之曰點。故點者，有位置，無長，無寬，無高等屬性之一抽象概念。

點既有位置，吾人可設想其位置變遷則發生線，故點動而成線，線再依另一方向移動而成面，面再依另一方向移動而成體。

體，面，線，點既爲抽象之概念，惟抽象概念，恆以實物象徵之。例如以雪象徵白，以血象徵紅，故在紙上或黑板上所畫之體，面，線，點，亦皆概念之象徵，非概念之本身也。

§3. **幾何學之基礎** 幾何學之基礎有三，即定義，公理，公設是也。

(*a*) **定義** 幾何學所論及之每一概念，皆有其特殊之屬性，故爲完密幾何學之理論起見，恆以適當之語，敍述每一概念之特性，而確定其意義，以爲幾何學之基礎，名曰**定義**。

(*b*) **公理** 人類本以往之經驗，就客觀之事實，所獲得爲人人最易瞭解之眞理，名曰**公理**。故幾何學假定若干公理，以爲論斷之基礎。

(*c*) **公設** 人類本以往之經驗，所獲得爲人人最易瞭解之一種方法，名曰**公設**。故幾何學假定若干公設，以爲作圖之基礎。

§4. 幾何學之方法 幾何學者，係根據定義，公理，公設爲基礎，不藉觀察實驗，純用論理學的方法，按律演繹而成，故系統嚴謹，論證確定；故曰幾何學者，一部純粹論理之演繹推測式也。

§5. 幾何學之功用 幾何學之功用，可分爲有形，無形，二種：

(*a*) 有形的 幾何學之概念，係由客觀之物體歸納而成，幾何學之公理，公設，又爲人類經驗所獲之眞理，故由是演繹所成之學科，其與客觀之現實界相吻合，乃爲必然之結果。故幾何學雖爲抽象之理論，實乃客觀現實界眞理之發現；故其所得結果，可用於測量，可用以解釋天象變化之理由，可用以建築房屋橋樑，可用以構造機械，可用以裝飾美觀，其促進文化進步，實與有莫大之功也。

(*b*) 無形的 幾何學既爲一部純粹論理之演繹推測式，故其對於人們智識之發展，推理能力之培植，探求眞理習慣之養成，實有不可思議之功用。昔賢徐光啓有言“人具上資而意理疏莽，卽上資無用，人具中材而心思縝密，卽中材有用，能通幾何

學之用，縝密甚矣，故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也"。善哉斯言．其將幾何學無形的功用，闡發無遺矣。

§6. 幾何學命辭之分類　凡以一述語，敍述演繹推測所得之眞理名曰命辭。幾何學命辭分下列三種：

(a) **定理**　卽依某種條件畫一圖，證此圖合某種條件。由已知定理，直接推測之定理，名曰系。

(b) **作圖題**　卽畫一圖合某種條件。

(c) **計算題**　卽依定理計算圖形之大小也。

§7. 幾何學定理之組織　幾何學定理，由二部組織而成，一曰假設。一曰求證（或曰終結）。假設者，假定其如是者也，求證者，由假設施以推理所生之結果也。定理之普通形式，可寫作爲：

$$\underbrace{\text{設}A\text{爲}B}_{\text{假設}}\ \underbrace{\text{則}P\text{爲}Q}_{\text{求證}}$$

例如：

$$\underbrace{\text{平行四邊形之對角線}}_{A}\text{如}\underbrace{\text{相等}}_{B}\text{，則此}\underbrace{\text{四邊形}}_{P}$$

$$\text{爲}\underbrace{\text{矩形}}_{Q}.$$

$\underbrace{\text{四邊形之相對角}}_{A}$爲$\underbrace{\text{補角}}_{B}$，則此$\underbrace{\text{四邊形}}_{P}$

$\underbrace{\text{可內接於圓}}_{Q}$

假設有過簡者，如：

矩形之對角線相等，

應改爲：

$\underbrace{\text{二直線}}_{A}$爲$\underbrace{\text{矩形之對角線}}_{B}$，則此$\underbrace{\text{二直線}}_{P}$$\underbrace{\text{相等}}_{Q}$。

而"矩形"中又含有"四邊形，對邊相等且平行，各角均爲直角"諸假設，故假設常包含定義及已證明之定理。

假設有複雜者，其形式爲：

$$\left.\begin{array}{l}\text{設}A\text{爲}B\\ \quad C\text{爲}D\\ \quad\cdots\cdots\end{array}\right\}\text{則}P\text{爲}Q.$$

例如：

角之平分線上各點，與其兩邊之距離相等，

應改爲：

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{\text{一直線}}_{A}\text{爲}\underbrace{\text{角之平分線}}_{B}\\ \\ \underbrace{\text{二直線}}_{C}\text{爲}\underbrace{\text{平分線上一點至二邊之垂線}}_{D}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{則此}\underbrace{\text{二直線}}_{P}\\ \\ \underbrace{\text{相等}}_{Q}\end{array}$$

§8. **幾何學定理之模式** 定理中之假設與求證，通常可變換其質和位，而得下列各式，名曰定理之模式

(a) **本定理**

設A爲B，則P爲Q，

(b) **逆對定理** 將本定理變質又變位，即得：

設P不爲Q，則A不爲B.

(c) **逆定理** 將本定理變位，即得：

設P爲Q，則A爲B。

(d) **對定理** 將本定理變質，即得：

設A不爲B，則P不爲Q。

例如；

(本定理)$\underbrace{\text{二鄰角之和}}_{A}\text{爲}\underbrace{\text{二直角}}_{B}$，則$\underbrace{\text{二外邊}}_{P}$

$\underbrace{\text{成一直線}}_{Q}$。

（逆對定理）$\underbrace{\text{二鄰角之外邊}}_{P}$不$\underbrace{\text{成一直線}}_{Q}$，則$\underbrace{\text{二角之和}}_{A}$。不$\underbrace{\text{等於二直角}}_{B}$。

（逆定理）$\underbrace{\text{二鄰角之外邊}}_{P}\underbrace{\text{成一直線}}_{Q}$，則$\underbrace{\text{其二角之和}}_{A}\underbrace{\text{等於二直角}}_{B}$.

（對定理）$\underbrace{\text{二鄰角之和}}_{A}$不$\underbrace{\text{等於二直角}}_{B}$ 則$\underbrace{\text{二外邊}}_{P}$不$\underbrace{\text{成一直線}}_{Q}$

(a) 與 (b) 之關係，名曰**互相對當**，此二定理中，有一理眞，餘一理亦眞。其模式雖異，其所述之意義實同。

【例 1】 本定理

過三角形二邊中點之直線，平行於底邊爲眞，其逆對定理

一直線如不平行於三角形之底，則此直線不過此三角形他二邊之中點。

亦爲眞。

【例 2】 本定理

三角形二邊之和大於他一邊

爲眞，其逆對定理

二直線之和不大於他一直線，則此三線不能

爲三角形之三邊。

亦爲眞。

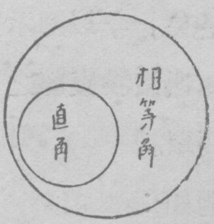
故本定理與逆對定理二者中，止須證明其一，餘一理可不待證明，自能眞確。

(*a*) 與 (*c*) 之關係，名曰互相轉位，二理中有一理眞，餘一理未必眞。例如：

本定理爲：凡直角俱相等。

其逆定理爲：相等之角，俱爲直角。

此逆定理之不眞，乃甚明顯，因直角僅爲相等角之一小部分，而不能代表相等角之全體也。以圖示之如右：



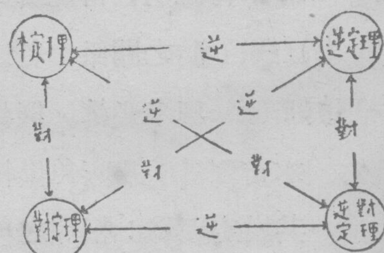
故本定理與逆定理二者，須各各證明，不能同時牽合。

(*a*) 與 (*d*) 之關係，名曰**互相倒質**，二理中有一理眞，餘一理未必眞。例如本定理爲：

二直線爲平行四邊形之對邊，則此二直線相等。其對定理爲：

二直線不爲平行四邊形之對邊，則此二直線不相等。此對定理之不眞，亦甚明顯。

然 (*d*) 與 (*c*) 之關係，亦互相對當，與 (*a*) 與 (*b*) 之關係同。卽逆定理與對定理二者中，止須證明其一足矣。今以圖示其各定理間之關係如右：



如遇假設複雜之定理，則其變換模式，不能如前之簡單。

例如：

弦之垂直二等分線，必過圓心。

此定理之假設爲“一直線將弦二等分”與“垂

直於弦”二事實，故其逆對定理應有二條：

(a) 不過圓心，將弦二等分之直線，不垂直於弦。

(b) 不過圓心，垂直於弦之直線，不將弦二等分。

逆定理與本定理亦有同時能眞者，然必須合於下列二種法則：

(a) **同一法則**

如有唯一之A，與唯一之B。則“A爲B”之定理已眞時，其逆定理“B爲A”亦必眞也。是名同一法則。

例如：

從直線外一點，至此直線所作垂線，爲此點至直線之最短距離。

因從一點至直線，所作垂線限於唯一，又從一點至直線之最短距離，亦限於唯一。故此定理既眞，則其逆定理。

從直線外一點，至此直線之最短距離，爲從此點至直線所作之垂線。