大學叢書

拓撲學

上册

沙愛福
施雷發 著
江澤涵 譯

商務印書館發行

大學叢書

拓撲學

上册

沙愛福
施雷發 著

江澤涵 譯

商務印書館發行

譯者序

蘆溝橋事變後一個多月，1937 年 8 月中，譯者離開北平與北京大學，行裝中只能帶了兩本書。其中的一本就是本書的原書。那時候以爲必須在皖南旌德鄉下住一個相當長久的時期，就有在鄉下翻譯一本拓撲學的志願。那年年底譯者到了長沙的臨時大學，這本書的翻譯纔眞正開始了。1938 年初，譯者到了昆明的西南聯合大學，去年又回到北平的北京大學；從翻譯開始到完成，經過了差不多整整的十年。這十年中時譯時停，或譯或教，經過了很多次的修改與抄寫，纔能付印。

原書在 1934 年出版時，卽被公認爲拓撲學入門的一本空前的好書。在這麼短的篇幅中，包括組合的拓撲學這麼多的材料；而且寫得淸楚嚴密，便于初學。這確是本書的特色。現在雖然已有了數種拓撲學新書，各有其優點，而本書仍未喪失他的地位。因其如此，本書譯本出版，或仍能適合國內的需要。

本書中數學名詞的譯名，多半遵照中國科學社的科學名詞審查會 1938 年編印的算學名詞彙編。譯者力求意譯，希望譯文一方面不失原意，一方面也近于通用的語句。改正原書不妥之處與譯者增加的字句，在譯文中都用彎括弧表明。但翻譯算學書，譯者很少經驗，在算學與文字兩方面，書中都難免有不妥之處，深望讀者發現時指正。

這十年中翻譯此書，得着許多位同事與學生的幫助，譯者極爲感謝。特别要致謝的，是開始時王湘浩先生的幫助，與完成時冷生明先生的幫助。校對時，韓春霖，趙中立與李經熙三先生幫忙很多。德中索引的翻譯與中德索引的編排，是魏執權先生幫忙作的。最後，譯者十分愉快的申明一點：商務印書館完全站在提倡學術的立場，不計營業的得失，願意出版這本書；而且在排印時不憚煩的改善，每頁自三次至七次之多。譯者衷心感謝他們。

江澤涵　　北大數學系，1947年7月。

著者序

因爲著者之一（*Threlfall*）在 *Dresden* 專科學校講授拓撲學的機會，著者兩人纔着手編著本書。但授課的講義，本書中只採用了一部分。本書的主要內容，還是後來著者兩人勤愼研討的結果。

拓撲學正在發揚光大的時期。本書編著的目的，是想供給讀者這門算學的一個門徑與一個綱要。因此我們並不想把最廣的定理，儘可能完備的搜集起來，然後證明。我們注意的是有用途的**概念**，與有效果而且有前途的**方法**；我們要詳細的界說這種概念，系統的詮釋這種方法，並且藉詳解實例來說明這些概念與方法。

本書並不假設讀者有特別的預備智識。只有少數通用的定理，本書沒有證明就引用了。但讀者從脚註中所援引的文獻，不難查出所需要的恰當證明。——本書限于組合的或代數的拓撲學，但是在儘可能的避免點集論的困難的情形下，也同時利用綿續概念。所以 *L. E. J. Brouwer* 所創始的單純複合形與流形的概念，在本書的討論中佔着中心的地位。——爲了不熟悉羣論及其中現時通用的術語的讀者的方便起見，我們在最後一章中彙集了本書所需用的羣論中的定理。這一章有必要時可在第二章以後，第三章以前閱讀。我們儘可能的使各章獨立。我們還很致力于編排書尾詳細的，依字母次序排列的索引。書中

的附錄，指出更多的參考文獻；希望對于書中未詳論的理論，使讀者能藉此作更進一步的研究。由于篇幅的限制，有若干理論，書中根本未能提起。我們特別引爲缺陷的，是 *Alexander* 的對偶定理，*Alexandroff* 的閉點集理論與投影光譜（*Projektionsspektrum*）理論，都不能不割愛了。若一時尙無別的拓樸學教科書出版，講到這些理論，我們希望能繼續寫一本來彌補這缺陷。

我們能完成本書，最感激 *E. Trefftz* 教授。他不但犧牲他自己的時間，使我們能够有編著本書所需要的閒暇；而且他充分瞭解我們的困難，切實加以指示，更給我們不少的鼓勵。同樣的，我們感謝 *Dresden* 的算學家的討論會，特別是 *C. Weber* 教授的幫助。我們也感謝別處的算學家，*L. Bieberbach*, *K. Reidemeister*, *F. Hausdorff*, *H. Kneser*（特別參看 §58），*B. L. van der Waerden* 諸位教授的幫助。前兩位讀過校稿，後一位在 *Prage* 的講演 [1] 與啟發我們的談話，影響了本書的格局。我們還感謝 *Dresden* 的博士候選人 *W. Hantzsche* 與 *H. Wendt*；校對時，他們有許多的改善。最後我們要致謝出版者，他們擅長的技術，使校對簡易，而且印製完善。

Dresden, 1934 年 1 月。

H. Seifert.　　*W. Threlfall.*

書尾有附註與文獻索引。文獻按照著者姓名的字母次序排列。方括弧中的數字指文獻索引，上肩的小號的數字指附註。

目 錄

第一章 直覺的討論

§		頁	§		頁
1	拓撲學的主要問題	1	3	同痕,同倫,同調	18
2	閉曲面	6	4	多維流形	21

第二章 單純的複合形

5	鄰域空間	28	11	單純複合形的表格	61
6	變換	32	12	有限複合形,純粹複合形,勻齊複合形	65
7	實數空間中的點集	39	13	法重分	69
8	疊合	43	14	複合形的例子	71
9	n 維單純形	49			
10	單純的複合形	58			

第三章 同調羣

15	鍊	81	20	能除的同調式	96
16	邊緣,閉鍊	82	21	從關聯矩陣計算同調羣	99
17	同調鍊	85	22	塊形鍊	109
18	同調羣	88	23	模 2 鍊,連通數, *Euler* 公式	113
19	計算幾個簡單的複合形的同調羣	92	24	假流形與能定向性	123

第四章 單純的逼近

25	廣義單純形	129	29	實數空間中的棱柱體	139
26	廣義鍊	132	30	逼近定理的證明	145
27	廣義的同調羣	133	31	變換的變狀與變換的單純逼近	158
28	逼近定理,單純的同調羣的不變性	138			

第五章 在一點處的性質

§		頁	§		頁
32	複合形在一點處的同調羣	169	35	邊緣的不變性	180
33	維數的不變性	177	36	假流形與能定向性的不變性	181
34	複合形的純粹性的不變性	178			

第六章 曲面的拓撲學

37	閉曲面	184	40	有邊緣的曲面	200
38	化成法式	191	41	曲面的同調羣	203
39	法式的不同,基本定理	198			

第七章 基本羣

42	基本羣	210	48	基本羣與同調羣	239
43	例	220	49	閉道的自由變狀	244
44	單純的複合形的棱道羣	221	50	基本羣與變換的變狀	247
45	面複合形的棱道羣	227	51	在一點處的基本羣	247
46	母元與關係	232	52	拚聯的複合形的基本羣	248
47	棱複合形與閉曲面	236			

第八章 覆疊複合形

53	無支點的覆疊形	253	56	萬有覆疊形	270
54	底道路與覆疊道路	257	57	規則覆疊形	272
55	覆疊形與基本羣的子羣	262	58	單價羣	276

第九章 三維流形

59	普遍的性質	283	63	*Heegaard* 圖式	302
60	用多面體表示	286	64	有邊緣的三維流形	306
61	同調羣	292	65	從扭結着手作三維流形	309
62	基本羣	296			

第十章　n 維流形

§		頁	§		頁
66	星形複合形	315	72	胞腔式逼近	354
67	胞腔複合形	323	73	廣義鍊的交點數	360
68	流形	328	74	交點數的不變性	363
69	*Poincaré* 對偶定理	336	75	例子	376
70	胞腔鍊的交點數	343	76	能定向性與雙側性	382
71	對偶的基底	347	77	環繞數	388

第十一章　綿續變換

78	變換度	396	80	不變點公式	404
79	跡數公式	399	81	應用	406

第十二章　羣論中的定理

82	母元與關係	411	85	自由乘積與直接乘積	421
83	同構變換與商羣	417	86	*Abel* 羣	427
84	羣的 *Abel* 化	420	87	整數矩陣的法式	436

附註	441	德中索引	471
文獻索引	455	中德索引	494

第一章 直覺的討論

§1 拓撲學的主要問題

拓撲學 (*Topologie*) 所討論的對象，是幾何圖形的，經過拓撲變換 (*topologische Abbildung*)——正逆兩方面都單值(*eindeutig*) 而又都綿續的變換——而不改變的性質。我們暫時先把幾何圖形就當作是三維空間 (或更高維的空間) 中的點集。在空間的一笛卡兒坐標系中，綿續函數所表出的變換叫做綿續變換。這些變換函數——表出變換的函數——只要在這圖形的點集上有定義(不必在全個的空間中都有定義)。圖形的性質，經過拓撲變換而不改變的，叫做拓撲性質。兩個圖形間若是有拓撲對應，那就是說，若有一拓撲變換存在，把兩個圖形中的一個換成另一個，這兩個圖形就叫做同胚的 (*homöomorph*) 圖形。

例如半個球面與圓域 (*Kreisscheibe*) 同胚，因爲直角投影 (*Orthogonalprojektion*) 就是把半個球面換成 (圖 1 中用斜綫表示的) 圓域的一個拓撲變換。更普遍的說，若是一曲面能彎扭成另一曲面，他們就同胚。例如球面，立方形，與橢圓面同胚；平環 (*Kreisring*) 與有限高的圓柱面也同胚。

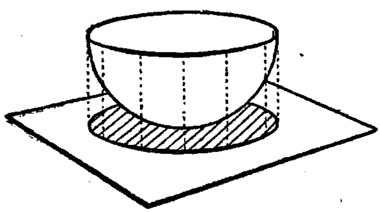

圖 1

同胚圖形的例子多而易見。但是也有圖形，例如歐幾里得平面與刺破了一個點的球面（減去了一個點的球面），不是一見就可以斷定他們同胚的。這兩個圖形間的畫形投影（*stereographische Projektion*）就是一個拓撲變換；而且他們也與圓域的內域同胚（§6，例2與3）。

要證明兩個點集不同胚，通常比較困難多了。點與線段顯然不同胚，因為這兩個點集不能成一一對應。我們也容易看出線段與圓域不同胚。設 A, B, C 是圓域中的任意三點。從 A 點出發，能綿續的在圓域中走到 B 點，而不通過 C 點。圓域的這個性質是拓撲性質。線段却沒有這個性質：若要從線段的一端綿續的走到另一端，就必須通過線段的中點。若更進一步比較圓域與球體，我們就不能如此簡單的得着結論。圓域中有分開圓域的閉曲線；若是我們要想利用圓域的這個特徵，我們就必須證明一條閉曲線不能分開球體。但是為什麼一條閉曲線不能裝滿一個分開球體的曲面呢？我們要證明圓域，球體，與更高維的相當的圖形不同胚（證明見§33），已經與證明線段與圓域不同胚的情形不同，不能有那麼簡易的方法了。

同胚的概念在拓撲學中的地位，與全合的概念（*Kongruenzbegriff*）在初等幾何學中的地位一樣。在初等幾何學中，兩個全合的圖形本質上無區別；同樣的，在拓撲學中，兩個同胚的或拓撲對應的圖形本質上也無區別。但是我們應當注意下述不同之處：兩個圖形若是全合，全個的空間就有一個剛體運動，使其中的一個圖形移到另一個；兩個圖形若是同胚，全個的空間却不必有一個拓撲變換，使其中的一個圖形換成另

一個。

例如全個的空間的任一拓撲變換都不能（任一變狀 (*Deformation*) 當然更不能）把圓週 (*Kreislinie*) 換成一個扭成結的 (*verknotet*) 曲線 (§ 52 末句)，如同三叉扭結 (*Kleeblattschlinge*)（圖 2)。但是圓週與扭結 (*Knoten*) 同胚，因爲他們的點間有一個正逆兩方面都單值而又都綿續的變換；而且同胚這種關係只依賴于這兩個點集，與那包含他們的空間無干。

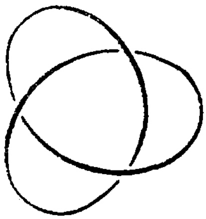

圖 2

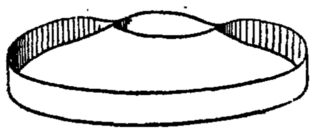

圖 3

同樣的，全個的空間沒有一個拓撲的自身變換 (*Selbstabbildung*)，把一個扭轉了 2π 的倍數的弧度的環帶 (*geschlossenes Band*)（圖 3) 換成一個未扭轉的環帶。但是把這兩個環帶割開成兩個全合的長方條，使條上相當的點成對應，就可知這兩個環帶同胚。

在拓撲學中，扭結與圓週，或如此扭轉了的環帶與未扭轉的環帶，都是相同的圖形。只有把他安置在三維空間中的時候，他們才有區別。而且若是把那包含他的三維空間又當作是四維空間的子空間，因而可以引用四維空間的變狀，這種區別可又消失了。這是因爲經過四維空間的一個變狀，圓週可以換成扭結，而且在變狀的歷程中曲線還不自相穿割 (*Selbstdurchdringung*)；就如同經過三維空間的一個變狀，圓週可換成橢圓。[1]

由此看來，此後我們要把一個圖形的拓撲性質分成兩種：一種是

“內在的”(*inner*),是經過這個圖形的所有的拓撲變換都不改變的性質;另一種是依賴于包含這圖形的空間的,是經過這全個空間的所有的拓撲變換都不改變的性質。

我們再舉一例來說明這種區别。設空間中有一圓週與一直線,同在一平面上,但無共點。圓週繞直線旋轉,產生一個環面(*Ringfläche* 或 *Torus*)。通過環面的任一點 O 有一母圓 a; 我們把他叫做環面的經圓(*Meridiankreis*)。在旋轉時,O 點也產生一圓 b; 我們把他叫做緯圓(*Breitenkreis*)(圖 4)。我們能不用空間的拓撲的自身變換,表出經緯圓的區别如下:經圓能在環體(*Vollring*, 環面所包的立體)中縮成(*zusammenziehen*)一點,而緯圓不能,所以全個的空間的任一拓撲的自身變換,都不能把由環面與一個經圓所構成的圖形,換成由環面與一個緯圓所構成的圖形。但是經緯圓間的這區别並非環面的內在性質。空間雖然沒有一個變

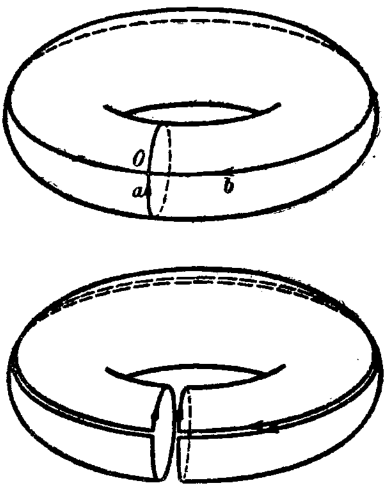

圖 4

狀,把環面換成他自己,使經緯圓的地位交換;環面却有如此的一個拓撲變換。要想求得如此的一個拓撲變換,我們設想這環面是用有彈性的薄膜做成的。把他沿着 a 與 b 割開,彎扭成一個正方形(圖 5);再把這正方形沿着對角線摺疊起來,使正方形上原來的兩點,摺疊成一點

的,成對應。這對應就是正方形的一個拓撲的自身變換,使 a 與 b 交換,而且相當於環面的一個同樣的自身變換。——將來在下節中,我們要提出曲面的能定向性 (*Orientierbarkeit*) 與雙側性 (*Zweiseitigkeit*)。這個性質供給我們另一個特徵,表明內在的拓撲性質與浸沒的拓撲性質 (*Einbettungseigenschaft*) 的區別。

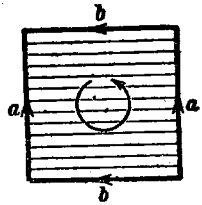

圖 5

拓撲性質間的這種區別,與微分幾何學中的度量 (*metrisch*) 性質間的區別相同。微分幾何學中的度量性質的一種是內在的,不依賴于曲面在空間中的位置,由第一個度量的基本式 (*Grundform*) 斷定;另一種是由曲面與空間所組成的圖形的度量性質,由第二個基本式斷定。

拓撲學的主要問題,就是要判斷給定的兩個圖形是否同胚,而且在可能的時候,列舉所有不同胚的圖形。我們起始時就把圖形看作是歐幾里得空間中的點集。雖然關于歐幾里得空間中的任意子集已經有很深博的理論*),為避免引起不願意引起的集合論中的困難起見,我們將不再採用如此廣義的圖形概念了。我們將要採用的,只是 *L. E. J. Brouwer* 所創始的複合形 (*Komplex*) 的概念。複合形在本書討論的歷程中再加以限制,使成為流形 (*Mannigfaltigkeit*)。這種概念不過于寬泛,因而可以避免所不願引起的集合論中的困難;也不過于狹窄,因而可以包含差不多所有的有趣的圖形。所以我們現在要研究的拓撲學,不是集合論的,只是**複合形與流形的拓撲學**。

*) *Tietze-Vietoris* [8] 之 *I* 中的文獻。

複合形的特徵,使他有別于任意點集的,是他的能剖分爲三邊形的性質 (*Triangulierbarkeit*): 複合形是由有限個或可數的無窮多的,不必平直的 (*geradlinig*), 線段,三邊形,四面體與高維的相當的圖形連接而成的。這種三邊形等的連接,並不限于在同一空間中,而且有時候還不要包含他們的空間。因爲這特徵,大部分所謂病態的點集都被擯在我們討論的範圍之外,而且我們的討論纔與幾何的直覺更爲接近。因此也有人把複合形的拓撲學叫做彈性橡皮的拓撲學。複合形的例子: 所有的 *Riemann* 曲面,任何維的歐幾里得空間,投影平面與空間,所有的歐幾里得與非歐幾里得的空間型 (*Raumform*), 度量的運動羣的間斷域 (*Diskontinuitätsbereiche*),與力學系統(*mechanischer System-*的位置空間 (*Lagenraum*) 與相空間 (*Phasenraum*)。

我們要想向着我們的目的——主要的問題的解決——進展,我們必須探求複合形的拓撲不變的,能計算的,而且能作爲分類的標誌的性質。複合形的同調羣 (*Homologiegruppe*) 與基本羣 (*Fundamental-gruppe*) 是這種性質中最重要的,而且在我們討論中佔中心地位。

同時我們要看看,不用這些不變性的幫助,我們能進展到如何程度。所以我們不再從事預備,立即直覺的討論主要問題的一部分,看看有些什麼不同胚的閉曲面。

§2 閉曲面

在前一節中,我們已經說過,環面沿着經緯圓切開之後,變成一個

正方形。反之，若是疊合一個正方形的每兩條相對的邊，我們又重得着環面。所以一個正方形的每兩條相對的邊當作是同一條線段的時候，這正方形就叫着環面的 *Poincaré* 基本多邊形。至少對於內在的拓撲性質說，這基本多邊形就可以完全代表環面。至于環面的面積，空間中的位置等特別的度量性質與浸沒性質，基本多邊形却不能表出；不過這些性質與曲面拓撲學是毫無關係的。所以從曲面的拓撲學的立場說，所有的環面，由叠合基本多邊形的對應邊而得着的，都等價 (*gleich-wertig*)，例如旋轉環面與扭成結的皮管子的表面就沒有區別。其實任一曲面都能够切開成一個或數個多邊形。我們要直接利用這事實，來下閉曲面的定義：一個閉曲面是由一對一對的連接有限個多邊形的邊而成的。這定義纔使閉曲面的圖形脫離了那包含他的空間，纔使他成爲不依賴于那包含他的空間而存在的二維流形——二維流形的概念，將來有正確的定義。

根據環面切開成正方形的方法，我們能用若干個多邊形，設想他們的邊成對的對應，表出一個閉曲面，因而得着一組無限多個閉曲面。爲達到這目的起見，我們先在環面上穿一個

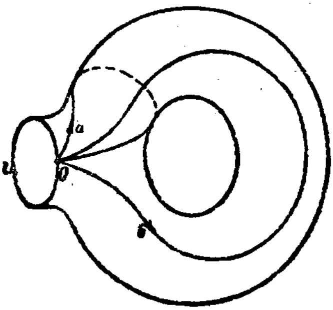

圖 6

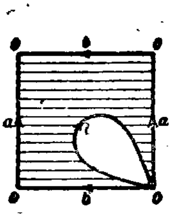

圖 7

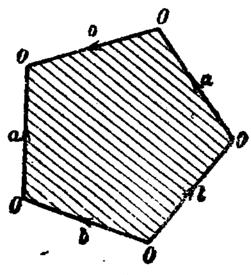

圖 8

大致是圓形的洞 (*Loch*)。假使洞邊緣 (*Lochrand*) l 通過 O 這個點。經過變狀之後，我們得着一個環柄 (*Henkel*) (圖 6)。我們也能先在環面切開成的正方形中表出這個圓洞 (圖 7)，然後把洞邊緣 l 在 O 點處切斷。這就等於把環柄沿着曲線 a 與 b 切開成五邊形 (圖 8)。這五邊形的 l 這邊不與別個邊成對應，其餘的都間隔的，成對的對應。

若是取兩個切開成五邊形的環柄，連接他們的洞邊緣 (圖 9)，然後消去公共洞邊緣 l，結果是一個八邊形，他的邊成對的對應 (圖 10)。叠合對應邊，

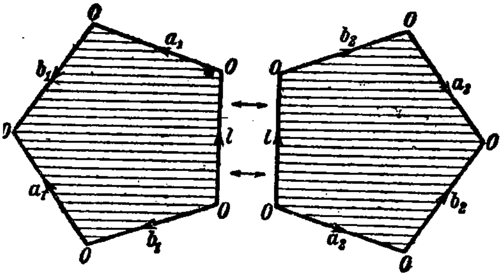

圖 9

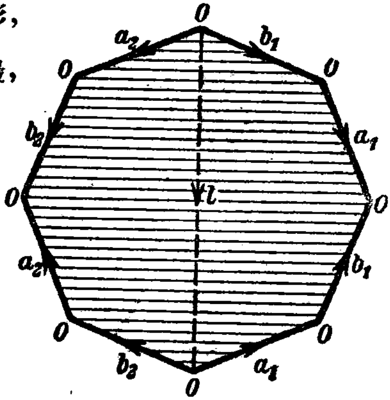

圖 10

因而叠合八個頂點成一點，這八邊形就包成一個雙環面 (*Doppelringfläche*)。[2] 與從前討論環面時一樣，我們要在圖中表出成對的邊的對應關係：每對對應邊我們用同一個字母表示；而且用箭頭附在邊上，表明在叠合對應邊時，箭頭指着的方向應該符合。我們只要任意的選定多邊形的邊緣的一個方向，然後按照每一邊上的箭頭是否指着這個方向，規定這邊附帶一個指數 $+1$ ($+1$ 這指數常省去) 或 -1。邊的對應關係，以及這閉曲面，都能用一個式子表出。例如一個雙環面，若用圖 10