# 初中数学竞赛常用思想方法

秦淦
詹国梁 编著

科学普及出版社

# 初中数学竞赛常用思想方法

秦 淦 詹国梁 编著

科学普及出版社
·北京·

（京）新登字 026 号

**图书在版编目（CIP）数据**

初中数学竞赛常用思想方法/秦滏，詹国梁编著．—北京：科学普及出版社，1995.11

ISBN 7－110－03283－3/G·1344

Ⅰ．初…

Ⅱ．①秦…②詹…

Ⅲ．数学课－初中－教学参考资料

Ⅳ．G633.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 10524 号

科学普及出版社出版

北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码：100081

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

宜兴市第二印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：11.75　　字数：254 千字

1995 年 11 月第 1 版　1995 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—7000 册　　定价：12.00 元

# 前　言

众所周知，国内外各级数学竞赛试题与普通数学考试的试题迥然不同，其侧重点不在于知识，而在于分析问题与解决问题的能力。人们不禁要问：这种能力究竟从哪里来？我们认为构成这种能力的基本要素是知识、科学的思想方法与技能技巧，并且能力的种种表现又是三者的有机统一。其中，科学的思想方法是主导，是灵魂，是真正的“聪明术”，它能使人受用终生。正如举世闻名的美籍匈牙利数学家、数学教育家乔治·波利亚所说：“完善的思想方法犹如北极星，许多人通过它而找到正确的道路。”

什么是思想方法？目前恐无定论。但是，有一个基本认识却是一致的：思想方法高于一招一式的具体方法，并且对具体方法具有指导意义，又是各种具体方法之“源”。

本书试图通过对一批典型的国内外数学竞赛题解题过程的详细解剖，系统地、完整地介绍解初中数学竞赛题的常用思想方法，揭示它们在解题中的重要意义，以帮助读者尽快地找到解竞赛题的出发点或突破口，顺乎自然地探索解题思路，从而切实有效地提高分析问题与解决问题能力以及创造性能力。

书中依据由浅入深、循序渐进的原则，分讲介绍初中数学竞赛常用思想方法17种，各讲之间既注意整体的统一性，又保持相对的独立性，以便读者自由选读和使用。尽管所列举的思想方法是有限的几条，然而在实际应用时却是千变万

化，十分奏效。真是："声不过五，五声之变，不可胜听也。色不过五，五色之变，不可胜观也。味不过五，五味之变，不可胜尝也。"

为了增强本书的实用性，本书附有1985～1995年全国初中数学竞赛试题精解，以帮助读者掌握初中数学竞赛题的命题特点与解题规律，进一步认识各种解题思想方法的作用。

随着我国数学竞赛活动的蓬勃发展，数学竞赛的解题思想方法研究愈来愈为大家所重视。作者真诚地期望本书能有助于读者提高解题能力和数学素养，促进数学竞赛解题思想方法的研究，成为初中数学竞赛讲座的合适教材、中学数学教师的进修读物以及高等师范院校开设数学竞赛课的有益参考书。

由于水平所限，书中疏漏难免，敬请专家和读者批评指正。

作　者

1995年6月

# 目　录

# 第一讲　恒等变形法

通过各种代数运算，把一个代数式变成另一个与之恒等的代数式称为代数恒等变形。它是分解因式、求代数式的值、证明恒等式、证明条件等式以及求解许多数学问题的有力工具，应用十分广泛，并且灵活性和技巧性很强。因此，正确地、迅速地进行恒等变形是学好数学的一项非常重要的基本功。下面以国内外中学数学竞赛题为例，具体介绍10种常用的恒等变形的方法和技巧。

## 一、公　式　法

公式是解题的依据之一，直接应用公式进行恒等变形，在数学竞赛中不乏其例。

**例1**　分解因式

(1) $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

(2) $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

**解**　(1) 原式 $=(a+b)^2-2(a+b)ab-2(a+b)+4ab+1-2ab+a^2b^2$

$=(a+b)^2-2(a+b)(ab+1)+(ab+1)^2$

$=(ab-a-b+1)^2$

$=[(a-1)(b-1)]^2$

(2) 原式$=\dfrac{x^{15}-1}{x^3-1}=\dfrac{x^5-1}{x-1}\cdot\dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5$

$-x^4+x^2-x+1)$

**例 2** 求下列各式的值 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{9^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$

(2) $\dfrac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\left(8^4+\frac{1}{4}\right)\left(10^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\left(7^4+\frac{1}{4}\right)\left(9^4+\frac{1}{4}\right)}$

**解** (1) 原式$=\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\right]$

$\times\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{10}\right)\right]$

$=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{9}{10}\right)$

$\times\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{11}{10}\right)$

$=\dfrac{11}{20}$

(2) 利用恒等式

$$a^4+4b^4=[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2]$$

原式

$$=\frac{(1+4\cdot2^4)(1+4\cdot4^4)(1+4\cdot6^4)(1+4\cdot8^4)(1+4\cdot10^4)}{(1+4\cdot1^4)(1+4\cdot3^4)(1+4\cdot5^4)(1+4\cdot7^4)(1+4\cdot9^4)}$$

$$=\frac{(1^2+2^2)(3^2+2^2)(3^2+4^2)\cdots(9^2+10^2)(11^2+10^2)}{1\cdot(2^2+1^2)(2^2+3^2)(4^2+3^2)\cdots(8^2+9^2)(10^2+9^2)}$$

$=11^2+10^2=221$

**例 3** 设 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足 $a\leqslant b$，$c\leqslant d$，$a+b=c+d\neq0$，$a^3+b^3=c^3+d^3$，证明 $a=c$，$b=d$。

**证明** 利用立方和公式，

由 $$a^3+b^3=c^3+d^3$$

及 $$a+b=c+d\neq 0$$

得 $$a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2 \qquad (1)$$

再将 $a+b=c+d$ 两边平方，得

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2 \qquad (2)$$

（2）－（1）得 $$ab=cd \qquad (3)$$

（1）－（3）得 $$(b-a)^2=(d-c)^2 \qquad (4)$$

因 $$a\leqslant b \quad c\leqslant d$$

故 $$b-a\geqslant 0 \quad d-c\geqslant 0$$

所以 $$b-a=d-c$$

又因 $$a+b=c+d$$

得 $$b=d$$

从而又可得 $$a=c$$

## (八)二、添项、拆项法

把代数式添上两个符号相反的项，叫做添项；把代数式中的某项拆成两项的代数和，叫做拆项。通过适当的添项或拆项，可以将代数式进行重新组合，以便实现解题目标。

**例** 4　已知 $x^3-x^2+x-2=0$，求 $x^4+2x^3-2x^2+x-1$ 的值。

**解** 原式$=(x^4-x^3+x^2-2x)+(3x^3-3x^2+3x-6)+5$

$=x\cdot 0+3\cdot 0+5=5$

**例** 5　对自然数 $n$，设 $x$ 的二次方程：$x^2+(2n+1)x+n^2=0$ 的两根为 $\alpha_n$，$\beta_n$，求下式的值：

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$$

**解**　由韦达定理 $\alpha_n+\beta_n=-(2n+1)$，$\alpha_n\beta_n=n^2$。

$$\because\quad \frac{1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}=\frac{1}{n^2-(2n+1)+1}$$
$$=\frac{1}{n(n-2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)\right]=\frac{531}{760}$$

**例 6**　设 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$ 都是自然数，且 $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}\geqslant\frac{e}{f}$，$af-be=1$，证明：$d\geqslant b+f$。

**证明**
$$\begin{aligned}d&=d(af-be)\\&=adf-bed\\&=(adf-bcf)+(bcf-bed)\\&=f(ad-bc)+b(cf-ed)\\&\geqslant f\times1+b\times1=b+f\end{aligned}$$

## 三、运　算　法

利用代数运算法则（加、减、乘、除、乘方、开方等）与代数运算规律（交换律、结合律、分配律等）进行恒等变形的方法，叫做运算法。

**例7** 分解因式 $x^4+2x^3-9x^2-2x+8$

**分析** 由于原式中各项系数之和为零，故1必是原式的根；由于原式中各奇次项系数之和等于各偶次项系数之和，故$-1$也是原式的根。

**解** 因$\pm1$都是原式的根，故原式有因式$x-1$与$x+1$。作长除法（或作两次综合除法），即原式除以$x^2-1$，可求得原式有两次因式$x^2+2x-8$。所以，

原式$=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$

即 原式$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)$

**例8** 已知$x^5=1$，求$2x+\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}$的值。

**解** 由$x^5=1$，得$x^4=\frac{1}{x}$，$x^3=\frac{1}{x^2}$。从而，

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x^3}{1+x^4}$$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}$$
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}$$
$$=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{x+x^4}{1+x^2}=\frac{x+\frac{1}{x}}{1+x^2}=\frac{1}{x}$$

故　　原式$=2x+\frac{2}{x}=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

又由 $x^5=1$，即 $x^5-1=0$，得

$$x=1 \quad 或 \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

（1）当 $x=1$ 时，原式$=4$；

（2）当 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 时，由于 $x\neq0$，故可用 $x^2$ 除 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的两边，得

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

即　　$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$原式=-1\pm\sqrt{5}$$

## 四、配　方　法

所谓配方，就是把一个代数式配成正整数次幂的形式。配方法是数学中的一种重要方法，其应用贯穿于中学代数的各个阶段，其中配平方用得最多。

**例 9**　解方程 $(x^2+4)(y^2+1)=8xy$

**解**　原方程可化为

$$(x^2y^2-4xy+4)+(x^2-4xy+4y^2)=0$$

即　　$$(xy-2)^2+(x-2y)^2=0$$

由非负数的性质，得

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ xy-2=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

**例 10** 在$\triangle ABC$中，$\angle A=75°$，各边为$a$、$b$、$c$，且$(a^2-c^2)^2=b^2(2c^2-b^2)$，求$\angle B$、$\angle C$。

**解** 由已知得 $a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2=0$

配方得 $$(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$$

又 $$\cos^2\angle C=\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}=\frac{2a^2b^2}{4a^2b^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \cos\angle C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \angle C_1=45°,\ \angle C_2=135°\ (\text{舍去})$$

$$\therefore \quad \angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-75°-45°=60°$$

故 $\angle B=60° \quad \angle C=45°$

**例 11** 设$x^2+y^2=a^2$，$a^2<1$。

试求$S=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$的最大值和最小值。

**解** $$S=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2})^2}$$
$$=\sqrt{2-(x^2+y^2)+2\sqrt{1-(x^2+y^2)+x^2y^2}}$$
$$=\sqrt{2-a^2+2\sqrt{1-a^2+x^2(a^2-x^2)}}$$
$$=\sqrt{2-a^2+2\sqrt{1-a^2+\frac{a^4}{4}-\left(x^2-\frac{a^2}{2}\right)^2}}$$

当 $x=0$ 时， $S_{最小值}=\sqrt{(\sqrt{1-a^2})^2+2\sqrt{1-a^2}+1}$

$$=1+\sqrt{1-a^2}$$

当 $x^2=\frac{a^2}{2}$时，$S_{最大值}=\sqrt{2-a^2+2\left(1-\frac{a^2}{2}\right)}$

$$=\sqrt{4-2a^2}$$

## 五、共轭根式法（有理化法）

设 $A$ 是含有根式的表达式，若存在另一个不恒等于零的表达式 $B$，使乘积 $AB$ 不含根式，则称 $B$ 为 $A$ 的共轭根式，$A$ 与 $B$ 互为共轭根式。共轭根式的特点是通过 $A$ 与 $B$ 相乘能把根号去掉，利用这个特点进行恒等变形的方法，叫做共轭根式法。

**例** 12　已知 $x=\sqrt{5+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{5}}$，求 $x^6+y^6$ 的值。

**分析**　虽然 $x$ 和 $y$ 都是复合根式，但是 $x^2$ 和 $y^2$ 是一对共轭根式。

$$x^2\cdot y^2=\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)^2=20$$

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)^2=10$$

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$

$$=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]=400$$

**例** 13　设 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$，求证：

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}=\sqrt{n+1}-1$$

**分析**　把题设代入求证式左边，则分母含有根号，通过

有理化分母，很容易使问题获证。

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\
&=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\cdots\\
&\quad+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}\\
&=-(1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\cdots\\
&\quad+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\\
&=\sqrt{n+1}-1
\end{aligned}$$

## 六、待　定　法

为了将一个代数式进行恒等变形，先设定一个含有待定常数的恒等式，然后根据恒等式的性质列出几个含有待定常数的方程组，并解这个方程组，求出待定常数，这种数学方法，叫做待定法。

**例 14**　设 $21x^2+ax+21$ 可分解为两个一次因式的积，且各因式的系数都是正整数，则满足条件的整数 $a$ 共有多少个？

**解**　设 $21x^2+ax+21=(mx+n)(px+q)$，其中 $m$、$n$、$p$、$q$ 和 $a$ 均为正整数。

$\because$ $21x^2+ax+21=mpx^2+(mq+np)x+nq$

$$\therefore \quad \begin{cases} m \cdot p = 21 \\ n \cdot q = 21 \\ m \cdot q + n \cdot p = a \end{cases}$$

∵ 21 可分解为 $1\times21$ 或 $3\times7$.

∴ $m=1$、21、3、7 时，相应地有 $p=21$、1、7、3；

$n=1$、21、3、7 时，相应地有 $q=21$、1、7、3。

由于乘法和加法均满足交换律，而且 $1\times21=3\times7$，因此 $mq+np=a$ 的不同整数值只能是

$1\times21+21\times1=42$， $1\times1+21\times21=442$，

$1\times7+21\times3=70$， $1\times3+21\times7=150$，

$3\times3+7\times7=58$，一共有五个。

**例** 15 将 $\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$ 分母有理化。

**解** 设有理化因式为 $A+B\sqrt[3]{3}+C\sqrt[3]{9}$（其中 $A$、$B$、$C$ 是非零有理数），则

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})(A+B\sqrt[3]{3}+C\sqrt[3]{9})\\ =&(A-3B+3C)+(A+B-3C)\sqrt[3]{3}\\ &-(A-B-C)\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

必是有理数。

$$\text{故有} \quad \begin{cases} A+B-3C=0 \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

$$\text{从而} \quad \begin{cases} A=2C \\ B=C \end{cases} \quad (C\neq0)$$

$$\therefore \quad \text{原式}=\frac{2(A+B\sqrt[3]{3}+C\sqrt[3]{9})}{A-3B+3C}=2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$$

**说明** 分母的有理化因式也可以设为 $1+A\sqrt[3]{3}+B\sqrt[3]{9}$，