交换代数

JIAOHUANDAISHU

邱琦章 编著

武汉大学出版社

交换代数

邱琦章　编著

*

武汉大学出版社出版发行

（430072　武昌　珞珈山）

武汉大学印刷厂印刷

武汉正佳激光照排

*

850×1168　1/32　7.5印张　189千字

1993年3月第1版　　1993年3月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN 7-307-01429-7/O·118

定价：2.35元

（鄂）新登字第9号

内容提要

本书系统介绍了交换代数最基本的理论与方法. 前三章概述了交换环的基础知识及模论与同调代数的基本理论. 第四章介绍了环与模的局部化. 第五章介绍了整相关与域扩张. 后两章分别介绍了作为代数几何基础的诺特环与作为代数数论基础的戴德金整环.

本书按照现代数学发展趋势,强调了模论、同调代数与局部化方法的重要作用. 全书取材恰当,深浅适中,内容新颖. 本书采用现代化方法进行叙述,推理详密,自成体系. 还配有相应的习题供读者学习巩固.

本书可作为综合大学数学系本科生、研究生与师范院校数学系学生的基础课教材,对相关专业的学生可作为选修课教材. 本书也可供数学工作者,尤其是从事代数学、代数几何、代数数论研究的数学工作者参考.

前　　言

交换代数首先是一个交换环，而交换环也可以看作是整环上的代数. 所以交换代数本质上是研究交换环的. 从历史上看，代数数论与代数几何刺激了交换代数的建立与发展；反过来，交换代数的富有成果的研究又给代数几何与代数数论以有力的推动. 现在，交换代数已成为这两门学科的不可缺少的代数工具.

本书详细介绍了交换代数最基本的理论与方法，为读者进一步深入学习打下基础.

基于模论与同调代数在现代数学中显示的日益重要的作用，本书第二、三章介绍了这方面的基础知识.

交换代数的中心概念是质理想. 它是算术中质数概念与几何中点的概念的推广. 一个环在它的质理想处的局部化过程就是几何中一个点附近的组成状况这一概念的代数类比. 第一章我们引入了质理想并介绍其基本性质. 第四章讨论环与模在质理想处的局部化方法.

第五章介绍整相关概念，它是域的代数扩张的自然推广. 交换代数研究的原型是整数环 $\mathbf{Z}$ 与域 K 上的多元多项式环 $K[x_1,\cdots,x_n]$，它们是 Dedekind 整环与 Noether 环的重要情形. 在第六章与第七章中，我们分别讨论了作为代数几何基础的 Noether 环和作为代数数论基础的 Dedekind 整环.

标有 * 号的章节可以跳过而不影响后面内容的学习. 对域论比较熟悉的读者，可以略去第五章除 §5.1、§5.5 以外的内容. 第二章 §2.7 范畴与函子也可略去，只是在后面的学习中将出现的

函子当作算子看待即可.

本书是作者在武汉大学中法数学试验班为开设《交换代数》课程而编写的. 编写过程中参阅了国内外同类教材与参考书籍. 由于是为本科生开设这门课,所以在取材上力求做到着重于基本概念与基本方法,尽量避免一些过于艰深的题材,使学生易于学习. 为适应现代数学的发展,本书采用现代叙述方法.

本书的编写及出版得到武汉大学数学系领导的大力支持与鼓励,得到熊全淹教授、叶明训副教授、黄象鼎副教授的关心与指导,还得到中法中心余家荣教授与邹应副教授的支持与鼓励. 武汉大学其他一些老师提出了不少有益的建议,同时数学系资料室的同志们提供了大量参考资料. 武汉大学出版社顾素萍同志为本书的出版付出了辛勤的劳动. 作者特在此向他们表示诚挚的谢意.

作者学识浅陋,书中错误、缺点一定不少,敬请读者提出宝贵意见.

编　　者

1992.9.于珞珈山

目　　录

P103 P118 P113 P115 P106 P130

P85 P100

第一章　交换环概述

本章概述交换环的基本知识. 除简述环的定义，理想的运算，环的同态与同构外，着重介绍了交换代数的中心概念——质理想及其基本性质，比如 Krull 的质理想存在定理以及常用的质理想避开引理. 同时简略地介绍了环的根以及局部环等概念.

§1.1　基本概念

一个非空集合 R，假如它有两种结合法，一种叫加法（用符号 $+$ 表示），一种叫乘法（用符号 $\cdot$ 表示），并且还满足下面三个条件时就叫做**环**：

(i)　R 对于加法成为交换群（R 的零元素记为 0，对于每个元素 $x \in R$，负元素记为 $-x$）；

(ii)　乘法满足结合律，即对于任意的 $x, y, z \in R$，有

$$(xy)z = x(yz);$$

(iii)　加法与乘法适合分配律，即对于任意的 $x, y, z \in R$，有

$$x(y+z) = xy + xz,$$

$$(y+z)x = yx + zx.$$

一个环 R，如果它的乘法满足交换律，即对于任意的 $x, y \in R$，有

$$xy = yx,$$

则称 R 为**交换环**.

环 R 中如果有元 1，使得对于所有的 $x \in R$，都有

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$

则称 R 为有单位元 1 的环. 易知单位元 1 是唯一的.

一个交换环 F，假如含有非零的元，且所有非零元所组成的集合对乘法成为群，则称 F 为**域**.

本书约定，**"环"均指有单位元 1 的交换环**. 对于个别不是这种含义的地方，本书作了特别说明.

一般情形，$0\neq 1$. 唯一的例外是 R 只由一个元素 0 组成，我们称这样的环为**零环**，并记为 0.

环 R 的非空子集 S，假如对于 R 的两种结合法又形成环，并且 S 的单位元就是 R 的单位元 1，则称 S 为 R 的**子环**，并称 R 为 S 的**扩张环**. 环的一个子集成为子环，只要它对加法成群，对乘法闭合，且含有 R 的单位元 1 就行了. 因为其它条件显然都适合. 环可以看成是自身的子环，异于自身的子环叫做**真子环**.

对于环 R 的一个加法子群 I，如果对于任意的 $a\in I, r\in R$，有

$$ra \in I,$$

则称 I 为 R 的**理想**. 环 R 自身可以看作是 R 的理想. 异于自身的理想叫做**真理想**. 仅由零元素做成的集显然是 R 的理想，称它为**零理想**，记作(0).

设 I 为环 R 的理想，如果在加法群的商群 R/I 中定义乘法：

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy},$$

则 R/I 就成为一个环. 它的零元为 R 的零元 0 所在的陪集 I，而它的单位元为 R 的单位元 1 所在的陪集 $1+I$. 这个环称为 R 关于 I 的**商环**或**同余类环**.

环 R 中由一个元素 a 生成的理想

$$(a) = \{ra \mid r \in R\}$$

叫**主理想**. 设 I 是环 R 的一个理想，若可找到 n 个元 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$，使得

$$I = (a_1, \cdots, a_n) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid r_i \in R\},$$

则称 I 为**有限生成理想**. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 叫做它的**生成元**.

设 R, R' 是两个环, σ 是 R 射到 R' 的映射, 如果对于 R 中任意元 x, y, 有

(i) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$,

(ii) $\sigma(xy)=\sigma(x)\cdot\sigma(y)$,

(iii) $\sigma(1)=1$(这里我们用相同的符号 1 来记 R, R' 的单位元),

那末, 映射 σ 就叫做 R 到 R' 的**同态**. 换言之, 同态保持加法, 乘法和单位元.

如果同态 σ 是单射, 即由 $\sigma(x)=\sigma(y)$, $x, y\in R$, 必有 $x=y$, 则称 σ 为**单同态**. 如果同态 σ 是满射, 即对任意的 $x'\in R'$, 存在 $x\in R$, 使得 $x'=\sigma(x)$, 则称 σ 为**满同态**, 记作 $R\sim R'$ 或 $R\overset{\sigma}{\sim}R'$. 既单且满的同态 σ 称为**同构**, 记作 $R\cong R'$ 或 $R\overset{\sigma}{\cong}R'$.

设 $\sigma: R_1\longrightarrow R_2$ 和 $\tau: R_2\longrightarrow R_3$ 均为环同态, 则复合映射 $\tau\sigma: R_1\longrightarrow R_3$ 亦为环同态.

对于环同态, 有下面的同态基本定理:

定理 1.1.1 设 $\sigma: R\longrightarrow R'$ 是环同态, 记 $\mathrm{Im}\sigma=\sigma(R)$, $\mathrm{Ker}\sigma=\{x\in R \mid \sigma(x)=0\}$, 则

$$R/\mathrm{Ker}\sigma\cong\mathrm{Im}\sigma. \qquad \square$$

R 的子环 S 到 R 的包含映射

$$i: S\longrightarrow R, \quad x\longmapsto x$$

显然是单同态, 这个同态称为**包含同态**.

设 I 为环 R 的理想, 则映射

$$p: R\longrightarrow R/I, \quad x\longmapsto \bar{x}=x+I$$

为满同态, 这同态称为**自然同态**.

环和商环的理想之间在自然同态下有下面的对应关系:

定理 1.1.2 设 I 为环 R 的理想, 则在环 R 的包含 I 的理想 N 与商环 R/I 的理想 $\overline{N}$ 之间存在着保持包含关系的一一对应, 这里 $N=p^{-1}(\overline{N})$, p 表示自然同态. $\square$

对于环同态，有下面的自然分解：

定理 1.1.3 设 R, R' 是环，σ 是 R 到 R' 的同态，则 σ 可以唯一地分解成 $\sigma = i\bar{\sigma}p$，这里 p 是 R 到 $R/\mathrm{Ker}\sigma$ 的自然同态，$\bar{\sigma}$ 是 $R/\mathrm{Ker}\sigma$ 到 $\mathrm{Im}\sigma$ 的同构，i 是 $\mathrm{Im}\sigma$ 到 R' 的包含同态. 图示如下：

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p"'] & R' \\ R/\mathrm{Ker}\sigma \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] & \mathrm{Im}\sigma. \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

最后，由一个同态可以通过商导出另一个同态：

定理 1.1.4 设 R 与 R' 是两个环，f 是从 R 到 R' 的同态，I 与 I' 分别是 R 与 R' 的理想，满足 $f(I)\subseteq I'$. 则存在唯一的从 R/I 到 R'/I' 的环同态 $\bar{f}$，使得

$$p'f = \bar{f}p,$$

这里 p, p' 分别是 R 到 R/I 及 R' 到 R'/I' 的自然同态，图示如下：

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & R' \arrow[d, "p'"] \\ R/I \arrow[r, "\bar{f}"'] & R'/I'. \end{tikzcd}$$

习 题

1. 假设 A 是没有单位元的交换环，$\mathbf{Z}$ 是整数环. 作

$$R = \{(a,n) \mid a \in A, n \in \mathbf{Z}\},$$

规定 $(a_1, n_1) = (a_2, n_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, n_1 = n_2$. 在 R 中定义加法与乘法：

$$(a_1, n_1) + (a_2, n_2) = (a_1 + a_2, n_1 + n_2),$$

$$(a_1, n_1)(a_2, n_2) = (a_1a_2 + n_1a_2 + n_2a_1, n_1n_2).$$

证明：R 是有单位元 $(0,1)$ 的交换环. 于是没有单位元的交换环可以嵌入一个有单位元的交换环中.

2. 设 R 是非零环. $R[x]$ 为 R 上未定元 x 的多项式环.

(i) 证明：若 $f(x), g(x) \in R[x]$ 且 $g(x)$ 的首项系数为 1，则存在唯一的

多项式 $q(x), r(x) \in R[x]$，使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

这里 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数或 $r(x)=0$.

(ii) 设 α 是 R 的扩张环中的元，证明剩余定理：

$$f(x) = q(x)(x-\alpha) + f(\alpha).$$

3. 设 I 是环 R 的理想，$R[x]$ 是多项式环. $I[x]$ 表示 $R[x]$ 中系数在 I 中的所有多项式集合. 证明：$I[x]$ 是 $R[x]$ 的理想，且

$$R[x]/I[x] \cong (R/I)[x].$$

(*)

§1.2 理想的运算

同一环中的理想，有和、交、积、商等运算，而对于不同的环，借助于环同态，可引入理想的局限与扩张的概念.

假设 I_1, I_2 是环 R 的理想，则

$$I_1 + I_2 = \{a + b \mid a \in I_1, b \in I_2\}$$

也是 R 的理想，称为理想 I_1 与 I_2 的和，它是 R 中包含 I_1 与 I_2 的最小理想. 显然，

$$I_1 + I_2 = I_2 + I_1,$$

并且

$$(I_1 + I_2) + I_3 = I_1 + (I_2 + I_3).$$

若 $I_1 + I_2 = R$，则称理想 I_1 与 I_2 **互质**.

和的概念也可以推广到无限的情形. 假设 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 R 的一组理想，则和

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda (\text{有限和}) \mid a_\lambda \in I_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

是 R 中包含这组理想 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 的最小理想.

若对于任意的 $\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu$，都有 $I_\lambda + I_\mu = R$，则称理想组 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是**两两互质的**.

假如 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 R 的一组理想，则**交** $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是 R 的理想，它是 R 中含于 $I_\lambda, \lambda\in\Lambda$ 的最大理想.

如果 I_1,I_2 是环 R 的理想，则一切有限和 $\sum ab$ ($a \in I_1, b \in I_2$) 所组成的集合是 R 的理想，称为 I_1 与 I_2 的**积**，记作 I_1I_2. 象和一样，有

$$I_1I_2 = I_2I_1,$$

$$(I_1I_2)I_3 = I_1(I_2I_3).$$

并且和与积之间有分配性：

$$(I_1 + I_2)I_3 = I_1I_3 + I_2I_3.$$

还可引入理想幂的概念：

$$I^1 = I, \quad I^{n+1} = (I^n)I,$$

并且约定 $I^0=R$，当 $I^n=0$ 时，称 I 为**幂零理想**.

在积与交之间显然有

$$I_1I_2 \subseteq I_1 \cap I_2.$$

如果 I_1,I_2 是环 R 的理想，则

$$(I_1 : I_2) = \{x \in R | xI_2 \subseteq I_1\}$$

是 R 的理想，称为 I_1 对于 I_2 的**商**. 由定义易知

$$I_1 \subseteq (I_1 : I_2),$$

$$(I_1 : I_2)I_2 \subseteq I_1,$$

$$((I_1 : I_2) : I_3) = ((I_1 : I_3) : I_2) = (I_1 : I_2I_3).$$

商与前面几个运算之间的另外一些关系参见习题.

如果 I_2 是主理想 (a)，则常将 $(I : (a))$ 记作 $(I : a)$. 类似地将 $((a) : I)$ 记作 $(a : I)$.

特别地，我们将 $(0 : I)$ 叫作是 I 的**零化子**，记作 $\mathrm{Ann}(I)$. 显然

$$\mathrm{Ann}(I) = \{x \in R | xI = (0)\}.$$

R 中所有零因子的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}(x).$$

设 R 为非零环，如果 $D=\{0\}$，则称 R 为**无零因子环**，或**整环**.

假如 R_i 是环，$i=1,2,\cdots,n$. 令 R 是 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的笛卡尔积，在 R 中定义加法与乘法：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,$$
$$x_n+y_n),$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n).$$

则 R 关于$+$，$\cdot$ 形成一个环，称为 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的**直和**，记作

$$R=\bigoplus_{i=1}^{n}R_i.$$

易知$(0,0,\cdots,0)$及$(1,1,\cdots,1)$分别是$\bigoplus_{i=1}^{n}R_i$ 的零元和单位元.

映射 $p_j: \bigoplus_{i=1}^{n}R_i \longrightarrow R_j,(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\longmapsto a_j$，及映射

$$i_j: R_j \longrightarrow R_j',\quad a_j\longmapsto(0,\cdots,0,a_j,0,\cdots,0)$$

分别是环的满同态及同构，这里 $R_j'=\{(0,\cdots,0,a_j,0,\cdots,0)\mid a_j\in R_j\}$ 是 R 的理想.

由此，在同构意义下，$R_1,R_2,\cdots,R_n$ 可以看作是 $R=\bigoplus_{i=1}^{n}R_i$ 的理想. R_i 称为 R 的**直和项**. 环 R 若是理想 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的直和，则 R 中的任意元可以唯一表示成 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 中元的和. 对于 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$R_i\cap\sum_{j\neq i}R_j=(0).$$

上面是一个环内理想的运算. 对于两个环，借助于环同态，我们有理想的局限与扩张的概念.

设 A,B 为环，$f: A\longrightarrow B$ 是环同态，J 是 B 的理想，则 $f^{-1}(J)$是 A 的理想. 称为理想 J 的**局限理想**. 记作

$$J^c=f^{-1}(J).$$

若 I 是 A 的理想，一般地，$f(I)$不是 B 的理想(如 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的包含同态)，这里我们把 $f(I)$在 B 中生成的理想 $f(I)B$ 叫作是理想 I 的**扩张理想**，记作

$$I^e=Bf(I).$$

当 A 为 B 的子环时，如果 $f: A\longrightarrow B$ 是包含同态，这时

$$J^c=f^{-1}(J)=J\cap A,$$
$$I^e=Bf(I)=BI.$$

定理 1.2.1 设 $f: A \longrightarrow B$ 是环同态，I,J 分别是 A 与 B 的理想，则

(i) $I \subseteq I^{ec}, J \supseteq J^{ce}; J^c = J^{cec}, I^e = I^{ece}$.

(ii) 令 $\mathscr{A} = \{I \mid I$ 是 A 的理想，$I^{ec} = I\}$，

$$\mathscr{B} = \{J \mid J \text{ 是 } B \text{ 的理想}, J^{ce} = J\}.$$

则 $\sigma: I \longmapsto I^e$ 是将 $\mathscr{A}$ 射到 $\mathscr{B}$ 上的一一映射，逆映射为

$$\tau: J \longmapsto J^c.$$

证明 (i) 前二包含关系是显然的，后二等式可由前面的两包含关系简单地推得.

(ii) 对于任意的 $J \in \mathscr{B}$ 有

$$\sigma\tau(J) = \sigma(J^c) = J^{ce} = J.$$

而对于任意的 $I \in \mathscr{A}$，有

$$\tau\sigma(I) = \tau(I^e) = I^{ec} = I.$$

所以 σ 是一一映射，且 τ 为逆映射. □

习　题

1. 设诸 I 是环 R 的理想. 证明：

(i) $(I : I) = R, (I : 0) = R$；

(ii) $((I_1 : I_2) : I_3) = ((I_1 : I_3) : I_2) = (I_1 : I_2 I_3)$；

(iii) $(I_1 : (I_2 + I_3)) = (I_1 : I_2) \cap (I_1 : I_3)$；

(iv) $((\bigcap_j I_j) : I) = \bigcap_j (I_j : I)$；

(v) $(I_1 : I_2) = (I_1 : (I_1 + I_2))$；

(vi) 当 I_1, I_2 互质时，$(I_1 : I_2) = I_1$.

2. 若 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 R 中两两互质的 n 个理想. 证明：

$$I_1 I_2 \cdots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n.$$

3. 设 $f: A \longrightarrow B$ 为环同态，I_1, I_2 是 A 的理想，J_1, J_2 是 B 的理想. 证明：

$$(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e, \qquad (J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c;$$

$$(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e, \qquad (J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c;$$

$$(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e, \qquad (J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c;$$

$$(I_1 : I_2)^c \subseteq (I_1^c : I_2^c), \quad (J_1 : J_2)^c \subseteq (J_1^c : J_2^c).$$ (*)

§1.3 环 的 谱

质理想是交换代数中最重要的概念之一. 它是数论中质数概念及几何中点的概念的推广.

定义 设 R 是非零环, P 为 R 的真理想. 如果 $a,b\in R$, $ab\in P$, 则 a,b 中至少有一元在 P 中, 则 P 叫做 R 的**质理想**. 等价地, 真理想 P 称为 R 的质理想, 如果 $a,b\in R$, $a,b\overline{\in} P$, 则 $ab\overline{\in} P$.

设 $\mathfrak{m}$ 是环 R 的真理想, 如果 R 中不存在适合 $\mathfrak{m}\subset I\subset R$ 的理想 I, 则 $\mathfrak{m}$ 叫作 R 的**极大理想**.

定理 1.3.1 设 P 是非零环 R 的理想. 则

(i) P 是质理想 $\Leftrightarrow R/P$ 是整环;

(ii) $\mathfrak{m}$ 是极大理想 $\Leftrightarrow R/\mathfrak{m}$ 是域.

证明 (i) $\Rightarrow$: 设 P 为 R 的质理想, 则 $P\neq R$, 于是 R/P 不是零环. 如果 $\bar{a},\bar{b}\in\overline{R}=R/P$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}$. 则 $\overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}$, 于是 $ab\in P$. P 为质理想, 从而 a,b 中至少有一元在 P 中, 即 $\bar{a}=\bar{0}$ 或者 $\bar{b}=\bar{0}$. 这说明 R/P 是无零因子环, 即 R/P 是整环.

$\Leftarrow$: 设 R/P 是整环, 于是 R/P 不是零环, 这说明 $P\neq R$, 若 $a,b\in R$, $ab\in P$, 则 $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}=\bar{0}$, R/P 是无零因子环, 从而 $\bar{a}=\bar{0}$ 或者 $\bar{b}=0$, 即 $a\in P$ 或 $b\in P$, 这说明 P 是质理想.

(ii) $\Rightarrow$: 设 $\mathfrak{m}$ 为 R 的极大理想, 于是 $R/\mathfrak{m}$ 不是零环. 设 $\bar{a}$ 为 $\overline{R}=R/\mathfrak{m}$ 的非零元素, 这里 $a\in R$, 且 $a\overline{\in}\mathfrak{m}$ 于是

$$\mathfrak{m}\subset aR+\mathfrak{m}.$$

$\mathfrak{m}$ 为极大理想, 故有 $aR+\mathfrak{m}=R$. 于是 $\bar{a}\,\overline{R}=\overline{R}$, 所以在 $\overline{R}$ 中存在 $\bar{a}^{-1}$ 使得

$$\bar{a}\,\bar{a}^{-1}=\bar{1}.$$

这表明 $\overline{R}$ 中每一个非零元有逆元. 于是 $\overline{R}$ 为域.

$\Leftarrow$: 设 $R/\mathfrak{m}$ 为域, 于是 $R/\mathfrak{m}$ 为非零环, 从而 $\mathfrak{m}\neq R$. 假设 I 为

R 的理想，使得 $\mathfrak{m}\subset I\subseteq R$. 因为 $\mathfrak{m}\neq I$，于是有元素 $b\in I$，但 $b\overline{\in}\mathfrak{m}$，所以 $0\neq\bar{b}\in\bar{R}=R/\mathfrak{m}$. 记 $\bar{b}$ 的逆元为$\overline{b'}$，则有$\overline{bb'}=\bar{b}\,\overline{b'}=\bar{1}$. 于是 $bb'-1\in\mathfrak{m}$，从而 $1\in bb'+\mathfrak{m}\subseteq bR+\mathfrak{m}\subseteq I$. 这说明 $I=R$，即 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想. □

由定理 1.3.1 可知，环 R 的极大理想是质理想. 但反过来不对，如(0)是 $\mathbf{Z}$ 的质理想，而非极大理想.

定义 环 R 中所有质理想组成的集合，称为环的**质谱**，记作 Spec R，环 R 中所有极大理想组成的集合，称为 R 的**极大谱**，记作 Max R.

显然 Max $R\subseteq$Spec R.

环的质谱与极大谱是否存在呢？回答是肯定的，由于证明的需要，我们首先简要介绍 Zorn 引理. 它是一个应用十分广泛并且使用十分方便的工具.

非空集合 E 的元素之间的关系"$\leqslant$"，如果具有性质：($x,y,z\in E$)

(i) 反身性：对于任意的 $x\in E$，$x\leqslant x$；

(ii) 传递性：若 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则 $x\leqslant z$；

(iii) 反对称性：若 $x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则 $x=y$.

则称 E 是一个**偏序集**.

E 的子集合 T 叫做**链**，如果 $x,y\in T$，一定有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$.

如果 E 中存在元素 α，它不小于 E 中任何元素，则说 α 是 E 的一个极大元.

如果 E'是 E 的子集，若 E 中存在元素 β 使得任意的 $y\in E'$ 皆有 $y\leqslant\beta$，则说子集 E'在 E 中有一个上界 β.

Zorn 引理 设 E 是非空的偏序集. 如果 E 中的每个链在 E 中均有上界，则 E 中至少有一个极大元.

下面我们利用 Zorn 引理来证明极大理想的存在.

定理 1.3.2 每个非零环 R 中存在极大理想.