KNOWLEDGE TREE

2011 知识树考研

文登培训学校策划

考研数学基础核心讲义

（经济类）

陈文灯等教授几十年的教学结晶：
——深入、精辟、透彻；
——授之以渔，触类旁通；
——开拓视野，步步登高。

主　编/陈文灯
副主编/殷先军　王　莉　武海燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

KNOWLEDGE TREE

2011 知识树考研

文登培训学校策划

考研数学基础核心讲义

（经济类）

主　编/陈文灯

副主编/殷先军
　　　　王　莉
　　　　武海燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2011年考研数学基础核心讲义:经济类 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5640-2975-3

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第242024号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 22
字　　数 / 414千字
版　　次 / 2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷
定　　价 / 38.00元

责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 母长新

前　言

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎科学。有人把学数学比喻成爬台阶，下面几级上不去，就无法再向上爬了，很有道理。只有打好坚实的基础，才有可能掌握运算的方法和技巧。由于种种原因，有的同学还存在概念没吃透，理论没充分理解的欠缺。为此根据我们几十年的教学和考研辅导经验，编写这本与"教科书"平行，又略有提高，着重于引领同学们深入理解概念和基础理论的书。本书特点：

1. 文字叙述通畅易懂，深入浅出，使同学们对基本概念和基本理论理解得更深入更透彻。

2. 发掘出同学们认识和理解的死角和误区，通过例题的讲解，起到正本清源，拨乱反正的作用。

3. 为了引起同学们的注意，对有些概念、定理，还增加了注释，虽然只是廖廖数字，却有画龙点睛、开阔眼界、拓宽思路之功效。

4. 通过对精选例题的讲解收到正面的引导，有时也举些反例，起到反面的警示。

5. 针对线性代数、概率与统计公式比较多，难记忆的特点，采用表格法，使之一目了然。

本书对考研学生打基础很有参考价值，对在读本科生、大专生也是良师诤友，本书中有些处理不当的请同仁批评指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

第 2 篇　线性代数

第3篇　概率论与数理统计

第 1 篇　微　积　分

第 1 章　函数、极限和连续

基础知识与规律总结

1.1　函　　数

一、函数的基本概念

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意的 $x \in D$，变量 y 按照对应法则 f 总有一个确定的实数值与之对应，则称 y 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为函数的定义域，有时记为 D_f.

全体函数值的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

注 ① 函数是一个变量对另一个变量的依赖关系.

如，函数 $y = x^2$，$y = \sin x + 1$，$y = \ln x$，$y = \ln x^2$ 等.

② $y = c$（c 为常数）称为常函数.

2. 函数的定义域的求解

(1) 若函数是用解析式表示的，则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合；

(2) 若是根据实际问题建立的函数，则定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

常用函数的定义域：

$y = \dfrac{1}{x}$，定义域为：$x \neq 0$；$y = \sqrt[2n]{x}\ (n \in N)$，定义域为：$x \geqslant 0$；

$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$，定义域为：$x > 0$；

$y = \sin x$ 或 $y = \cos x$，定义域为：$(-\infty, +\infty)$；

$y = \tan x$，定义域为：$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$；

$y = \cot x$，定义域为：$x \neq k\pi, k \in Z$；

$y = \arcsin x$ 或 $y = \arccos x$，定义域为：$[-1, 1]$.

【例 1.1】求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{x-1}(9-x^2)$；　　(2) $y=\sqrt{\arcsin x-\frac{\pi}{4}}$.

【解】(1) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}9-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x<3\\x>1\\x\neq 2\end{cases}$$，故函数的定义域为：$\{x\mid 1<x<2 \text{ 或 } 2<x<3\}$

(2) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}\arcsin x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0\\|x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$，故函数的定义域为：$\left\{x\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

注 一般给出函数表达式时，并不写出它的定义域，但是隐含了定义域.

如，给出函数 $y=\frac{1}{x}$，就隐含了 $x\neq 0$.

3. 函数的值域的求解

(1) 由多项式表达的函数，一般用配方法或判别式法求函数的值域；

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ 有实数解 $\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$.

若 $\Delta=b^2-4ac<0$，则 $f(x)$ 无实数解.

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域；

(3) 若含三角函数，可利用某些三角函数的有界性；

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.(1.3 节讲)

【例 1.2】求下列函数的值域：

(1) $y=3-\sqrt{x^2-4x+9}$；　　(2) $y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}$；

(3) $y=\frac{x+1}{x-1}$；　　(4) $y=3-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$；

(5) $y=\frac{5}{2x^2-4x+3}$.

【解】(1) 应用配方法，则　$y=3-\sqrt{(x-2)^2+5}$，

故函数的值域为：$(-\infty,3-\sqrt{5}]$.

(2) $y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}=1-\frac{4}{\sin x+2}$，而 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，

所以　$1\leqslant\sin x+2\leqslant 3$，$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{\sin x+2}\leqslant 1$，

即　$-3\leqslant y\leqslant-\frac{1}{3}$，故函数的值域为：$\left[-3,-\frac{1}{3}\right]$.

(3) 当 $x\neq-2$ 时，由原式可得 $x=\frac{1-2y}{y-1}$，即 $y\neq 1$.

故函数的值域为：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) 由原式可得：$x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3-y}{2}+\frac{\pi}{12}$，因为 $\left|\frac{3-y}{2}\right|\leqslant 1$，

所以函数的值域为：[1,5].

(5) 变形为 $2yx^2-4yx+3y-5=0$，则

$\Delta=16y^2-8y(3y-5)\geqslant 0\Rightarrow y(y-5)\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant y\leqslant 5$.

4. 函数概念的两个要素：定义域和对应法则

(1) 定义域：自变量 x 的取值范围. $y=\arcsin(x^2+2)$ 不是函数，因为 $x^2+2>1$.

(2) 对应法则：给定 x 值，求 y 值的方法.

注 ① 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数（或称两个函数等价），否则表示两个不同的函数.

② 函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示无关，称为函数表示的无关特性. 此法常用来求函数的表达式.

【例 1.3】 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组.

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$；　　(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$；(4) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

【解】 (1) $y=x^0$ 的定义域为 $\{x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x\neq 0\}$，且对应法则相同，故该组的两个函数等价.

(4) 要使 $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\x-2>0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\geqslant 3\}$；要使 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}\geqslant 0\\x-2\neq 0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\geqslant 3$ 或 $x<2\}$，故该组的两个函数不等价.

【例 1.4】 设 $f(\tan x)=\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x}$，求 $f(x)$.

【分析】 对 $f(g(x))=h(x)$，一般令 $g(x)=t$，求出 x 关于 t 的表达式，代入 $h(x)$，然后利用函数的表示无关特性求函数的表达式.

【解】 $f(\tan x)=\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x}=\sec^2x+\tan^2x=1+2\tan^2x$，令 $\tan x=t$，有 $f(t)=1+2t^2$.

于是　$f(x)=1+2x^2$.

【例 1.5】 设 $f(\cos^2x)=\cos 2x-\cot^2x$，$0<x<1$，求 $f(x)$.

【解】 $f(\cos^2x)=2\cos^2x-1-\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}$，

令 $t=\cos^2x$，则 $f(t)=2t-1-\frac{t}{1-t}$，$\cos^21<t<1$.

故 $f(x)=2x-1-\frac{x}{1-x}=2x-\frac{1}{1-x}$，$\cos^21<x<1$.

二、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义：

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x \in D$，有

$$f(-x)=f(x)(\text{或 } f(-x)=-f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数(或奇函数).

注 ① 奇偶性是函数的整体性质，对整个定义域而言. 奇偶函数的定义域一定关于原点对称，如果一个函数的定义域不关于原点对称，则这个函数一定不是奇(或偶)函数. 所以判断函数的奇偶性，首先是检验其定义域是否关于原点对称，然后再严格按照奇偶性的定义经过化简、整理、再与 $f(x)$ 比较得出结论. 如，$f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0\\ -1, x=0\end{cases}$，因为其定义域关于原点不对称，它就不具有奇偶性.

② 偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

③$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

④$f(x)\equiv 0$ 既是奇函数又是偶函数. $f(x)\equiv c(c\neq 0)$ 是偶函数.

(2) 奇偶函数的运算性质：

① 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或任意多个偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数.

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

④ 非零的一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶的.

常见的偶函数：常函数 $y=c$，$|x|$，$\cos x$，x^{2n}(n 为正整数)，e^{x^2}，$e^{|x|}$，$e^{\cos x}$….

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\frac{1}{x}$，x^{2n+1}(n 为正整数)，$\arcsin x$，$\arctan x$，$\operatorname{sgn} x$，….

【例 1.6】 判别下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2)$f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$，其中 $a>0, a\neq 1$，$F(x)$ 为奇函数；

(3)$f(x)=\begin{cases}x(1-x), x>0\\ x(1+x), x<0\end{cases}$.

【解】 (1)$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$，

则
$$\begin{aligned} f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\ &=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})\\ &=\ln 1=0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $G(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，

则 $G(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，

则 $G(x)+G(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0.$

所以 $G(x)$ 是奇函数，又 $F(x)$ 是奇函数，而偶数个奇函数的乘积是偶函数，

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $x>0$ 时，$f(-x)=-x[1+(-x)]=-x(1-x)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$f(-x)=-x[1-(-x)]=-x(1+x)=-f(x)$.

故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 1.7】证明：定义在对称区间$(-a,a)$内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证】设 $f(x)$ 在$(-a,a)$内有定义，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

因为 $\varphi(-x)=-\varphi(x),\psi(-x)=\psi(x)$，

所以 $\varphi(x)$ 是奇函数，$\psi(x)$ 是偶函数，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，

故命题得证.

注 这个结论要记住，以后用起来方便.

2. 周期性

(1) 定义：

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对任意 $x\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

$f(x-T)=f(x)$ 也是成立的.

(2) 周期函数的运算性质：

① 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x)$、$g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 一般是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的周期函数（正弦函数与余弦函数的和或差不满足此性质，如 $|\sin x|+|\cos x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$）.

常见的周期函数：$\sin x,\cos x$，其周期 $T=2\pi$；

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$，其周期 $T=\pi$.

【例 1.8】求 $f(x)=x-[x]$ 的最小周期.

【解】设 $x=n+r$，m 为正整数，则

$$\begin{aligned}f(x+m)&=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]\\&=m+n+r-m-[n+r]=n+r-[n+r]=f(x),\end{aligned}$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期，且最小周期为 1.

注 周期函数并不一定有最小周期，如对于常函数，任意正数都是它的周期；对于狄利克莱函数，任意正有理数都是该函数的周期，所以常函数和狄利克莱函数都不存在最小正周期.

【例 1.9】设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$，$x=b$ 均对称$(a<b)$，求证：$y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

【证】由题设，$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，

于是 $f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)$
$=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]$
$=f[x+2(b-a)]$.

故 $y=f(x)$ 是周期函数，且周期 $T=2(b-a)$.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，数 M 称为 $f(x)$ 的一个界；若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 M_1，对任意 $x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界，且 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；

若存在 M_2，对任意 $x\in D$，恒有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界，且 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

注 ① 有界性是相对于某个区间而言的，是局部概念.

如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 是无界的，但在 $[0.01,2]$ 是有界的.

② 函数在 D 上有界的充分必要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

六个常见的有界函数：

$|\sin x|\leqslant 1$；$|\cos x|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$

$|\arcsin x|\leqslant \pi/2$；$|\arccos x|\leqslant \pi, x\in[-1,1]$

$|\arctan x|<\pi/2$；$|\operatorname{arccot} x|<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$.

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对任意 $x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

注1 函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加时，x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号相同，即

$$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0.$$

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少时，x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号相反，即

$$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0.$$

注2 ① 单调性也是相对于某个区间而言的，是局部概念.

② 单调函数的反函数仍单调，且单调性相同.

③ 复合函数 $f(g(x))$ 的单调性有如下结论：

若 f,g 的单调性相同，则 $f(g(x))$ 单增；若 f,g 的单调性相反，则 $f(g(x))$ 单减.

【例 1.10】设 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

【证】任意 $x_1,x_2\in(-a,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,a)$ 且 $-x_1>-x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加，故 $f(-x_1)>f(-x_2)$，

又由于 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内是奇函数，则 $-f(x_1)>-f(x_2)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

注 奇函数若在某区间单调增加(或减少)，则在对称区间也是单调增加(或减少)；偶函数若在某区间单调增加(或减少)，则在对称区间是单调减少(或增加).

三、反函数、隐函数和复合函数

1. 反函数

(1) 定义：

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f，若对任意 $y\in Z_f$，有唯一确定的 $x\in D_f$ 满足 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x=f^{-1}(y)(\text{或 } x=\varphi(y)),$$

并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$.

注 ① $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合；而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(均是在同一坐标系).

② $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数. 定义域上单调的函数必有反函数. 若要求函数的反函数，则只能求它的单调区间的反函数.

④ $y=f(f^{-1}(y))$，$x=f^{-1}(f(x))$.

⑤ 奇函数的反函数也是奇函数.

⑥ 原函数与反函数具有相同的单调性.

(2) 计算反函数：

步骤如下：① 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出，得到 $x=f^{-1}(y)$；

② 将刚才得到的表达式中的字母 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$，注意要写出定义域.

注 若求分段函数的反函数，只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

【例 1.11】 求 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

【解】 当 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，原式变形为：

$$y(\sqrt{2x+1}+1)=\sqrt{2x+1}-1,\text{即}\sqrt{2x+1}=\frac{1+y}{1-y},$$

解得 $$x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-1\right]=\frac{2y}{(1-y)^2},\text{且}\frac{1+y}{1-y}\geqslant0\Rightarrow-1\leqslant y<1$$

故反函数为 $$y=\frac{2x}{(1-x)^2},\text{且}-1\leqslant x<1.$$

【例 1.12】 设 $f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1\\x^2,1\leqslant x\leqslant4\\2^x,4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

【解】由 $y=x,-\infty<x<1$ 可得 $x=y,-\infty<y<1$；

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$ 可得 $x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$；

由 $y=2^x,4<x<+\infty$ 可得 $x=\log_2 y,16<y<+\infty$；

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换，则得到 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1\\ \sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x,16<x<+\infty\end{cases}.$$

2. 隐函数

前面我们看到的都是显函数，即 y 等于含自变量 x 的式子，如 $y=\ln(x+1)$ 等，只要知道了 x 的值，立刻就能得到 y 的值. 但有的函数方程不能这么表达，即 y 不能用 x 的式子表示；x 也不能用 y 的式子表示. x 和 y 的对应关系由一个方程 $F(x,y)=0$ 表示.

如果变量满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，则说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

注 有的隐函数可以化成显函数，如，$x-y^3+1=0$ 是一个隐函数，它也可以化成显函数，即 $x=y^3-1$ 或 $y=\sqrt[3]{x-1}$. 但有的隐函数不能表示成显函数的形式. 如，隐函数 $e^x+e^y+xy=0$.

3. 复合函数

(1) 定义：

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $Z_\varphi\subset D_f$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

注 复合的条件：$Z_\varphi\subset D_f$，即外层函数的定义域包含内层函数的值域.

如，$y=\arcsin u,u=x^2+2$ 不能复合为 x 的函数，

这是因为 $|u|\leqslant 1,x^2+2\geqslant 2$，所以 $y=\arcsin(x^2+2)$ 无意义.

(2) 求复合函数的定义域：

已知 $f(x)$ 的定义域为 D_f，求函数 $f(g(x))$ 的定义域只需求满足 $g(x)\in D_f$ 的 x 的集合.

【例 1.13】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(\cos x)$；　　(2) $f(x+a)+f(x-a),a>0$.

【解】(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，

所以 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$，即 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

故定义域为 $\left\{x\mid 2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$.

(2) 记 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)$，若 x 为 $F(x)$ 定义域内的点，由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，可得

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}\Rightarrow a\leqslant x\leqslant 1-a(a>0).$$

因此，当 $a<1-a$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，定义域为：$[a,1-a]$；

当 $a=1-a$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，定义域为 $\left\{x=\frac{1}{2}\right\}$；

当 $a > 1-a$，即 $a > \frac{1}{2}$ 时，定义域为 Φ.

(3) 求解复合函数的基本方法：直接代入法，分析法和图示法.

① 直接代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法. 该法适用于初等函数的复合.

② 分析法：所谓分析法就是根据最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法. 该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

③ 图示法：所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法. 该法适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合. 具体解题程序为：

(a) 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像；

(b) 把 $y=f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出(是若干条平行于 x 轴的直线)；

(c) 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间；

(d) 将(c)所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得到复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式及相应的 x 的变化区间.

【例 1.14】 设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，求 $f(f(x))$，$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

【解】 利用直接代入法求解.

$$f(f(x))=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}, x\neq\pm 1$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{1}{1-(1-x^2)^2}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}, x\neq\pm 1.$$

【例 1.15】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$.

【解】 由题设知，$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$，下面根据外层函数的定义域包含内层函数的值域，求具体表达式.

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时，

若 $x<0$，且使 $\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$，得 $x<-1$；

若 $x\geqslant 0$，且使 $\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$，得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

若 $x<0$，且使 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}$，得 $-1\leqslant x<0$；

若 $x\geqslant 0$，且使 $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}$，得 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述，有 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.