知天集

（五）

林大芽著

一九七二年四月七日

目　錄

（五）

論 集 合

一、量集

若攷察集合論発展的情形，便見到它有一种傾向，即許多作家多偏于元素种类方面的研究，但对于元素数量之探討，却寥若晨星，其中即使偶然涉及数量的範围，也因了基数序数的使用，遂使本来数量的问题，一变而为种类的问題了。

要研究量的问题，应先从初等几何說起，我们知道三角形有三个頂点，但当两个頂点重合时候，則此三角形仅有两个頂点和一个边，因称为变态三角形。又当討論多面体时候，便不难看到其中有許多相重的頂点和許多相重的边，因此，这多面体也变为变态多面体了。

变态多面体的每一个頂点，其数往往不仅一个，其中有的两个，三个，以至多个，因此，当我们用集合方法来表达时候，便見其中除了許多不同元素之外，更有由各元素所帶来的数目问題，因得量集。試举例来說：

$\{r, t, s\}$，$\{s, t, r, s\}$，$\{t, s, t, r\}$ 均表由 r, t, s 三种元素所成的集合，如不計重複元素的数目，它们是相等的。但如把重複元素的数目也計算在內，則得 $\{r, t, s\}$，$\{2s, t, r\}$，及 $\{2t, s, r\}$ 三种各不相等的集合，这样才符合变态多面体的意义，也更符合实际事物的情景。

量集既改变了过去集合的意义，那么，过去的関係也不能不跟着改变的，因把其中較为明显的，分述如次：

定理一：設两量集相同，則其中元素之种类相同，且各种类元素数目之比极近于 1。

定理二：設某量集內元素 a 有 n 个时，則可作 n 个相同之子集，使各子集均含一个 a 及其他元素之全部。

因此，設某量集含有元素 a, b, c,………，各有 n, p, q,………个时，則可作 $_nC_1 \cdot {_pC_1} \cdot {_qC_1}$ ……… 个相同之子集，使各子集含有一个 a, 一个 b, 一个 c, ……… 及其他元素之全部。

因此，当选取 r 个 a, s 个 b, t 个 c,………，則該量集含有 $_nC_r \cdot {_pC_s} \cdot {_qC_t}$ ………个相同之子集，使各子集含有 r 个 a, s 个 b, t 个 c, ………及其他元素之全部。

定理三：两量集间某元素之数目不等，則該两集不等。但在古典集合論上則相等。

定义一：設有一量集，其中任一元素或子集与其他两量集之元素或子集相同，且該元素或子集之数目与相同元素或子集之数目中最大者相等，則該集称为該两集之联集。

定义二：設有一量集，其中任一元素或子集与其他两量集之元素或子集相同，且該元素或子集之数目与相同元素或子集之数目中最小者相等，則該集称为該两集之交集。

定理四：設两集合之交集为 φ，則其联集为两集之和。

定理五：設两集之联集为 φ，則其交集及該两集均为 φ。

除了上述之外，更在集函数方面，也有显著的改变，例如：

設集函数 f：A → B 为 homeomerphic, A, B 各为量集，因其中具有一一对应及雙重连续性质，故在 A 中不同元素，經反映後，仍为不同元素，

且不同之数亦相等。反之，A中相同元素経反映後，仍为相同元素，且相同之数亦相等。因此，在結構上，A,B是相同的。

定义三：上述相同元素之数目，称为元素係数。

定理六：設集函数 f：A→B 为 homeomerphic，則其中任一元素之元素係数与其所对应元素之元素係数相等。

定理七：設 A, B 为量集，且各元素成一一对应，則任一对对应元素间所造成之元素係数必相等，且成 homeomerphic。

定理八：設某量集有一元素係数与另一量集中任一元素係数不等，則該两集不能造成一一对应。

定理九：設在一量集內，某元素係数不与該集內任一元素係数相等，則該子集可作自动对应（Auto-morphic）

定理十：設在一量集內，所有元素係数皆成对相等，則有自动对应存在，使各对间成特别对应。

定理十一：設一个量集造成自动对应，則該集所有相同元素係数应成对存在；不成对之相同元素係数间亦必造成部分自动对应。

定理十二：設某量集成自动对应，則元素係数为一之諸元素间必造成部分的自动对应，而元素係数相同之諸元素间亦必造成部分自动对应，及单独之元素係数（非一）造成子集自己不变对应。

設 A,B,C 各为量集，U_{∞}表其字量，則有許多定律与古典集合論相同，特述之如次：

1. 吸收律：

(a) $A \cup A = A$　　　　(b) $A \cap A = A$

2. 結合律：

（a）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　（b）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3. 交換律：

（a）$A\cup B=B\cup A$　（b）$A\cap B=B\cap A$

4. 分配律：

（a）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（b）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

5. 同一律：

（a）$A\cup\phi=A$

（b）$A\cap U_\infty=A$　$A\cap\phi=\phi$

6. 餘集律：

（a）$A\cup A'=U\infty$　（b）$A\cap A'=\phi$

$(A')'=A$　$U_\infty{}'=\phi$，$\phi'=U_\infty$

7. MorgaN 定律：

（a）$(A\cup B)'=A'\cap B'$　（b）$(A\cap B)'=A'\cup B'$

量集的意义既如上述，要知道其在一切事物存在之价値，不在单独特别元素之出現而在其係数之大小。因为个别事物往往被大众孤立而消滅，犹如古代哲人，虽有崇高的思想和伟大的発明，当其被大众抛弃後，結果，也难逃其毀滅的命运。所以当这些事物反映到集合論上时，对于元素係数，不能不加以重新檢討，使其表現，更为眞实。

元素係数对于量集既有相当影响，玆論当元素係数最大时，則該元素的影响力也最大，特称为重心。又当有数个最大元素係数存在时，便構成

了次重心。这些重心或次重心都有决定量集外形的作用，因此，它們是集合的骨。

二、眼的哲學

眼是中国圍棋的名詞，至少具有两个生存的气，倘把它引伸出来，使集合論裏也具有两种生存的气，一种摄取外界事物，蛻化而为集合，另一种則摄取数学形式使之确定而成数学。这即是說，一个是实踐的气，一个是理論的气，两者統一起来，可使数学大大発展。

由此可見一个数学系統的発展，应具有两种气，一个从自然現象，社会环境，生活习慣，文娱生活，以及劳动等等，吸取其中有用特质，这便是最初实踐的气，然後把它閃在数学理論裏面，再経創作方法的活动，便一一化为数学的形式，这种理論的气，一旦和实踐的气相通，便成为集合論中的眼。

眼至少有两个气，这些气是不可中断的，設实踐的气中断了，則一切思想脫离現实，渐渐趋向枯竭，其後果可怕极了。但若沒有理論的气，則似舟行妄舵，决难磨琢成物，終止于文艺哲学之上。

例如孔子要想研究周易，至今还有許多学者同声附和，要把它発展而为数学，但这是不可能的。因为周易虽由古圣上仰俯察，而又参以人文事物，終因当时科学未兴，观察常犯錯誤，故生活的气常缺而不全，加以当时数学也未达到适当水準，因而又少了一个气，显然缺乏造成眼之必要条件。所以孔子的研究，不要說再花五年十年的时间，即使延至百年千年，也是徒劳的。

再說古典数学，虽然五花十色，各表許多的气，然至終不克擴充至哲学，艺术，社会，以及大众生活裏面，因此，找不到实际生活的气，从而

脱离了生活的气息，限制了数学的創造。

在集合論裏，常滲有生活的气，实践的气，这些气不但滲入了細胞，神経，鏈，鴿子籠，球，连续，以及其他事物裏面，同时对于哲学，人文科学也結不了之緣；在代数方面，有結合的气，在几何方面，有运动的气，图形的气，更有对应的气，历史变革的气，設把它们联合起来，即成千奇万怪的眼。倘更能运用創作方法，把亥穷亥尽的大众生活翻譯出来，自可成为巧妙的数学系統。

三、擴充

定义四：設（ax, by, ………, cz）及（a′x, b′y, ………, c′z）为两个量集，其中元素係数：$a \geqq a' \geqq 1$，$b \geqq b' \geqq 1$，………，$c \geqq c' \geqq 1$，則（a′x, by, ………, c′z）$\measuredangle$（ax, by, ………, cz），因此，前者称为後者的子集，又当 $a'=b_{\prime}=\cdots=c'=1$ 时，則（x, y, ……… ,z）称为主要子集。

設有一集合，係由元素：S_{ix}, S_{jx}, S_{kx}, ………；g_{ix}, g_{jx}, g_{kx}, ………；C_{ix}, C_{jx}, C_{kx}, ………；……… 等所成，其中指标 x 係变动的，且 S_{ix}, S_{jx}, S_{kx}, ………各在各集上变动；g_{ix}, g_{jx}, g_{kx}, ……… 各在各羣上变动；C_{ik}, C_{jx}, C_{kx}, ……… 各在各环上变动，那么，这些集合便構成一个軌道空间。

在上述变动之中，苟有一个元素固定时，則軌道空间变成一个錐状軌道。苟有两个元素固定时，則变成一个伞状軌道。

設 a_{ix}, a_{jx}, a_{kx}, ………；b_{ix}, b_{jx}, b_{kx}, ………；C_{ix}, C_{jx}, C_{kx}, ……… 各表元素係数，且各在集，羣，环之軌道上，則集合：（a_{ix} S_{ix}, a_{jx} S_{jx}, a_{kx} S_{kx}, ………；b_{ix} g_{ix}, b_{jx} g_{jx}, b_{kx} g_{kx}, ………；C_{ix}, C_{ix},

C_{jx} C_{jx}, C_{kx} C_{kn}, ……）表一个雙重軌道。当一个元素固定时，則雙重軌道变为一个活动錐形，更当其元素係数也固定时，則表一个固定錐形。又当两个元素固定时，則雙重軌道成一个活动的伞。又当其两个元素係数也固定时，則表一个固定的伞。

由上所述，任一頂点必在其頂点軌道上，但要确定某一頂点，則可用 Goodman 之集方程理論求出，即 $G_{ij}=X_i \cap X_j$ 之有解之充要条件为：$G_{ij}=G_{i\alpha} \cap G_{\beta j}$，那么，在各頂点集上可求其自己的固定交点。

此外，更有元素係数问题，所以也应由集方程 $g_{ij}=y_i \cap y_j$ 之有解条件 $g_{ij}=y_{\alpha i} \cap y_{\beta j}$ 着手，因此，可得量集之元素及其元素係数之解

四、集合論的哲學基礎

玆以集合論流行之情況为基礎，發展其內在之意义，藉以建立气骨力神以及气骨相联之理論，特分述如次：

（a）独立：子集是一个气，交集也是一个气，但它们都属于数学的理論的气，而独立則为实践的气，当这种实践的气閃在理論的气裏的时候，实践的气便跟着理論的气之活动而活动，並且还要鑽出独立意义来。因此，正反两面的势力便出現了。独立是正面的力量，而附庸則为其反面的了。但当数个子集和其他几个子集的餘集之间，所得之交集係非空时候，則該各子集间才沒有附庸閃係的，那么，附庸意义便被否定了，这就說明了初步拚合的成功。

然上述仅限于特别交集，設把特别交集擴張到每一交集时，那么，一切子集间所有附庸閃係全被否定了，因此，子集间独立的意义也告成立了。

（b）球：球是一个气，对应是另一个气，但它们都属于理論的气，現实事物是实踐的气，当現实事物閃在理論裏面时候，便跟着球的活动而活动，因此，函数间对应作用，便把数学与非数学的関係建立起来，这即是說，为了球与現实事物间对应関係之建立，現实事物也跟着其对应関係而成为数学了。

（c）直线：直线是数学的气，对应也是数学的气，它们都是属于理論的，現实事物是实踐的气，如（b）一样的情形，我们不妨把实踐的气閃在直线裏面，便可把非数学的事物一变而为数学了。

（d）分裂：分裂是生活上很普遍的現象，也就是实踐上一个气，集合是理論的气，当实踐的气閃在理論的气时候，便成为分裂集，从而有分裂意义出現了。

（e）集方程式：子集可視为比较現实的气，方程式是古典数学上近于理論的气，当把子集閃在方程式裏面的时候，理論便被实踐糾正了，这即是方程式的变数应被糾正而为变动集合，但当 i, j 变动时，則子集 X_i，X_j 亦为变动的了，故乃得变动的交集 $X_i \cap X_j$，因此，集方程式 $G_{ij}=X_i \cap X_j$ 的意义，便可宣告建立。

（f）飽和：飽和是一个气，集合也是一个气，不过飽和是较接近于生活的气，当前者閃在後者的时候，則飽和的意义便滲进所有子集 A′ 裏面，使它也具有飽和 $\psi(A') \geq A'$ 的气氛，但究其实不能使之成为确切的定义，因此，在 $\psi(A') \geq A'$ 裏必先滿足 $A' \subseteq A$ 的条件而其意义始克成功。

（g）等势：集合是理論的气，对应也是理論的气，它们是数学上一个气，相等又是实踐裏另一个氣，当後者閃在前者的时候，元素间对应的

関係便否定了比較的意义，因此，两集合间一一对应的势力，遂起而否定了大小的局面，从而两集的等势遂告成立了。

由上所述，在集合論発展过程上，应具有两种气，一个是理論的，数学的；另一个則为現实的，实踐的；那么，便可使之不断発展。但数学的进展，所須的气至少有两个，因在理論上往往有两个气，三个气，………，以及多个气，在实踐也是同样的，不过可分为两大类而已，若要更进一步，可作下列的分类：

一个理論的氣和一个实踐的气，叫做一一眼型。

二个理論的气和一个实踐的气，叫做二一眼型。

多个理論的气和一个实踐的气，叫做多一眼型。

一个理論的气和二个实踐的气，叫做一二眼型。

一个理論的气和多个实踐的气，叫做一多眼型。

同样，可得二二眼型，多二眼型，多多眼型等。

（h）气骨相连：以上所述，仅述及气息之理論，設若继续発展下去，不难获得气骨相联的理論。比方存有（exist）容納（contain）被包括（is included）使（such that）設………則………（if………then………）属于（belong）等等，都是集合論裏常見的字眼，它们不但代表了实踐的气，而且更为连接两个数学的气之桥樑，因它们既不能与理論的气融为一体，而又別乎数学的气而单独存在，甚至到达不可分离的境界。所以这时許多数学的气，便转为它们的骨了。这便是「气骨相连，乃成万物」的論據。特举例以明之如次：

例一：設R为一直线，F为相当对称完全集，則必有一个完全集 $P \subseteq R$ 存在，使 $\{a+b; a, b \in P\} \subseteq F$。

这裏「有………存在」是一个实踐的气，P及R則为理論的气，但实踐

的气不仅不因理論的气而变更，而且紧紧地抓住P，R而不相分离，但自P，R确立以後，其外形也跟着而确立了，犹如动物骨骼一样，自从長成以後，其外形也跟着固定了，故P，R乃定理的骨。但它们的作用不仅固定了外形，而且限制了实践的气之活动。

它们可用句子的構造来解释，R是主語，「有………存在」是述語，P为宾語，而“使………”則为补助子句，前三者不可缺一，故述語乃实践的气，而主語与宾語則为骨，故呈气骨相联之状。

至于补助子句，設 $a, b \in P$，則 $a+b \in F$，显然亦为气骨相联之另一形式。因 $a, b \in P$，及 $a+b \in F$ 为理論的气，而“設………則………”为实践的气，故亦表气骨相联之状。

例二：設每个可度集 $E \subseteq R$，而且O为E之有長稠密点，則存有一个完全集 $P \subseteq R$，使P之距离集被包括在E内。

这裏“存有”是实践的气，R及Q为理論的气，这三者实係句子構造中之主述宾三詞的関係，因此，便成立了第一个气骨相联之景象。

此外，子句裏——使P之距离集被包括在E内——係由实践的气“被包括”及理論的气“距离集”及“E”所成之气骨相联之景。

例三：凡S为具有次序型式之类，則S之基集是S之子集X；务使对于每个 $\xi \in S$，即有 $\theta \in X$，使 $\theta \leq \xi$。

这裏气骨相联之形式有三：第一，“是”乃实践的气，基集及子集乃理論的气，这三者具有句子中主述宾三詞之関係，故有气骨相连之象。第二，子句中“务使对于每个 $\xi \in S$，即有 $\theta \in X$，使 $\theta \leq \xi$”，“即有”乃实践的气，“每个 $\xi \in S$”，及“$\theta \in X$”乃理論的气，此三者亦組成气

骨相连之象。第三：子句"$\theta \angle \xi$"中，实践的气乃是"$\leq$"，而理論的气即为θ及ξ，故亦構成气骨相连之関係。

（i）神韻： 氣骨相联之理論，旣如上述，玆更論其神韻，神韻之発生，係存在於正反两面之对比中，特举例述之如次：

（一）化現實爲神韻之例：

1. 等势：在一般不等势之集合中，彷佛有等势的力量存在，有了不相等，就有了相等，所以若站在不等势的反面立場上观察，便呈显了其正面的神韻。

2. 独立：在附庸意义之中，必有其反面——独立——的意义存在，事物如此，集合也如此，不过有了明确的否定了附庸的条件，才有正面的神韻出現。

3. 分裂：从不分裂的意义中，必有分裂的意义存在，在集合裹，其意义应与其条件統一起来，所以从否定不分裂的观点上观察，便有了反面的力量出現，这便是分裂的神韻了。

总括来說，从現实求神韻，必有其正反两面，若以正面为正量，而其反面則为負量，其神韻便在其对比之中，卽两量的乘积了。

（二）氣骨相聯的神韻之例：

1. 从（h）例一裏，我们知道P，R，{a+b}，F是理論的氣，"有……存在"，"設………則………"，"$\subseteq$"，"使" 是实践的氣。理論的氣近形式，而实践的气則属內容。形式所表現的是个别的生命，是活力，內容所表現的，則为整个的空气与出路了。故从理論来观察，所謂生命，所謂活力，不过是一盤散沙，老死不相往来的。但实践却給予了生命的泉源，活力的出路，因此，才表現了年青活潑的神韻。

2. 从（h）例二裏，我們知道"存有"，"使………被包括"，"設………則………"是实踐的气，E，R，P則为理論的气，理論既为全局中之生命或活力，但应有实踐把它们连接起来而後才得到气息及出路。犹如江河的声势，把两岸的草木虫魚以及一切动物都喚醒了，因此，其中主要的出路——R含有完全集——的神韻，便隐約出現了。

3. 从（h）例三裏，有許多气骨相联的関係，其中虽有实踐的气把它們貫通起来，但相联関係越多，表現神韻的力量也越分散而微弱，独在此複杂气息之中，有相似的重現的作用使其面貌出現了，这即是 $X \subset S$，$\theta \leq \xi$ 之相似之气，那么，其主要的清朗的神韻，也被找到了。

五、創作與集合

創作方法之集合化，前已述及，兹更加論述，以廣其理論並丰富其色彩。

（a）分类法：

可分类的意义，祗限于能归类的事物，反之，不可归类的事物，是不可分类的。两个相似而又不能归类的事物，也是不可分类的。

定理十三：某些集合可分类之充要条件为：各集中除特别元素或特别子集外，其他各子集或各元素是彼此相同的。

定理十四：在各量集中，如有許多元素之种类及係数相同，而另一元素之係数不同，則該各量集是可分类的。

定理十五：在可分类之許多集合中，各集至少有一个子集或元素不同。如係量集，則至少有一元素係数不同。

（b）分析法

分析集合的方法，可分两种，一、依其中各元素或各子集种类之不同，

作成种类表格，然後进行研究。二、依其中元素係数或子集係数之不同，作成係数表格，然後再行討論。

定理十六：設集合依各元素或各子集可以編成表格，則該集合可用分析法求其新义或新定理。

定理十七：可作係数分析的集合，其表格中元素係数可以为0。

定理十八：可分析集合之必要条件为有表格之存在。

（c）提炼法：

関于集合論提炼法的同題，从前已経討論过了，兹更述如次：

定理十九：設$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$依次为現实B的反映集合，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots\cdots \supset An$且設$n=1$則$A_1$表单一元素或子集。

定理二十：設$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$依次为現实B的反映集合且設$n>l$，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots\cdots \supset An$則$(A_1, A_2, \cdots\cdots, An)$亦表一集合。

此种提炼法，係逐次把含有元素或子集之混合物提出，最後要达到純粹的目标。除此之外，更有排除法的提炼，特述如次：

定义五：在量集$(k_1 a, k_2 b, \cdots\cdots, k_n r)$中，如可用一种方法，把氼用之物排去，如：

$$(k_1 a, k_2 b, \cdots\cdots, k_n r)+(M) \to K(a, e, l, \cdots\cdots p)+(X)+\cdots$$

則称該量集可提炼为$K(a, e, l, \cdots\cdots p)$。

（d）遞进法：

遞进法是一种变換，我们以单純形表一个事物的内容，並以其頂点表示法为形式。因設$a_V (V=1, 2, \cdots, n)$为頂点，則頂点集$(a_V)_{1 \leqq V \leqq n}$表一个事物的单純形，那么，$((a_V)_{1 \leqq V \leqq n}, (b_V)_{1 \leqq V \leqq m} \cdots\cdots, (C_V)_{1 \leqq V \leqq l})$表該事物之系統。

兹以此为基礎，討論遞进作用之变換，所謂遞进作用，就是要保留单純形的原义，而以其他形式改变其頂点，設其頂点变为：

a_v' , b_v' ,………, C_v'

即得：

$$f:\left((a_v)_{1\leqq v\leqq n},\ (b_v)_{1\leqq v\leqq m})\cdots\cdots,(C_v)_{1\leqq v\leqq l}\right)\to$$
$$\left((a_v')_{1\leqq v'\leqq n},(b_v')_{1\leqq v'\leqq m},\cdots\cdots,(C_v')_{1\leqq v'\leqq l}\right)$$

（e）抽象法：

从多心反映所得的象，概係残缺不全的，假使把这些象能夠自己配成一个比较完整的图象，則此图象称为可抽象的集合。抽象集合係由許多象元素所組成。

定理二十一：两个（或两个以上）抽象集合可以組成一个複合形。

定理二十二：在一个抽象複合形裏，可以分解为許多单純形。

（f）追原法

追原法是苏格拉底的问答法，如以集函数表之，可設集函数 f，使

$$f:\quad A_1 \longrightarrow A_2$$

反之，則

$$f^{-1}:\quad A_2 \longrightarrow A_1$$ 称为追原現象。

定理二十三：設 $f^{-1}A_2\cap A_1=\phi$，則 f^{-1} 为不可能追原。

因 $f^{-1}A_2$ 既与 A_1 无公共元素，即不能找出 A_1 中任何原始之元素，故其原因永不可得。

定理二十四：設 $f^{-1}A_2\equiv A_1$，則 $f^{-1}A_2$ 有极明显追原之影。

因此时 A_1 中所有元素均可求得。

定理二十五：設 $f^{-1}A_2\subset A_1$，則 $f^{-1}A_2$ 之追原之影不很明确。

因 $f^{-1}A_2$ 仅佔A_1之一部份，而其他部份仍不可求，故表灰暗。

定理二十六：設 $f^{-1}A_2 \supset A_1$，則 $f^{-1}A_2$ 为进化的。

因除求出A_1之全部元素外，更有其他元素出現。

定理二十七：設 $f^{-1}A_2 \cap A_1 \equiv A_1$，則其結果与定理二十六同。

定理二十八：設 $f^{-1}A_2 \cap A_1 = f^{-1}A_2$，則其結果与定理二十五同

定理二十九：設 $f^{-1}A_2 \cap A_1 = K$，且 $K \subset f^{-1}A_2$ 及 A_1，則此追原之影为残缺不全的。

因 $f^{-1}A_2$ 仅得A_1之一部份元素，且有許多元素不在A_1內，故其原因不全。

定理三十： 設 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ 均适合定理二十四之假設，則 $f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots\cdots f_n^{-1} A_n$ 有极明显追原之影。

定理三十一：設 $f_1, f_2, \cdots\cdots, fn$ 均适合定理二十五之假設，則 $f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots\cdots f_n^{-1} A_n$ 之影为0或相当小。

（g）还元法：

还元法就是把因果顚倒的一种方法，但在较複粢的假設求証裏面，仅将其中小部份互相倒置而已。兹把假設部分作一集合：$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，更把求証部分另作一个集合：$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m$，則此法应写为：

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \longrightarrow b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m$$

兹把（a）中 a_i 与（b）中 b_j 对調，便得：

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{i-1}, b_j, a_{i+1}, \cdots\cdots \chi, y, z \longrightarrow b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{j-1}, a_i, b_{j+1}, \cdots\cdots b_n$$

这便是还元公式了。