中国幻方

第一期

中国幻方研究者协会主编

16阶3次幻方

陈钦梧 陈沐天 编

34	30	28	26	146	83	85	115	142	172	174	111	231	229	227	223
52	40	124	64	234	110	207	219	38	50	147	23	193	133	217	205
178	168	226	212	169	245	151	42	215	106	12	88	45	31	89	79
125	201	5	249	112	91	49	103	154	208	166	145	8	252	56	132
196	180	176	232	199	59	96	241	16	161	198	58	25	81	77	61
62	78	82	118	247	214	114	15	242	143	43	10	139	175	179	195
203	253	107	127	97	44	13	102	155	244	213	160	130	150	4	54
119	55	71	189	210	236	20	164	93	237	21	47	68	186	202	138
255	99	185	67	66	76	238	94	163	19	181	191	190	72	158	2
137	157	251	129	24	182	171	18	239	86	75	233	128	6	100	120
131	135	183	187	9	173	36	240	17	221	84	248	70	74	122	126
53	3	149	69	192	148	243	156	101	14	109	65	188	108	254	204
224	228	230	140	159	197	144	37	220	113	60	98	117	27	29	33
1	121	73	7	48	165	162	153	104	95	92	209	250	184	136	256
80	90	32	46	87	11	105	216	41	152	246	170	211	225	167	177
206	218	134	194	57	22	222	141	116	35	235	200	63	123	39	51

2006年5月15日

香港天马图书有限公司

目 录

历史回顾

理论探讨

构造方法

点滴体会

研究工具

完美幻方

素数幻方

协会信息

附 录

从神秘的洛书到幻方

李 超 (郴州师范专科学校)

1、神秘的洛书

相传在我国远古的伏羲氏时代，有一匹龙马游于黄河，马背上负有一幅奇妙的图案，这就是所谓的《河图》；有一只神龟出没于洛水，龟壳上有一些神秘的符号，这就是所谓的《洛书》。伏羲氏知道后，就按照《河图》、《洛图》绘声绘色地编制八卦，用以推算历法，预测吉凶等。

在我国的古籍《周易》、《尚书》、《论语》中都有关于《河图》、《洛书》的记载。《周易》的系辞篇里是这样记载的："河出图，洛出书，圣人则之。"这与上述传说颇相吻合。也许这一记载正是上述传说的来源或记录吧！

我国明朝的程大位也曾说："数何肇自图书乎，伏羲氏得之以画卦，大禹得之以序畴，列圣得之以开物。"意思是说："数起源于什么？它起源于河图、洛书吗？伏羲氏得到它后，用它绘制出八卦；大禹得到它后，用客观存在来规划田畴，其客观存在圣贤得到后，用来开发物产。"

那么，河图究竟是一个什么样的图案、洛书究竟是一些什么样的书写符号呢？ 这在《周易》、《论语》这些典籍中都没有记载。直到宋代，朱熹经解《周易》时，曾派他手下的学者蔡元定去四川，用高价才在民间收购到了华山道士抟传出的《太极图》、《河图》、《略书》等。其中《太极图》与现在流传的太极图相同，而《河图》《洛书》则是由一些圆圈点构成的图形，洛书的形状如图 1 所示。

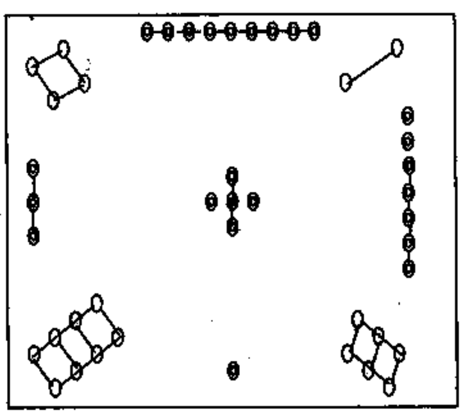

图 1

二	九	四
七	五	三
六	一	八

图 2

与公元前一世纪时我国汉代的《大戴礼》一书中的九宫图相合。所谓九宫，就是将一个正方形用两组与边平行的分割线，每组两条，分割成的九个小正方格。每个小方格分别填入从 1 到 9 这九个自然数中的其中一个，不同的方格填入的数不同，使得三横行中每一横行三个数的和（叫行和），三纵列中每一纵列三个数的和（叫列和），两条对角线中每一条对角线上三个数的和（叫对角和）都相等，等于（1+2+3+4+5+6+7+8+9）/ 3=15。

这样得到的图就叫九宫图。与洛书相应的九宫图如图 2 所示。

2、杨辉的纵横图

我国南宋时的杨辉，在其 1275 年所著《续古摘奇算法》一书中所载的洛书正是图二。他还编出了以下口诀帮助记忆："戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足（五居中央）"，并给出了如下的造法："九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出"。

杨辉将洛书类比到更多个数的情形。他给出了四四图，五五图，六六图，七七图，六十四图，九九图，百子图，并提出一个新名词，把它们统称为纵横图。对于四四图，他给于了如下的说法："十六子依次四行排列（图 3），先以外四角对换：一换十六，四换十三（图 4）；后以内四角对换：六换十七，七换十。横直上下斜角皆三十四数（图 5）"（如图 4 所示，原图中是汉字形式的数字）。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图 3

16	2	3	13
5	6	7	8
9	10	11	12
4	14	15	1

图 4

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 5

这里，杨辉实际上提出了一种利用依自然数由小到大的顺序排出的方阵（叫自然方阵）进行对换造双偶数阶纵横图的方法，给后继者留下了一份宝贵的思想财富。但可惜的是，杨辉只停留在个别纵横图的构造上，没有上升成一般的理论。他所造出的百子图，虽然每一个行和，每一个列和都等于 505，但两对角线和不等于 505，直到我国清代的张潮（1650—？）费了九牛二虎之力才造出第一个两对角线和也是 505 的百子图。

3、造奇数阶幻方的楼贝法

我国的纵横图通过东南亚国家，印度、阿拉伯传到西方。由于纵横图具有十分奇幻的特性，西方把纵横图叫作 Magic Square，翻译成中文就是"幻方"或"魔方"。现在我们一般采用"幻方"这一术语：从 1 到 n^2 这 n^2 个自然数所排成的 n 横行、n 纵列的方阵，如果每一行 n 个数的和（行和），每一列 n 个数的和（列和），每一对角线 n 个数的和（对角和）都等于 $S_n=(1+2+3+\cdots+n^2)/n$，则称这一 n 阶方阵为一个 n 阶幻方，S_n 称为幻和。

西方有籍可查最早出现幻方的是杜勒（Albrecht Durer）于 1514 年所作著名版画《忧郁》中的那个四阶幻方（图五）。这个幻方常常被复制到金属佩戴物上，作为人们用以驱邪除魔，消灾避祸的护身符。据说，即使在第二次世界大战以后，在阿拉伯、印度等地少年中，仍有人佩戴这种护身符。

西欧在十六，十七世纪时，构造幻方非常盛行。十七世纪，法国路易十四世国王对构造幻方有着浓厚的兴趣，他专门派 De · La· Loubere（楼贝）出使暹罗（泰国）(1687-1688)，他在暹罗学的构造奇数阶幻方的一种统一的方法，人们称之为楼贝法。用这个方法构造 7 阶幻方的步骤是：（ i ）在两对角线交点处正下方的第一个位置（即第五行第四列处）填上 1.（ ii ）依主对角线方向往下，依次在下一行且下一列处填入 2 和 3（即第六行第五列处填 2，第七行第六列处填 3)。(iii）由于第七行后再无下一行，此时可以把第一行看成第七行的下一行，于是在该行第七列处填上 3 的后续数 4。(iV）由于第七列后无下一列，此时又

将第一列作为第七列的下一列，于是在第二行第一列处填上 4 的后续数 5。(V) 再继续依主对角线方向往下，依次在下一行下一列填上 6，7（即第三行第二列处填 6，第四行第三列处填 7)。如果将第七列剪下来，拼到大正方形的左边，构成的正方形，则填好的这七个数，从上到下依次为为 4，5，6，7，1，2，3；它们刚好位于新正方形的主对角线上。因此，对于原正方形来说，我们也称这七个数被排在第一条泛主对角线上，但这条泛主对角线被折断了，变成了两段. (VI) 以下再将后面的七个数：8，9，10，11，12，13，14，依次排在每二条泛主对角线上，但要使带头的 8 排在 1 那个数的下一行、前一列处(即第六行第三列处)，使 1 和 8 位于第一条泛副对角线与副对角线平行，在紧挨着的副对角线的下面。以后再依次沿主对角线方向依次填上 8，9，10，11，12，13，14。(Ⅶ) 以下再将后面的七个数：15，16，17，18，19，20，21 依次填写在第三条泛主对角线上，但要使起头的 15 排在 8 那个数的下一行前一列处（即每七行第二列处），使 1,8,15 位于第一条泛对角线上。(Ⅷ) 仿上，依次将后面的数每七个数组填入第四、五、六、七条泛主对角线上（其中第四条泛主对角线就是主对角线)。

按搂贝法可以造出任意一个奇数阶幻方来，而且造起来很方便，不过这个方法并不是搂贝本人提出来的，而且他也没有给出一般的理论上的证明。

4、欧拉的正交拉丁方

第一个对幻方从理论上进行研究的是数学巨星欧拉（EuLer Leonhard, 1707—1783)，1779 年，他研究 36 军官问题时，发现幻方与拉丁方法之间存在一定的联系，提出了用两个正交拉丁方合成一个幻方的方法。

36 军官问题是普鲁士国王腓特烈大帝在一次检阅前提出来的，他要求将来自六个不同部队，六种军阶各一名的总共 36 名军官排成六行、六列，使得每一行都既有各部队的代表，又有各军阶的代表。

结果，检阅的总指挥急得团团转，却无论怎样也无法满足要求。后来，他们只得去请教数学家欧拉。

欧拉用六个大写拉丁字母（A，B，C，D，E，F）表示六个不同的部队，六个小写拉丁字母（a, b, c, d, e, f）表示六种不同的军阶，这样，每一名军官就可以用一对有序拉丁字母对表示了。如（A，a）就表示 A 部队的军阶是 a 的那一名军官，于是问题变为将 36 对有序拉丁字母对排成六行六列的方阵，使得每行、每列中，A、B、C、D、E、F、a、b、c、d、e、f 中的每个字母都出现一次。这个方阵可以看出是由两个方阵合成的，一个方阵由 A，B，C，D，E，F 这六个大写字母各重复出现六次组成，另一方阵由 a, b, c, d, e, f 这六个小写字母各重复六次组成，在每个方阵的每一行、每一列中，各个字母恰出现一次。这种由拉丁字母组成的方阵就叫拉丁方。当然，用拉丁字母作记号并非本质的，也可以换成任何其它的记号。一般来说，在由 n 个不同的符号，每个符号出现 n 次所排成的 N 阶方阵，若在这个方阵的每一行、每一列中，n 个符号中的每一个都恰好出现一次，这样的方阵就叫 n 阶拉丁方。由两个 n 阶拉丁方可以这样合成一个由有序符号对组成的方阵，使得每个有序符号对的第一个符号和第二个符号分别是第一个和第二个拉丁方中同一位置的符号。如果所合成的有序对方阵中的任何两个有序对都不同，则称原来的两个拉丁方正交。这样一来，问题就变为是否存在

六阶正交拉丁方的问题了。

欧拉在作了多种尝试之后，断言：六阶正交拉丁方是不存在的。但是，他未能给出严格的证明，他进而提出一个猜想："任何阶数是奇数的2倍的正交拉方都不存在"。直到1900年，塔里（Tarrg）才用完全归纳法很吃力地证明了：六阶正交拉丁不存在。但欧拉的这个猜想后来被否定。

欧拉未能严格证明六阶正交拉丁方的不存在，但发现了拉丁方和幻方之间的一种联系。他发表了一篇题为《On A New Tgpe of Magic Square》(《一种新型幻方》) 的论文，提出了用正交拉丁方合成幻方的方法，这是在幻方构造理论上的一大贡献。在这篇论文中，他举了如下简单的例子（图6）说明。

2	3	1
1	2	3
3	1	2

+

0	6	3
6	3	0
3	0	6

=

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 6

欧拉对正交拉丁方的研究，原本起源于解决一个游戏数学式的三十六军官问题，但想不到：到了二十世纪，这研究派上了大的用场，它被广泛用于设计有关多因素的试验方案，即所谓正交设计。据说，当今的日本人，若没有掌握正交设计的方法就没有资格当工程师。

不过，欧拉用正交拉丁方来构造幻方的方法，局限性还是很大的。比方，由于六阶正交拉丁方不存在，那么用欧拉的这一方法连六阶幻方都造不出，而早在五百多年前，我国的杨辉就已经成功地造出了六阶幻方。

5、陶照民、欧阳录、舒文中等人的贡献

幻方虽是一个非常古老的课题，但是它的研究进程却相当缓慢，二十世纪六十年代，有人用数论的方法证明了凡阶数大于2的幻方都可以造出，但没有给出具体的造法。

1983年，我国南京的陶照民先生在我国国家一级刊物《应用数学学报》上发表了一篇名为《偶阶幻方和奇阶正交拉丁方的构造方法》的论文。在这篇论文中，他将偶数阶幻方分为两类，一类叫偶偶阶幻方（即4K阶幻方，K＝1，2，3…）。另一类叫奇偶阶幻方（即4K+2阶幻方，K=1，2…），他先给出任意偶偶阶幻方的造法，然后又给出了将偶偶阶幻方镶边造奇偶阶幻方的方法。以下以8阶幻方为例，说明陶照明所给偶偶阶幻方的造法（图七）.1）先将前8个奇数1，3，5，7，9，11，13，15，按从左到右的顺序依次填入第一行的八个小方格。2）再将接下来的8个奇数：17，19，21，23，25，27，29，31，按从右到左的的顺序依次填入第二行的八个小方格。3)再将后面的8个连续的奇数33，35,…47，按从左到右的顺序依次填入第三行。4）再将更后面的8个连续的数按从右到左的顺序依次填入第四行。5）依次将前8个偶数：2，4…，16，按从右到左的顺序填入第5行。6）将后面的8个连续的偶数按从左到右的顺序依次填入第6行。7）将更后面的8个连续的偶数按从右到左的顺序依次填入7行，8）将再后面的8个连续的偶数依从左到右的顺序依次填写入8行。此时，得到图七左边的方阵。9）将所得方阵的第2、3、6、7列中的各数从上到下的顺序完全颠倒过来，得到图7右边的方阵，它就是一个8阶幻方。

1	3	5	7	9	11	13	15
31	29	27	25	23	21	19	17
33	35	37	39	41	43	45	47
63	61	59	57	55	53	51	49
16	14	12	10	8	6	4	2
18	20	22	24	26	28	30	32
48	46	44	42	40	38	36	34
50	52	54	56	58	60	62	64

1	52	54	7	9	60	62	15
31	46	44	25	23	38	36	17
33	20	22	39	41	28	30	47
63	14	12	57	55	6	4	49
16	61	59	10	8	53	51	2
18	35	37	24	26	43	45	32
48	29	27	42	40	21	19	34
50	3	5	56	58	11	13	64

图 7

1988 年我国长沙的欧阳录先生发表了一篇题为《偶数阶幻方》的论文。在这篇论文中，欧阳录先生继承了欧拉用合成法构造幻方的思想，但打破了欧拉用拉丁方这一框框的局限，提出了原幻方这一新的概念，对拉丁方这一概念作了拓广，使合成法构造幻方从拉丁方的桎梏中解放出来，获得了新的生机。为了造出原幻方，欧阳录先生又通过将自然方阵拆成两个方阵，提出了原方 A 和原方 B 的概念，并继承了杨辉用对换构造幻方的思想方法，提出了利用对换幻和正交的原幻方来合成的新方法，这一新方法将欧拉和杨辉构造幻方的思想精髓熔为一体，为构造幻方展现了广阔的前景。在这一新的思想方法的指导下，对于 4K 阶幻方，欧阳录先生一举给出了两种新的造法，对于 4K+2 阶幻方给出了一种异于镶边法的新造法。

图 8 下图可大体上体现出欧阳录先生造偶数阶幻方的思想方法。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

自然方阵

=

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

原方 A

* 4 +

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

原方 B

3	0	0	3
1	2	2	1
2	1	1	2
0	3	3	0

原幻方 A

* 4 +

4	2	3	1
1	3	2	4
1	3	2	4
4	2	3	1

原幻方 B

=

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

幻方

图 8

1991 年，舒文中先生出版了自己的专著《幻方》一书。舒文中先生是广西宾阳中学的一位数学老师，他潜心研究幻方几十年，积累了丰富的材料，于 1981 年整理写出《幻方》一书初手稿。手稿刚写成，即被广为流传，并得到美国数学界的重视，美国数学会接纳他为会员。日本的熊本大学也邀他去讲学。1988 年，广东科技出版社邀请中山大学的陈仲美先生承担此书的编辑工作。陈仲美先生对原稿进行了加工、改写，加强了阐述和论证，部分内容作了较大的增删和修正。该书分两大篇，第一篇讲述平面幻方，第二篇讲述立体幻方。在第一篇中，讲述了构造幻方的调数法，加数法，正交拉丁方法，马步法，对于奇数阶幻方的构造还介绍了对角圆简填写法（实际上就是搂贝法）；对于偶数阶幻方构造还介绍了葫芦形

法和变 K 阶幻方的方法。另外还介绍了特殊幻方广义幻方和幻方群，第二篇介绍了六面幻方的定义，偶阶六面幻方的作法，实心立体幻方的定义及其作法。该书汇集了古今有关幻方方面的不少资料，也含有作者本人的研究成果，是近年来国内第一部有关幻方的系统著作。另外我国内蒙的李立先生，上海的谈祥柏先生等，也对幻方构造的理论作出了一定的贡献。

6、关于幻方课题的再探索

古老的幻方课题开发至今，虽然有不少人已取得了或大或小的进展，但其中值得探索的东西仍然很多很多。比方：单就平面幻方来说，对给定的 n=6，究竟有多少个 n 阶幻方的问题，至今无人解决，当 n>2 时，虽然现在已经能够造出任意的 n 阶幻方，但造法不多。一般只能满足于给出一种造法，多的也只是 3 到 4 种造法。而且这些造法显得很零散，往往带有偶然巧合甚至盲目拼凑的色彩，缺乏理论的高度。对于给定的 n>5，按照以上提到的方法构造幻方，只能造出少数几种幻方，至于造出所有的 n 阶幻方那更似乎是很遥远的事。

那么，怎么进行探索呢？对此，我只能谈一谈个人一点小小的体会。我想，一是可以从对已经造出的幻方和已有的造法进行再思考入手，一是乾脆从最初的定义入手，进行探索。对已经有的幻方和已有的造法进行再思考可从几个方面进行。一是对已有的东西完成由知其然到知其所以然的转化，抓住它最本质的东西，尽量排除其它非本质的东西，这样，就可以使原来的造法上升到理论的高度，并由一种方法升到一类方法；一是对出现有方法的疏漏之处或不严密之处或不完美之处，使之科学化、严密电码化、完美化；一是分析几种方法的共同点、不同点，找出它们之间的联系，看能否将它们统一成一大类方法；一是对有的幻方和已有的方法从多种角度和多个侧面去观察、分析、思考，将结论加强，将方法拓广；一是将现有的方法采用另外的表达形式，仔细进行观察，从中悟出新的造法。

如：1769 年，美国著名的物理学家和政治学家 Bengamin FrankLin（最先揭示雷是由放电现象引起的科学家）曾作出两个具有许多奇妙特性的“半幻方” （由于这两个方阵只是行和与列和等于幻和，两对角和并不等于幻和，因而只能叫做半幻方），其中一个是八阶的、另一个是十六阶的。它们却具有异彩纷呈的特性。它们的每一个二阶子方阵的四个数的和都相等，而且在将九块同样的方阵所拼接成的大方阵中，也具有这同一性质；它们的主对角线的上半段（或下半段）所拼成的折线上的各数之和都为幻和，而且将这条折线在所拼接成的大方阵中任意向上或向下，向左或向右移动整数格后，“折线和”仍等于幻和。难怪有人曾经将其中的十六阶半幻方赞誉为“令人惊叹不已的或最伟大的幻方”。FrankLin 本人也自豪地认为“这 16 阶幻方是所有幻方制作者所做出的幻方中，最神奇的一个”。可惜 FrankLin 只给出两个这样的幻方，既没有揭示它的造法，也没有指出第三个这类幻方是否存在。以后两百多年来，一直无人对这个问题给出明确的解答。1996 年，这个问题引起了我的兴趣，我在对给出的两个幻方进行了仔细的观察，分析和研究后，发现有无穷多个这类幻方，我给出了任意 8K（K∈N）阶幻方的造法，严格证明，以及将它们调整成幻方的方法。

本文选自《幻方大世界》网站

我国现代幻方研究概况

高 治 源

幻方是现代组合数学问题，它起源于我国《易经》中的河图洛书。幻方以多样的变化、巧妙和谐的结构体系，迸发出耀人的数学美的光辉，引起众多学者探索的好奇心。尤其在我国，研究工作十分活跃，人才辈出，取得了许多领先世界水平的新成果。下面，我们在获得许多材料的基础上，对我国现代幻方研究情况作一简要概括，以此献给国内研究幻方的朋友们。

近十几年来，我国出版的幻方书籍已见到十多本（见文 1—10），在许多杂志上不断刊载对幻方研究的新成果（文 11—20），几乎年年召开的国际、国内“组合数学研讨会”，均有许多幻方研究的论文进行交流。1996 年 3 月 29 日，中央电视台报道了谈祥柏先生的《奇妙的幻方》一书获国家科普奖，这说明国家对幻方研究的重视，也是幻方爱好者高兴的一件大事。在幻方研究的历史的长河中，我国从未有像现在这样，有这么多的学者对幻方进行艰苦的探索，有那么多的成果光耀世界，我们迎来了幻方研究的春天。

80 年代前，比起国外，在幻方研究方面我国失去了优势。1891 年法国数学家里利发明了平方幻方，1958 年美国数学家霍纳造出了双重幻方，随后美国的幻方专家亨特知道了一个 128 阶三次幻方，几年以后，加拿大多伦多大学考克斯特教授又知道了一个 64 阶三次幻方，由于阶数太高，他们未能将成果公之于众。在这种落后的局面下，我国学者奋起直追，艰苦探索，到了 90 年代不仅在上述尖端领域内超过了国外，而且研究范围十分广阔，形成多种幻方的研究体系。

1、幻方似高峰，谁攀登得最高？

80 年代前，平方幻方与双重幻方在我国一直是一项空白，首先向此冲锋的是河南封丘县农民梁培基（现在是该县科协干部），他的双重幻方的论文在《数学的认识与实践》上发表后，成了知名人士。这个被称为“农民数学家”的幻方研究者具有传奇的经历，他构造出积和都最小的 8 阶双重幻方，《自学》杂志称赞他为“算盘珠打出的世界之最”，他与合肥顾同新合作，获得 4K 阶与 PK 阶双重幻方的构造原理。在他与顾同新联名发表的《平方幻方和双重幻方的构造》中，揭示了平方幻方与双重幻方在构造原理的相通之处。后来辽宁刘志雄用完美幻方的结构研究平方幻方的构造取得成功，西安孙友则用函数模型研究这两类幻方，南京丁宗智研究出多种配对法来构造平方幻方，延安高源则用正交的字母拉丁方来构造。福州苏茂延考察了阶数为 100 以内的平方幻方问题，结论是有可能编成不同阶数的 60 多个平方幻方，但有的幻方所用数字不连续。

对于三次幻方的研究而言，应该是阶数越低越好，在某种意义上来说，这也是一场国际性的奥林匹克竞赛。在近几年的竞赛金牌榜上，福州苏茂延、上海宝山戴宏图、贵州施学良

成为金牌的得主，他们在同期内都构造出 32 阶三次幻方，优于亨特和考克斯特所了解的结果，居于世界领先水平。此外，施学良在他的幻方专著《幻方与魔数阵》中还给出了一个 81 阶三次幻方，这在奇阶三次幻方的编造上，也是一个世界之最。施学良创立的差动易位法还是编造四次以上幻方的原理，编造四次幻方、五次幻方，对于他来说只是书写面积问题而不是方法问题，苏茂延已能编成 243 阶和 256 阶四次幻方，并从中得到相应阶数的平方双重幻方，即幻方各线和、平方和、积都相等，十分奇妙。

2、幻方的编造原理

人们一直在寻找任何阶幻方的各种编造方法，近年来我国学者获得了许多编造方法，难以穷举，但从理论的高度上来看，我们可归纳出下列几个主要的编制原理。

1、幻心加幻框原理，用低阶幻方加一个边框扩展成大两阶的幻方。

2、正交拉丁方原理，正交的两个特定的拉丁方，可用公式 $y = n(a-1)+b$ 换算成幻方。

3、对调原理。将循序数字方阵，进行不同方式的对调，如阵列变换法、对称对调法，阴阳平衡法、三向对调法等。

4、平移补空原理。如“四维挺出”法，奇偶数分填平移法，环形和双曲线平移补空法等。

5、填对角线原理。按照某一规律将数字填在各条泛对角线上。

6、差值互补原理。满足 $a_{ij} + a_{tu} = n^2 + 1$ 的数组对（a_{ij}，a_{tu}）称为偶值单元，探索多个偶值单元的组合变化及其内在关系，用以揭示任何幻方的结构体系（见文 14）。

7、数组布阵原理。将预先有规律分类的数组，布局在方阵中，然后调整成幻方。

8、构置幻基方原理。先构置两个具有等和特性的数字方阵，然后合成幻方。如北京廖福成构造完美幻方的辅助矩阵。

9、函数模型。用函数式代替幻方各格数字，然后通过不同的变量获得不同幻方。

10、砌块组合原理。对于任何合数 $n = ps$，n 阶幻方可用 p 阶幻方（或方阵）和 s 阶幻方组合而成。特别是 $n = 4m + 2$ 时，砌块为田格和奇阶幻方。

3、完美幻方

完美幻方（又称纯幻方、泛对角线幻方等）因所有的泛对角线上数字和也等于幻和而倍受人们的喜爱。如果不受连续自然数的限制，当 $n \geq 4$ 时，n 阶完美幻方均可编造出来。上海徐桂方的《纯幻方的构造原理和方法》是专论完美幻方的著作。另外，北京李立、廖福成分别撰文研究完美幻方（见文 11、12）。当时，廖福成得出至少可作 $2(n!)^2$ 个 n 阶完美幻方，他用来构造 sk 阶完美幻方的辅助矩阵，十分重要，与幻阵有关，延安高源以此思路获得 $4m + 2$ 阶完美幻方的构造方法（数字不连续）。丁宗智在 $4m+3$ 阶循序数字方阵中，划掉中行中列，用来构造 $4m + 2$ 阶完美幻方，苏茂延则将四个奇阶完美幻方交替进行布局，可

迅速得到 4m + 2 阶完美幻方。高源用正 n 边形的对角线原理，可将普通奇阶幻方变换成完美幻方（n≠3k），他在完美幻方中发现了大量的等幻和的"星座"以及同余公式下的数字行走轨迹，挖掘出了完美幻方中令人惊讶的美妙特性。3k 阶完美幻方通常用正交拉丁方编制，虽许多书上均有特例，但研究的不够深入。值得指出的是完美幻方的叫法竟有七、八种之多，我们看到了国际上流行的英文称呼"perfect magic square"中的 perfect 是完美、十全十美、纯然之意，因而用"完美幻方"这一叫法便于与国外交流。

4、优化幻方

使幻方具有更独特的性质，称为幻方的优化。在我国出现了大量的优化幻方，如子母幻方、完美正方形幻方，象棋幻方、数形美幻方、纪念性幻方、开天窗幻方、间隔幻方、对称幻方、k 次优化幻方、旋涡摄动幻方、雪花幻方、黑洞数幻方、菊花数幻方、水仙花数幻方、金蝉脱壳幻方、反序数幻方、智慧数幻方、巧数幻方、回文数幻方、自生数幻方、素数幻方等等。还有许多将数学内容与幻方相联系的幻方，如复数幻方、分数幻方、根式幻方、三角幻方、方程幻方等。

湖北天门张道鑫对素数幻方有研究。图 1 是他构造的一个素数幻方，将各数都去掉个位数字 9，仍是素数幻方。孙友、舒文中均对素数幻方有过深入的探讨，并都有孪生素数幻方对的成果。施学良编成 15 阶和 16 阶同心素数幻方，并有孪生素数完美幻方对的重要成果。

图 2 是自生数幻方（高源作），其各数的奇次幂的末三位数仍是原幻方。图 3 是 371 水仙花数幻方（苏茂廷作），各线四数累次求各位数立方和，总可得四种水仙花数 371、370、407、153。这种与趣味数有关的幻方在文献 10 中有许多。

2579	4919	599
719	2699	4679
4799	479	2819

图 1　S = 8097

625	1	499
249	375	501
251	749	125

图 2　S = 1125

43	129	89	110
125	74	99	73
126	85	113	47
77	83	70	141

图 3　S = 371

5、幻图

在图形上填数字，使之具有某种和相等的规律，这种数字图统称为幻图。我国学者对幻图的研究十分广泛，主要包括积幻方、反幻方、幻圆（半径类、直径类、交叉类）、幻立方（线、面、体）、幻阵、半幻阵、幻形、幻星、弧阵、花形幻方、汉字幻阵、五种幻正面体、幻菱面体，幻复合面体、连环图、八阵图、聚六图等。

湖北枣阳高金生对幻圆有过探讨。北京高新慧、高学峰善作弧阵。高源已得四轮平方幻圆、八轮三次幻圆的新成果，苏茂廷有三轮平方幻圆和三轮双重幻圆的新成果。施学良的

96 万字巨著是研究幻方与各种魔数阵的专著。许多学者都对幻立方作过深入的研究，如李立、丁宗智、张道鑫、孙友、舒文中、沈锡南、施学良。孙友提出了多元幻方的概念，这对直径类幻圆及组合幻方的研究有着积极的影响。

6、未解决的几个问题和有关的猜想

我们最近看到日本幻方专家阿部撰写的文章《幻方中未解决的问题》发表在美国数学会主编的《数学评论》（1994 年）杂志中，从中可看到日本幻方研究的近况。下面将我国幻方研究未解决的问题归纳出来（基本上包括日本的问题），便于幻方研究者进行探索。

1、计数问题。n 阶幻方有多少个？n 阶完美幻方有多少个？n 阶平方幻方、双重幻方有多少个？

2、对应图。用直线连接和为 n^2+1 的两个数所在的方格，就是该 n 阶幻方的对应图。施学良在他的幻方专著中给出了四阶幻方仅有的 12 个对应图。那么 n 阶幻方共有多少个不同的对应图呢？日本幻方学者在这方面有较深的研究。

3、子母幻方。编造一个 n 阶幻方使其包含 3 至 n—2 各阶子幻方。在 n 大于 16 时，日本人未能解决。

4、素数幻方。能够编造任意阶的素数幻方吗？能够编造任意阶完美素数幻方以及孪生素数幻方对吗？平方素数幻方是否存在？

5、平方幻方。对于什么样的 n，能够编造 n 阶平方幻方。打破连续自然数的限制，n 阶平方幻方都能编造成吗？完美平方幻方是否存在？图 4 是十阶完美幻方兼十阶平方幻方（苏茂挺作），图 5 是八阶完美幻方兼四阶田格完美幻方（高源作），即以田格作为一个单元，其四行、四列及 8 条泛对角线上的各单元 16 个数的平方和皆等于 22360。这两个幻方都是平方完美幻方的逼近。

10	117	35	128	155	145	120	31	105	4
51	18	55	134	157	169	140	63	22	41
146	28	118	5	114	108	9	130	38	154
131	167	23	54	48	44	64	17	159	143
113	121	12	156	29	37	144	2	127	109
61	43	168	26	133	141	14	158	49	57
27	11	153	106	126	122	116	147	3	39
16	132	40	161	62	56	165	52	142	24
129	148	107	30	1	13	36	115	152	119
166	65	139	50	25	15	42	135	53	160

图 4　S = 850

1	52	14	57	7	54	12	63
39	22	44	31	33	20	46	25
62	8	55	11	60	2	49	13
28	34	17	45	30	40	23	43
10	59	5	50	16	61	3	56
48	29	35	24	42	27	37	18
53	15	64	4	51	9	58	6
19	41	26	38	21	47	32	36

图 5　S = 260

6、高次幻方。寻找阶数较低的高次幻方，如 27 阶三次幻方，64 阶四次幻方。

7、等幻和星座。n 阶幻方中一种固定形状的单元块，若所含的 n 个数之和都等于幻和，称为和星座，若所含 n+2k 个数与另外 2k 个数两者诸数之和的差等于幻和，称为差星座。这

种性质一般在完美幻方中表现出来，那么一个n阶完美幻方中共存在多少个星座？

幻方在电子计算机、人工智能、图论、对策论、实验设计、组合分析、博弈论、工艺美术等领域都有出色的应用。因此我们广大幻方爱好者应加强联系，在现有成果的基础上，不断进取，在幻方这个奇妙的研究领域取得更大的成绩。

参考文献（文献作者的通讯地址尽可能采用现在的，以便于读者们与之联系）

1、唐侠（广西南宁二中）:《幻方与数阵趣谈》，科学普及出版社，1985年6月.

2、刘志雄:（辽宁盘锦市于楼辽河油田第二职工医院工会）:《奇妙的组合——幻方》，中国广播电视出版社，1991年5月.

3、舒文中（广西宾阳中学）:《幻方》，广东科技出版社，1991年10月.

4、孙友（西安市铁路分局南郊住宅157栋2门2号）:《幻方专辑》，纺织基础科学学报，1992年10月.

5、丁宗智《幻方》，东南大学出版社，1992年10月。《幻方的秘密》，油印稿.

6、陈重穆（西南师大数学系）:《幻方》，西南师范大学出版社，1994年10月.

7、徐桂芳（上海广元西路84弄32号102室）:《纯幻方的构造原理和方法》，西安交大出版社，1994年12月.

8、谈祥柏（上海宝山区华灵路82弄25号202室）:《奇妙的幻方》，山东明天出版社。

9、施学良（贵州省都匀市都匀开发区枣元小区10129信箱）:《智力王国 —— 幻方与魔数阵》，贵州教育出版社，1995年10月.

10、高源（陕西延安教育学院）:《奇妙的幻方》，陕西师范大学出版社，1995年10月.

11、李立（北京联合大学）:（1）幻方三定理，（2）全对称幻方三定理，（3）6M±1阶全对称幻方的一些构造方法，（4）用第4类四阶等值全对称砌块幻方构成的4N阶全对称幻方。

12、廖福成（北京科技大学数力系）:（1）关于奇数阶泛对角线幻方的作法，（2）从S×K矩阵构造SK阶泛对角线幻方，（3）泛对角线幻立方的计算机实现.

13、苏茂挺（福州商业汽车运输公司）:（1）奇妙的32阶三次幻方，（2）优化幻方（十多副）.

14、沈锡南（江苏无锡恒通电度表厂）:（1）差值互补原理，（2）差值互补原理应用一、二、三.

15、张道鑫（湖北天门竟陵镇四牌楼街75号农机局院内）:（1）编制素数幻方，（2）构造8阶幻立方的一种方法。

16、高金生（湖北枣阳鹿头高中）:（1）论杨辉九阶幻方，（2）幻圆、双重幻圆及幻球.

17、潘林森（重庆师范学院数学系）:（1）幻方分层计算法，（2）幻方递推构造法.

18、梁培基（河南省封丘县科协）、顾同新（合肥市西郊科学岛1110号信箱）:（1）平方幻方和双重幻方的构造，（2）4K阶与PK阶双重幻方的构造.

19、高新慧、高学峰（北京西便门西里一楼208号）:（1）八弧阵，（2）六角阵，（3）天神棋.

20、丁宝训（北京市蓝旗营住宅小区12楼5门502号）: 人人学会编幻方.

——本文原载延安教育学院学报1996年第2期

哪些成果可以领先于世界?

高 治 源

最近，我在网上与许多国外幻方专家进行了频繁的交流，从而了解了世界范围内幻方的研究水平。经过比较，我认为我国的幻方研究确在国际上站了一席之地，有许多成果领先于世界。为了将我国的幻方成就推向世界，我已创建了英文版的中国幻方网站(http://www.zhghf.net/china)，并已与法国、德国幻方网站互相连接，我已经将国外的幻方爱好者领进了国门，但要让他们在中国的观光留下美好的印象，我们必须准备最精彩的幻方成果，让他们欣赏。我在网站上收录了23个成果，有许多成果，国外幻方专家赞叹不已，但也有许多成果国外早就有了。通过我的了解，我认为以下幻方成果，是国际上暂时没有的，如果你有，就可以称为领先于世界水平的重大成就。

1. 三次幻方。32阶三次幻方，在我国可以提到的名字是苏茂挺、俞润汝、施学良、钱剑平、刘霞、郭先强、吴硕辛。其实，这个成果在国际上是美国William H. Benson 在1976年就构造出来了。我们算是落后了，但有这个成果的国家不多，我国的成果以丰富多彩让世人瞩目。64阶三次幻方施学良、王忠汉已有成果，法国的General Eutrope Cazalas 先生在1933年构造成。81阶三次幻方，只有施学良的成果，国际上还没有见到，但我们的工作必须将他的成果推出去，才能走向世界。128阶三次幻方法国人Gaston Tarry 于1905年构造出。三次幻方的最好的结果是12阶三次幻方，中国的高治源和潘凤雏联手合作，通过共同策划，用电脑搜索得到这个幻方。但国际上公认的第一个发现者是德国的 Walter Trump先生，我国的成果只能排为第二了。要想在这方面有新的突破，从那里着手呢？我估记有可能存在十四阶、十五阶三次幻方，低于十二阶的不可能存在。16阶三次幻方由我国的陈钦梧、陈沐天在2005年构造成功的，为我国幻方发展作出了重要贡献。从他俩的研究体会中，我们可以看到，18阶三次幻方、24阶三次幻方、27阶三次幻方是有可能容易构造成的。

2. 四次幻方。 256阶四次幻方，是由高治源在2003年11月应用吴硕辛的mi(q)语言搞出的成果，在2004年，潘凤雏、苏茂挺又搞出243阶四次幻方，这个成果已被世界公认为四次幻方最好的成就。但要超过这一成就，必须搞出128阶四次幻方、64阶四次幻方、81阶四次幻方。

3. 五次幻方。1024阶五次幻方的成果是法国的Christian Boyer - André Viricel 先生所创，创造于2001年，但实际上，我国的郭先强先生，吴硕辛先生都可以在九十年代制造出来，只是没有通过电脑实现。实际上国际上这些大幻方，都是通过电脑验证后推广的，也只能通过网络进行交流，才能让大家承认。因此，有这种能力的幻方朋友，必须迅速用电脑实现其结果，不能空喊。理论的研究是重要的，但真正的幻方成果也要争取国外的承认。2003年李文、郭先强分别构造成功了729阶五次幻方，这个成果已被世界公认为5次幻方中最好的成就。但要超过这一成就，必须搞出512阶5次幻方、256阶5次幻方、243阶四次幻方。512阶五次幻方是我们应该首先努力的方向。

4. 高次广义幻方。李文的高次广义幻方公式，确实很好，我们应注意研究。但我希望多搞出一些产品来，十六阶广义三次幻方，由李文、郭先强、苏茂挺几乎同时获得。36阶五次准幻方在我国由郭先强首先获得，这是一个了不起的成果，但国外有人在1991年就构成一个，因而郭先强的成果只能是中国之最。我们盼望得到二十五阶广义四次幻方，这是一项空白。但要构成它，只需获得4组5数4次等幂和数环即可，现在还没有这个结果啊。49阶广义7次幻方也是应该研究的方向。

5. 平方幻方。平方幻方最早的开创者是法国G. Pfeffermann先生，他在一八九〇年就构造成功八阶和九阶平方幻方。现在平方幻方的成果有三阶平方数幻方、三阶二元平方幻方，四阶、五阶行列平方幻方、六阶广义平方幻方刚刚诞生。七阶接近的平方幻方只差一行一列，

国际上 10 阶—20 阶只差 18 阶未诞生。21-100 阶的平方幻方有 24、25、27、28、32、35、36、40、45、48、49、64、81。国际上平方幻方领域内中国幻方爱好者的成功最多。

6. 六阶幻方有多少？这是国际幻方难题。我们能通过电脑解决吗？我觉得我们用电脑多人联手，可以解决。

7. 苏茂挺的 18 阶、32 阶完美平方幻方是国际友人称赞的好幻方，因为他在完美幻方上是一个新的突破，这与完美幻方兼平方幻方不同。下一步我们希望得到各阶的完美平方幻方，以及完美三次幻方，即各行各列、各条泛对角线都满足三次等幂和的要求。

8. 王忠汉发动的对角线优化幻方的研究，现在看来还是很有意义的，李文的十三阶 7 次优化幻方，得到国外幻方友人的赞许。

2003 年 3 月 11（本文选自中国幻方网站），2006 年 4 月 10 日修改。

幻海拾贝

平方幻方最新进展

Fredrik Jansson 构造　高治源提供　2004 年 1 月构造

十阶平方幻方

										505
2	19	70	1	66	74	73	60	68	72	505
58	77	15	3	65	4	67	69	71	76	505
62	63	82	75	61	59	79	6	5	13	505
49	18	14	78	98	40	25	96	43	44	505
94	41	27	42	35	91	21	95	37	22	505
93	39	23	38	31	90	33	30	29	99	505
34	100	36	83	45	24	26	28	97	32	505
8	85	64	57	7	56	80	48	16	84	505
54	11	86	47	87	12	92	20	50	46	505
51	52	88	81	10	55	9	53	89	17	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

十一阶平方幻方

											671
84	80	88	2	82	10	81	74	1	86	83	671
53	114	118	35	47	26	27	55	58	113	25	671
119	45	40	51	116	38	42	29	33	117	41	671
21	109	20	66	60	37	115	111	54	59	19	671
69	87	85	4	79	89	94	8	3	75	78	671
39	15	14	105	96	64	103	61	98	63	13	671
121	34	44	57	46	120	30	48	108	31	32	671
73	91	90	71	7	92	95	5	76	6	65	671
52	36	17	107	16	104	18	77	70	62	112	671
12	11	99	72	100	67	43	97	68	9	93	671
28	49	56	101	22	24	23	106	102	50	110	671
671	671	671	671	671	671	671	671	671	671	671	671