师联教案

接轨新课程——课堂实录和教学设计汇编

新课标通用

创新教学设计案例精选

高中几何

北京师联教育科学研究所 编

CHuangXin JiaoXue SHeJi AnLi JingXuan

學苑音像出版社

接轨新课程——课堂实录和教学设计汇编

新课标通用

创新 教学设计案例精选

高中几何

北京师联教育科学研究所 编

学苑音像出版社

责任编辑：王　军
封面设计：师联平面工作室

·新课标通用创新教学设计案例精选·
高中几何

北京师联教育科学研究所　编
学苑音像出版社出版发行
★
北京市图文印刷厂印刷
2004年11月印刷
开本：850×1168　1/32　印张：126.375　字数：3284千字
ISBN7－88050－142－8
本书全21册配碟发行总价315.00元(不含碟)

出版说明

国家基础教育课程改革的大幕拉开以后，新课程标准下的教学如何展开？成了困扰广大教育工作者的一大难题。为此，北京师联教育科学研究所汇集了国家基本教育课程改革专家组的核心专家、各大教学实验区及各省市重点学校的一线教育工作者，从理论上、实践上在《接轨新课程——课堂实录与教学设计》中对这一新课程的代表性问题给予了权威性、可操作性的回答，该作品汇集了多媒体与传统纸介质图书，充分体现了新课程的特点与教学实施方法，具有鲜明的特点：

1、指导思想新。

完全按照新课程标准，融汇各版本教材，新课程标准通用。摒弃了以往单纯理论说教的形式，配以北京四中、北师大二附中、北京实验二小及全国各大实验区的教学实录，给广大教师以直观感觉，使之乐于接受新课标的教育观点。

2、内容全面。

不仅包含了语文、数学、外语、物理、化学、生物、历史、地理、政治等学科的教学内容，更全面的含盖了科学、品德与生活、品德与社会、小学英语、历史与社会、体育与健康、音乐、美术、艺术、综合实践活动等多方面的内容，内容全面实用。

3、载体形式新。

从小学到高中，完全新课标，各年级、各学科均配有教学设计与课堂实录，书碟互补，具有事半功倍的效果。

北京师联教育科学研究所

2004 年 11 月

目　　录

《两条异面直线所成的角和距离》

新课标教学设计

【教学目标】

1.运用类比推理,理解引入有关概念的必要性、重要性;

2.理解、掌握有关概念的定义,并会初步应用有关概念的定义来解题。

【教学重点和难点】

这节课的重点与难点都是异面直线所成的角和距离这两个概念的引入,和使学生真正地理解、掌握这两个概念。

【教学设计过程】

一、引入有关概念的必要性

师:我们都知道空间的两直线的位置关系有三种:相交、平行、异面。这只是"定性"来研究对象,当我们要"定量"来研究对象时就必需要引入一些有关的新概念。

(这时教师拿出两根小棍做平行直线演示并说)

例如 $a // b$, $c // d$(如图 1),虽然它们都是平行直线,但是它们之间有什么区别呢?

生:虽然它们都是平行直线,但是它们的之间的距离不同。

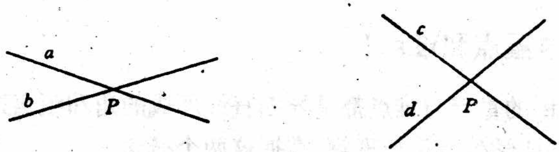
师:对,为了区别都是平行直线的不同情况,也就是说为了"定量"的研究平行直线,就必须引入有关"距离"这个概念。

(这时教师又拿出两根小棍做相交直线,并且使其角度各有不同,并说)

（1）　　　　（2）

图　1

师:又例如 a 与 b 是相交直线,c 与 d 也是相交直线(如图 2)。虽然它们都是相交直线,但是它们之间有什么区别呢?



（1）　　　　（2）

图　2

生:虽然它们都是相交直线,但是它们的夹角大小不同。

师:对,为了区别两相交直线的不同情况,也就是说为了"定量"的研究相交直线就必须引入有关"角"的概念。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其距离的大小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 a,b 是异面直线,直线 c,d 也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间的距离不同。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其所成角的大小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 a,b 是异面直线,直线 c,d 也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间所成的角大小不同。

师:对,通过观察我们可以发现为了“定量”的研究异面直线,必须引入异面直线所成的角和异面直线的距离这两个概念。下面我们先来研究异面直线所成的角这个概念的定义。

二、异面直线所成的角的定义

(教师拿出两根小棍做异面直线状,演示给学生看,使其观察如何给异面直线所成的角下定义)

师:我们来看这模型,怎样给异面直线 a、b 所成的角下定义?

生:可以把直线 a 平移与 b 相交,这时由 a 平移而得的 a' 与 b 相交所成的角,就可以定义为异面直线 a 与 b 所成的角。

师:对,但是为了使这个定义更有一般性,我们给异面直线所成的角做如下的定义。

定义 直线 a,b 是异面直线,经过空间任意一点 O,分别引直线 $a' /\!/ a$,$b' /\!/ b$,我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角。(如图 3)

师:由定义来看,O 是空间中任意一点,当然我也可以在空间任意取一点 O_1,过 O_1 分别引 $a_1 /\!/ a$,$b_1 /\!/ b$,那么这时 a_1 和 b_1 所成的锐角与 a' 和 b' 所成的锐角是否相等呢?

生:相等,因为有等角定理的推论“如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等”。因为 $a' /\!/ a$,$a_1 /\!/ a$ 可推出 $a' /\!/ a_1$,同理可推出 $b' /\!/ b_1$,所以可用等角定理的推论。

师:对,我们在上两节课讲的公理 4 和等角定理,在某种意义来说都是为给异面直线所成的角下定义做理论上的准备,正因为角的大小与 O 点的选择无关,所以为了简便,点 O 常取在两条异面直线中的一条上,所以你们一开始给异面直线所成的角下的定义是对的。

师:我们如何给两条异面直线互相垂直下定义呢?

生:如果两条异面直线所成的角是直角,我们就说这两条异面直

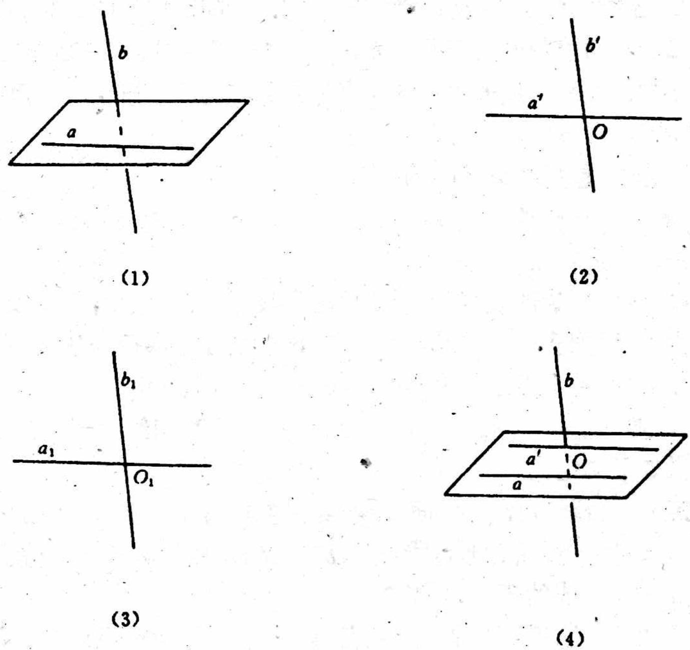


图 3

线互相垂直。

师:设两条异面直线所成的角为θ,问θ角的取值范围?

生:$\theta \in (0°, 90°]$,半开、半闭区间。

师:θ角能否等于0°。

生:不能,因为当$\theta = 0°$时,异面直线就转化为平行直线。

师:对,$\theta \neq 0°$,否则,量变就转化为质变,异面直线就转化为平行直线了。至于异面直线所成的角规定为锐角或直角,则是为了所成的角是唯一确定的。

三、练习

例 正方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$。求:

(1)A_1B 与 CC_1 所成的角是多少度?为什么?

(2) A_1B_1 与 CC_1 所成的角是多少度？为什么？

(3) A_1C_1 与 BC 所成的角是多少度？为什么？

(4) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱中，与棱 B_1B 垂直的棱有几条？（如图 4）

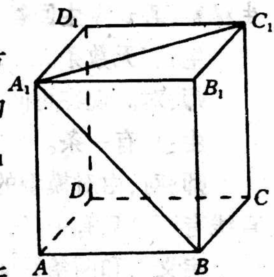


图 4

师：请你们依次回答上述的四个问题。

生：(1) 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，$CC_1 /\!/ BB_1$，所以 A_1B 与 CC_1 所成的角为 $\angle B_1BA_1$，而 $\angle B_1BA_1=45°$，所以 A_1B 与 CC_1 所成的角为 45°。

师：请回答第(2)问。

生：因为 $CC_1 /\!/ BB_1$，所以 A_1B_1 与 CC_1 所成的角为 $\angle BB_1A_1$，而 $\angle BB_1A_1 = 90°$，所以 A_1B_1 与 CC_1 所成的角为 90°。

师：请回答第(3)问。

生：因为 $BC /\!/ B_1C_1$，所以 A_1C_1 与 BC 所成的角就是 $\angle B_1C_1A_1$，而 $\angle B_1C_1A_1=45°$，所以 A_1C_1 与 BC 所成的角为 45°。

师：请回答第(4)问。

生：与棱 B_1B 垂直的棱有 8 条。

师：有哪几条是与 B_1B 相交垂直？有哪几条是与 B_1B 异面垂直？

生：与 B_1B 相交垂直的棱有 4 条，为 AB, A_1B_1, BC, B_1C_1；与 B_1B 异面垂直的棱也有 4 条，为 AD, A_1D_1, CD, C_1D_1。

师：对。这里我们需要指出，在立体几何中。“垂直”、“相交垂直”、“异面垂直”这三个不同概念的联系和区别。以后我们讲两直线垂直，则是指这两直线可能是相交垂直，也可能是两直线异面垂直。这里我们要破除在平面几何中形成的思维定式，就是一说两直线垂直就是指两直线相交垂直。而要了解：“垂直”=“相交垂直”+“异面垂直”。

四、异面直线的距离的定义

师:和两条异面直线都垂直的直线有多少条?(同时拿出两根小棍做为异面直线 a,b,再拿出一根小棍 c 摆出与 a、b 都垂直状,而小棍 c 在保持与 a、b 都垂直的情况下可平行移动,用这样的模型让学生观察,再让学生回答)

生:有无数条。

师:对。现在再问与这两条异面直线都相交垂直的直线有几条?

生:只有一条。

师:对,由对模型的观察我们知道和两条异面直线都相交垂直的直线有而且只有一条,现在可以给出下面两个定义。

定义　和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线。

定义　两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度,叫做两条异面直线的距离。

要注意这两个定义之间的联系与区别,公垂线是一条直线,这直线在这两条异面直线间(两垂足间)的线段的长度是这两条异面直线的距离。

五、练习

例　在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=4cm$,$BC=3cm$,$B_1B=2cm$。求:

(1)异面直线 A_1A 与 BC 的距离;

(2)异面直线 A_1A 与 C_1D_1 的距离;

(3)异面直线 A_1B_1 与 BC 的距离。(如图 5)

师:在第(1)问中 A_1A 与 BC 的距离等于多少?为什么?

生:因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,$AB\perp A_1A$ 于 A,$AB\perp BC$ 于 B。所以 AB 的长度就是异面直线 A_1A 与 BC 的距离,因为 $AB=4cm$,所以 A_1A 与 BC 的距离为 $4cm$。

师:在第(2)问中,A_1A 与 C_1D_1 的距离等于多少?为什么?

生:因为 $A_1D_1 \perp A_1A$ 于 A_1,$A_1D_1 \perp C_1D_1$ 于 D_1,A_1D_1 的长度就是异面直线 A_1A 与 C_1D_1 的距离,因为 $A_1D_1 = BC = 3cm$,所以 A_1A 与 C_1D_1 的距离为 3cm。

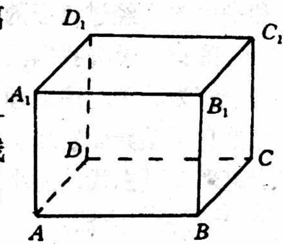


图 5

师:在第(3)问中,A_1B_1 与 BC 的距离等于多少?为什么。

生:因为 $B_1B \perp A_1B_1$ 于 B_1,$B_1B \perp BC$ 于 B。B_1B 的长度就是异面直线 A_1B_1 与 BC 的距离,因为 $B_1B = 2cm$,所以 A_1B_1 与 BC 的距离等于 2cm。

师:现在你们自己看课本第 15 页到第 16 页的例,看完后你们自己来讲。可根据课本来回答。

例 设图 6 中的正方体的棱长为 a。

(1)图中哪些棱所在的直线与直线 BA' 成异面直线?

(2)求直线 BA' 和 CC' 所成的角的大小;

(3)求异面直线 BC 和 AA' 的距离。

(可根据课堂情况灵活掌握让学生看 3 ~5 分钟后,叫学生回答)

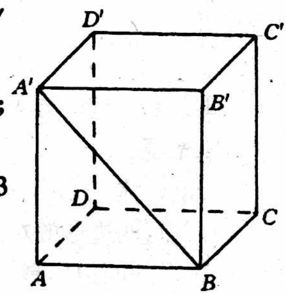


图 6

师:现在你们先回答第(1)问。

生:因为 $A' \notin$ 平面 $B'BCC'$,而点 B、直线 CC' 都在平面 $B'BCC'$ 内,且 $B \notin CC'$。所以直线 BA' 与 CC' 是异面直线。

同理,直线 $C'D'$,$D'D$,DC,AD,$B'C'$ 都和直线 BA' 成异面直线。

师:刚才回答是正确的,但它们的理论根据是什么呢?

生:是根据课本第 10 页例,过平面外一点与平面内一点的直线,

和平面内不经过该点的直线是异面直线。

师:对,过去我们已经讲过,课本第 10 页上的例,应该明确把它"升格"为定理。这定理有的书上叫它为异面直线存在定理,有的书上把它叫做异面直线判定定理。以后,我们叫这定理为异面直线判定定理。过去我们还小结过,证明两条直线是异面直线的方法有两个,是哪两个方法。

生:一是用反证法,二是用异面直线的判定定理。

师:现在回答第(2)问。

生:因为 $C'C // BB'$,所以 BA' 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角。因为$\angle A'BB' = 45°$,所以 BA'和 CC'所成的角是 $45°$。

师:现在回答第(3)问。

生:因为 $AB \perp AA'$于 A,$AB \perp BC$ 于 B。所以 AB 是 BC 和 AA'的公垂线段;因为 $AB = a$,所以 BC 和 AA'的距离是 a。

师:今天我们讲了两个很重要的概念,两条异面直线所成的角和距离,我们一定要很好的理解、掌握这两个概念并能应用它们来解有关的题。

作业

课本第 17 页,第 9,10 两题。

补充题

1.正方体 12 条棱中,组成异面直线的对数是多少?[24]

2.空间四边形的对角线互相垂直,顺次连结这个四边形各边的中点,所得的四边形是矩形,试证明。[提示:证有一个角是直角的平行四边形是矩形]

3.空间四边形 ABCD,AB,BC,CD 的中点分别是 P,Q 和 R,且 $PQ = 2$, $QR = \sqrt{5}$, $PR = 3$。求异面直线 AC 和 BD 所成的角是多少度?[90°]

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H 分别是 AB,AD,CD 和 CC_1 的中点,求异面直线 EF 和 GH 所成的角是多少度?[60°]

课堂教学设计说明

1.为了使学生理解引入异面直线所成的角和距离这两个概念的必要,一定要运用类比推理的思想,从平面几何为了区别不同的平行直线要有距离的概念,为了区别不同的相交直线要有角的概念。这样为了区别不同的异面直线要引入异面直线所成的角和距离就是很自然很合理的了。

一定要使学生观察模型,使他们理解两异面直线所成角的概念的定义合理性。并且要求自己给出这个定义。

一定要使学生理解垂直、相交垂直、异面垂直这三个相互联系又相互区别的三个概念,使学生理解与两异面直线都相交垂直的直线有且只有一条,从而给异面直线的距离下定义做准备。

这节课引入两个新概念要用较多的时间,所以应用这两个概念的练习要很简单、很基本,使学生一看就会,目的是加深对概念的理解。

2.在立体几何第一章的教学中要有四个"高潮"(也可借用音乐中的一个术语,就是要有四个华彩乐段)。第一个"高潮"是在讲了异面直线所成的角和距离以后;第二个"高潮"是在讲了三垂线定理及其逆定理以后;第三个"高潮"是在讲了二面角及其平面角以后;第四个"高潮"是在讲了两平面垂直的定义、判定和性质以后。

所谓"高潮"是指在这一阶段教学中,要选较多、较全的题型,要多讲几次练习课,学生要多做些题,使学生能通过这一阶段的教学在解题的能力上有较大的提高,也就是说在逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力等跃上一个新的台阶或者说达到一个新的层面。所以在讲了异面直线所成的角和距离这节课后,还应安排两次练习题。为了节省篇幅,我们把第一节练习课的提纲写在下面。

3.第一节练习课提纲

例1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中。

(1)求 AD_1 与 B_1B 所成的角是多少度?

($45°$)

(2)问与 AD_1 异面,且所成的角是 $45°$ 的正方体的棱有哪几条?

(4条即为 B_1B, C_1C, B_1C_1, BC)

(3)问 AD_1 与 B_1C 所成的角是多少度?

($90°$)

(4)如果 M,N 分别是 B_1C_1, C_1C 的中点,问 MN 与 AD_1 所成的角是多少度?

($90°$)

由第(4)问这个特殊的题,用一般化的方法得出定理:一直线垂直于平行直线中的一条,也垂直于另一条。

例2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中。

(1)求 AD_1 与 A_1C_1 所成的角的度数?

($\triangle D_1AC$ 为等边三角形,$\angle D_1AC=60°$)

(2)如果 M,N 分别为 A_1B_1, B_1C_1 的中点,求 MN 与 BC_1 所成的角的度数?

($60°$)

(3)如果 P,Q 分别是 A_1A, A_1D_1 的中点,求 PQ 与 MN 所成的角的度数?

($60°$)

例3 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=4$, $BC=3$, $B_1B=2$。求:

(1)AB 与 A_1C_1 所成的角的正切?

($\frac{3}{4}$)

(2)A_1A 与 BC_1 所成的角的正弦?

($\frac{3}{13}\sqrt{13}$)

(3) A_1C_1 与 AD_1 所成的角的余弦?

$(\frac{9}{65}\sqrt{13})$

略解:(1)在 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中,$tg\angle C_1A_1B_1=\frac{3}{4}$。

(2)在 $Rt\triangle B_1BC_1$ 中,$\sin\angle B_1BC_1=\frac{3}{13}\sqrt{13}$。

(3)在 $\triangle D_1AC$ 中,$AD=5$,$AD_1=\sqrt{13}$,$CD_1=2\sqrt{5}$。

所以 $\cos\angle D_1AC=\frac{AD_1^2+AC^2-CD_1^2}{2AD_1\cdot AC}=\frac{13+25-20}{2\sqrt{13}\cdot5}=\frac{9}{65}\sqrt{13}$。

这叫余弦定理,我们补充的定理。详见代数课本第 239 页二解斜三角形中的 3.5 余弦定理。

在讲完这三个例题后,可做如下总结。

小结

(1)以概念为指导作出异面直线所成的角;

(2)找出这个角所在的三角形(直角三角形或斜三角形);

(3)解这个三角形,求出所要求的角。

在求异面直线所成的角的三个步骤中,关键是第(1)步,即把空间角(异面直线所成的角)转化为平面角,把解立体几何中的问题化归为解平面几何中的问题。

这节课可留如下作业。

(1)重做课堂练习中的例 3。

(2)看代数课本第 239～242 页。余弦定理只要求记住定理和用法,定理证明过程可略。

(3)做代数课本中第 243 页练习 1(1)(2)(3)(4)。

以上就是讲完异面直线所成的角和距离后第一节练习课的讲课提纲。在这节课中我们补充了余弦定理。在讲立体几何第一章中要不要提前补充余弦定理。在什么时候补充余弦定理,下面就谈一下

自己在教学实践中的想法。

4. 对补充余弦定理想法

余弦定理本来是初中的教材，在立体几何第一章的教学中不存在补充的问题。现在的教材把余弦定理放在高一的下半学期才讲，这就出现了在立体几何第一章的教学中要不要补充余弦定理的问题。

从理论上来说，求异面直线所成角的问题都要归结到解三角形的问题。而解直角三角形的问题一般来说都比较简单，达不到提高学生解题能力的目的。而要解斜三角形，一般来说就要用到余弦定理，所以余弦定理是我们在解立体几何有关问题时思维链条中不可缺少的一个环节，所以一定要补上这一环，否则学生的解题能力很难提高。

从实践上来说，1994 年我从北京师大二附中退休后一直在教学第一线上工作。从 1996 年到 1999 年都在北京第九十二中教立体几何就补充了余弦定理，而且就是讲了异面直线所成的角以后补充。从教学实践的效果来看，学生完全能够理解，掌握余弦定理，并利用余弦定理来求异面直线所成的角。用一句通俗的话来说“过了这一村，就没有这个店”。错过了在这个时候补充余弦定理，并用余弦定理来求异面直线所成的角的机会，以后就很难有适当的机会再解这些类型的题。