

大學叢書

理財數學

上冊

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書
理財數學

上冊
褚鳳儀著

(一九五〇年九月修訂)

商務印書館發行

序

公私營企業爲了完成增進人民福利的任務，必須改善它們的管理方法，而財務管理是企業管理的重要環節之一。近世企業組織，較前更爲複雜，關於財務管理，尤其覺得重要。利息與折舊是每一個企業中必然發生的問題，故一切企業均有關於利息與折舊的計算。有時企業向外舉債而欲分期償還，或以一時不需的資金，購買債券，是等問題均與年金有關，故大部企業，又有關於年金問題的計算。政府或企業有時發行債券，以籌募巨額的建設基金，則債券發行的方式，也與理財有關。若企業是一個經營人壽保險業，則須先明生死機率的原理，然後能算出投保人應繳的純保費。總之，管理企業中的財務，依靠與此有關數理的研究，研究管理財務的數學，名曰理財數學。

理財數學的名稱甚多，若投資數學，政治數學，會計數學，高等商業數學，均先後爲各國學者所採用。本書於1936年一月初版，原名投資數學。社會主義社會經濟發展的規律，和資本主義社會經濟發展的規律，完全不同，前者是增進人民的福利，後者是追求利潤。新中國是正在新民主主義社會中，發展經濟，準備走向社會主義社會的條件，故經濟發展的規律，是增進人民福利的擴大再生產，而不是追求利潤的投資。投資數學的名稱，已不再適用。

本書於重要理財數理，均有敘述，而於利息確實年金與債券三編，討論尤詳，貼現與價值方程式二章，他書敘述甚略，

學者頗多不能深切了解，故本書第二編(利息)中，把這兩章大加擴充，以求數理的透穿。他書於確實年金一編，都未論及變額年金，然變額年金對於償債的方式與債券的發行，都有密切的關係，故本書增加變額年金一章。他書於債券的發行，或略而不論，或論而不詳，然債券發行的方式，影響於政府或企業的理財甚大，而於市價與投資利率的推算，也有密切的關係，故本書討論較詳。

本書於年金與債券討論較詳，故應用計算表，也較他書為多，附錄中的倒數表，累積倒數表，等差變額年金終值表，等差變額年金現值表，與期初付複雜年金至第一期末終值表，皆為他書所無。

本書於1936年一月初版，於1940年一月四版時增訂甚多。自四版後書中公式分 a , b , c 三組， a 組公式為必須記憶的公式， b 組公式記憶較難而演化較易，故學者可不必記憶，考試時可改用 a 組公式； c 組公式演化較難，若學者有相當數學程度，則須記憶公式的演化，否則考試時可將應用公式附書於試題之中。

本版增訂甚少，主要刪除，有關統一公債與復興公債等教材，刪除除三遞退法與其他不適實用的教材，關於倒題與習題，也稍有修改和增補。

本書先後蒙同學周頌康、湯芝第、蔣家森、盛慕傑、潘光潤、陶嫩珠、朱愛廬、胡珍楷、奚紹濂、與吾妹明馨，或助編計算表，或代任抄寫之勞，編者特於此處表示他底感謝。

1950年7月17日

褚鳳儀

目次

第一編	對數	1
第一章	對數之意義及其性質	1
第二章	對數之種類	5
第三章	對數表之編製及其應用	8
第一節	對數表之編製	8
第二節	指標與假數	11
第三節	由對數表檢查對數	12
第四節	由對數表檢查反對數	16
第五節	對數表之應用	18
第二編	利息	29
第一章	單利	29
第一節	普通利息	35
第二節	準確利息	44
第二章	複利	51
第三章	貼現	72
第一節	單貼現	75
第二節	複貼現	82
第四章	價值方程式	95
第一節	單貼現法	98

第二節	複貼現法	119
第三編	級數	137
第一章	等差級數	138
第二章	等比級數	147
第三章	無盡級數	151
第四編	確實年金	165
第一章	年金之意義及其種類	165
第二章	定額年金	168
第一節	簡單年金	168
第二節	複雜年金	191
第三章	變額年金	221
第五編	年賦償還	245
第一章	年賦償還之意義及其種類	245
第二章	均等分償	247
第一節	本金均等分償	247
第二節	全均等分償	253
第三節	償本基金	257
第三章	變額年金分償	264
第六編	內插法	273
第一章	內插法之意義及其種類	273
第二章	因變數之內插法	275

第三章	自變數之內插法	286
第七編	債券	295
第一章	債券之發行	295
第一節	債券之意義及其種類	295
第二節	無獎債券	297
第三節	有獎債券	326
第二章	債券市價之推算	338
第三章	投資利率之推算	370
第八編	折舊	391
第一章	折舊之意義	391
第二章	計算折舊之方法	394
第三章	資產之壽命與資產之換新	408
第四章	資產估價	417
第九編	序列組合與機率	423
第一章	序列與組合	423
第二章	機率	428
第三章	生死機率	437
第十編	生命年金與人壽保險	445
第一章	生命年金	445
第二章	人壽保險	466
第一節	人壽保險之意義及其種類	466

第二節 純保費之計算	468
第三節 預備金之計算	478
本編應用公式	487

答案 503

附錄甲 數學原理	1
附錄乙 書中所用名詞中英文對照	1
附錄丙 計算應用表	1
表一 對數表	1
表二 倒數表	25
表三 累積倒數表	26
表四 複利終值表(期數為整數)	27
表五 複利現值表	37
表六 年金終值表	47
表七 年金現值表	57
表八 年賦金表	67
表九 複利終值表(期數不滿一期)	77
表十 實利率化虛利率表	78
表十一 期末付複雜年金至第一期末終值表	79
表十二 期初付複雜年金至第一期末終值表	80
表十三 等差變額年金終值表	81
表十四 等差變額年金現值表	86
表十五 死亡生殘表	92
表十六 人壽保險與生命年金計算表	93

表十七 人壽保險預備金計算表	95
----------------------	----

本書重要參考書：

- W. L. Hart—Mathematics of Investment
- E. B. Skinner—The Mathematical Theory of Investment
- H. L. Rietz—Mathematics of Finance
- Lovitt and Holtzclaw—The Mathematics of Business
- G. Wentworth—Commercial Algebra
- A. Barriol—Théorie et Pratique des Opérations Financières
- H. Fuzet et L. Reclus—Précis de Mathématiques Commerciales et
Financières
- A. Arraudeau—Tables des Valeurs Intrinsèques
- A. P. Violeine—Tables Pour Faciliter les Calculs des Probabilités Sur la
Vie Humaine
- A. Schlimbach—Politische Arithmetik
- M. Cantor—Politische Arithmetik
- 和田喜八—商工實務計算
- 小林行昌—高等商業數學

理 財 數 學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者，在代數學中用指數(Exponent)表之，例如 5^3 爲三個 5 連乘之數， a^6 爲六個 a 連乘之數，右上角之 3 與 6 即指數是也。 5^3 既爲三個 5 連乘之數，故其數值即爲 125，以算式表之則得：

$$5^3 = 125$$

上式中共有三數，已知此三數中之任何二數，即可求第三數，故設 x 爲所求之第三數，即可得下列三式：

$$5^3 = x$$

$$x^3 = 125$$

$$5^x = 125$$

第一式中之 x ，可將三個 5 連乘而得，故此係一乘方(Involution)問題，第二式可化爲下式：

$$x = \sqrt[3]{125}$$

式中之 x ，可將 125 開立方而得，故此係一開方(Evolution)問題，至於第三式中之 x ，則與前兩式均異，既非乘方問題，亦

非開方問題，故式中之 x ，須應用他法求得，對數(Logarithm)法者，即欲探求此未知之指數而創設之方法也。此未知之指數，在對數法中即名曰對數，而第三式中之5即名曰底(Base)，其右邊之125則名曰真數(Number)或反對數(Anti-logarithm)，對數之符號爲 $\log$ ，即英文對數一字中前三個字母也。以此符號表示，則第三式可改作下式：

$$\log_5 125 = x$$

上式中之 x ，即以5爲底125之對數，或即3，蓋5之3方等於125故也。同理：

$$\log_2 16 = 4 \quad \because 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \because 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \quad \because 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \because 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \quad \because a^5 = a^5$$

對數之意義既明，今請進而討論對數之性質，對數能化乘除爲加減，又能化乘方開方爲乘除，此則對數之特有性質，亦即對數之效用也。茲將對數之性質分述證明於下：

(一) 對數化乘法爲加法。

兩數相乘積之對數，等於兩數對數之和，即：

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \dots\dots\dots(a1)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$AB = a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \log_a AB = \log_a a^{x+y} = x + y$$

即 $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得，則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和，其證明與兩數之乘積相似。

(二) 對數化除法為減法。

兩數相除，其商數之對數，等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數，即：

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots (a2)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \log_a \frac{A}{B} = \log_a a^{x-y} = x - y$$

即 $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

(三) 對數化乘方爲乘法, 化開方爲除法.

某數 n 方之對數, 等於某數對數之 n 倍, 即:

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots (a3)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

則依對數之定義, 得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

即 $\log_a A^n = n \log_a A$

n 得爲整數或分數, 正數或負數.*

* $\sqrt[n]{A^{\frac{1}{2}}} = A^{\frac{1}{2n}}$

$\frac{1}{\sqrt[n]{A^{\frac{1}{2}}}} = A^{-\frac{1}{2n}}$

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異。例如以2爲底，則16之對數爲4；以4爲底，則16之對數爲2；以16爲底，則16之對數爲1，故須先決定對數之底，然後能求對數之值。任何數均可爲對數之底，然爲便於計算起見，數學上通用對數之底，祇有兩種，一爲10，一爲 e 。（ e 之數值爲2.71828強，參看附錄甲2）前者名曰常用對數（Common logarithm），後者名曰自然對數（Natural logarithm）或納氏對數（Napierian logarithm）。應用數學中通用常用對數，但在高深純理數學中，則以自然對數爲主，本書係應用數學之一種，故除有特別說明外，均指常用對數而言，而常用對數之底，苟無誤解之危險，亦將略而不書，故：

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0^*$$

* $a^0 = 1$

$10^0 = 1$

$$\log 0.1 = -1^{**}$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算，即由前者可化為後者，亦可由後者化為前者。兩者之關係及其換算之公式，分述於下：

(一) 10 之自然對數與 e 之常用對數互為倒數，即：

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots (a4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義，得：

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_e 10}$$

即

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$$

(二) 由常用對數化為自然對數。

以 10 之自然對數，乘某數之常用對數，即得某數之自然

** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1$$

對數, 即:

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots (a5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義, 得:

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10} A$$

即

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A$$

(三) 由自然對數化為常用對數.

以 e 之常用對數, 乘某數之自然對數, 即得某數之常用對數, 即:

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A \dots\dots\dots (a6)$$

(證) 由公式 (a5) 得:

$$\log_{10} A = \frac{1}{\log_e 10} \log_e A$$

即

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A$$

第三章 對數表之編製及其應用

第一節 對數表之編製

對數表者，根據某數爲底，用以計算各數之對數而編製之計算表也。對數有常用對數與自然對數之分，故對數表亦有常用對數表與自然對數表之別。常用對數與自然對數既有一定之關係，故由常用對數表即可編製自然對數表，由自然對數表即可編製常用對數表，而自然對數表之編製，即可根據下列之關係：

$$\log_e(n+1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \dots\dots (c1)$$

(證明參看附錄甲6)

令 $n=1$

$$\begin{aligned} \text{則 } \log_e 2 &= \log_e 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0.693147 \end{aligned}$$