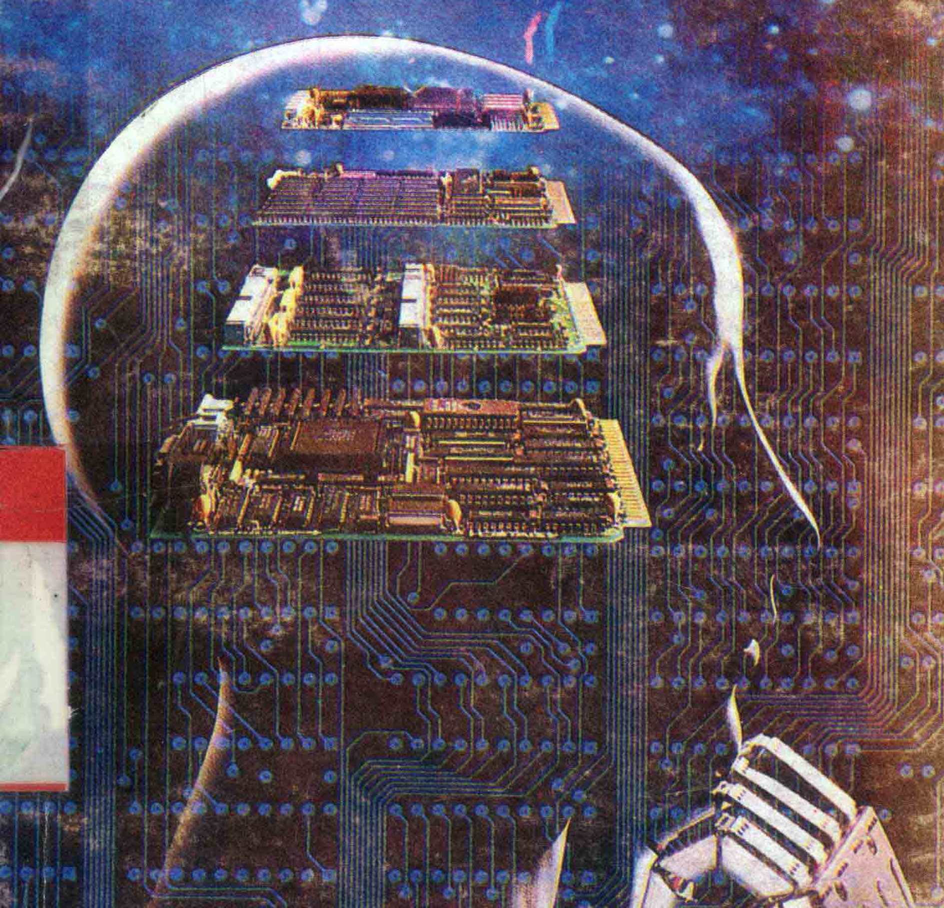
人大附中 柯景龙 许淑仁 张 健 柯惠云 编著

初中数学

解题方法与技巧



初　中　数　学

解题方法与技巧

人大附中　柯景龙　许淑仁　张　键　柯惠云　编著

北京师范大学出版社
1992・11

京新登字 160 号

初中数学解题方法与技巧

柯景龙　许淑仁
张　键　柯惠云

北京师范大学出版社出版发行
河北廊坊人民印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:787×1092 毫米 32 开　印张: 9　字数: 185 千字
1992 年 11 月第一版　1992 年 11 月第一次印刷
印数:1-12000

ISBN7-303-01680-5 / G · 1056
定价: 4.80 元

初中数学

解题方法与技巧

前　言

随着教学改革的不断深入和发展，学生获取知识的途径已由单一的课堂教学转变为课内与课外的结合，即通过多种途径获得知识，尤其是知识面的扩展和能力的培养，课外起着相当大的作用。为适应学生课内和课外学习的需要，并为参加中考、数学竞赛的需要。笔者根据全日制初中数学教学大纲内容，编写了本书。

本书力求寓基础知识和基本技能于综合训练之中，通过典型例题的分析、解答和说明，帮助学生进一步加深理解基础知识。掌握概念、定理、公式和法则，总结和归纳解题的思路，方法和技巧。补充教科书中例题、习题不足，扩展知识面，其目的在于培养读者分析问题和解决问题的能力，发展思维的灵活性，激发学生的求知欲。最后还安排了一定数量的练习题，以检查学习效果之用。

本书可供在职职工、自学青年和初中学生学习数学的参考书，也可作为青年教师数学教学的参考书。

目　　录

习题与答案

习题与答案

习题与答案

§1.非 负 数

非负数在数学解题中的重要作用

“非负数”顾名思义，就是指大于或等于零的数，其几何意义就是在数轴上，从原点和原点右边的点，都表示非负数。它在中学数学的各部分中都有所涉及，可以说具有“全局性”的重要概念，但在初中教材中却无单独章节和例题，致使不少同学对非负数的认识却很肤浅，往往意识不到非负数蕴藏着十分重要的解题潜能，从而不善于运用非负数及其性质解题。为此，笔者在本书中对它加以归纳和系统化，并通过例题和习题从中揭示出应用非负数的规律和方法以及应用技巧的多样化和灵活性，思维方法给人以启迪。

一、基础知识

初中代数教材关于非负数的概念主要有以下六个方面:

1、绝对值是“非负数”，即$|a|\geqslant0$。

2、算术根是“非负数”，即$\sqrt[n]{a}\geqslant0$。

(a$\geqslant$0，n 为大于 1 的整数)。故有$\sqrt[2]{a}=|a|\geqslant0$。并且要深刻认识$\sqrt{a^2}$与$|a|$的一致性。

3、一个实数的偶次幂是“非负数”。即$a^{2n}\geqslant0$，(n 为整数)。

4、若一个数的偶次方根有意义，则这个数是“非负数”。即$\sqrt[2n]{a}$有意义,a 为“非负数”(n 为自然数)。

5、若一元二次方程有实数根，则根的判别式为“非负

数”。即 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根，则 $\triangle=b^2-4ac\geqslant 0$。

6、在数轴上，原点和原点右边的点，都是表示非负数。

二.非负数在解题中常用的性质

1、“非负数”以零作为最小值。

2、有限个“非负数”的和仍为“非负数”。

3、如果有限个“非负数”的和为零，那么每个“非负数”均为零。

4、有限个“非负数”的积(包括乘方)仍为“非负数”。

5、“非负数”的商仍是“非负数”(除数不为零)。

三.非负数在解决数学问题中各种类型的应用

1、非负数在求值方面的应用；

2、非负数在化简中的应用；

3、用“非负数”解方程；

4、用“非负数”证明有关数学命题。

5、在解综合题中的应用。

四.例　　题

“非负数”在求值、化简、解方程、证明题以及某些综合题中都有着广泛的应用。近年来，在中考、数学竞赛中也经

常利用非负数及其性质解决多种类型的数学试题。

1、非负数在求值方面的应用

例 1.在实数范围内，求$\left|\left|\sqrt{-x^2}-1\right|-2\right|$的值。

解：根据算术根的定义,知$\sqrt{-x^2}$有意义，得$-x^2\geqslant 0$,$\therefore$ $x=0$，故原式的值$=|1-2|=1$。

例 2. 如果 a 和 b 是实数，且$\sqrt{2a-1}+|b+1|=0$。求$a^{-2}+b^{-1989}$的值。

解：由$\sqrt{2a-1}\geqslant 0$，$|b+1|\geqslant 0$。

根据非负数性质，有

$$\sqrt{2a-1}=0，且|b+1|=0。$$

从而得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$。

于是，$a^{-2}+b^{-1989}=(\dfrac{1}{2})^{-2}+(-1)^{-1989}=3$。

例 3. 已知：x、y 是实数，

$$且y=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x-1}+3。求 x^y 的值。$$

解：根据二次方程具有“非负数”以及分母不为零，可得：$x^2-1\geqslant 0$，$1-x^2\geqslant 0$，$x-1\neq 0$。

解得 $x=-1$，于是，当$x=-1$时，则$y=3$。

$$\therefore\ x^y=(-1)^3=-1。$$

例4. 已知$|2x+y+4|+x^2+y^2-2xy-2x+2y+1=0$。

求：$5x+2y$的值。

分析：1、这类问题，常可通过配方等方法，使问题转化为两个非负数的和等于零的形式，再利用非负数的性质获得问题的解决。2、“转化”的思想是十分重要的数学思想。转化的思想就是要以可变的观点去看待问题，有目的地对所要解决的问题进行变形。

解：$\because |2x+y+4|\geqslant 0$，$(x-y-1)^2=0$。

根据有限个非负数之和等于零，则每个非负数均为零，必须有 2x+y+4＝0，x−y−1＝0 同时成立。

解得 x＝−1，y＝−2。

所以 5x+2y−5x(−1)+2×(−2)＝−9。

例 5. 实数 x、y、z 满足等式

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0。$$

求：$(z+y)^x$的值。

解：将原式变形为：

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+Z}+(z-\frac{1}{2})^2=0。$$

因为$|x+y|$、$\sqrt{2y+z}$、$(z-\frac{1}{2})^2$ 均为非负数,且其和等于零，故知每个非负数必须均为零。

则有方程组

$$\begin{cases}x-y=0,\\2y+Z=0,\\Z-\frac{1}{2}=0。\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=-\frac{1}{4},\\y=-\frac{1}{4},\\z=\frac{1}{2}。\end{cases}$$

$$(Z+y)^x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}}}=\sqrt{2}。$$

例6. 已知$a>0$，$b>0$，

且有$\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}(\sqrt{a}+5\sqrt{b})$。

求：$\dfrac{2a+\sqrt{ab}+3b}{a+\sqrt{ab}-b}$的值。

解：由题设条件，可得

$$a+\sqrt{ab}=3\sqrt{ab}+15b,$$

整理，得 $a-2\sqrt{ab}-15b=0$，

即 $(\sqrt{a}-5\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})$

$=0$ $\because$ $a>0$，$b>0$，$\therefore$ $\sqrt{a}+3\sqrt{b}\neq 0$

故有 $\sqrt{a}-5\sqrt{b}=0$，

$\therefore$ $\sqrt{a}=5\sqrt{b}$。

两边平方，得$a=25b$，

$\therefore$ $\sqrt{ab}=\sqrt{25b^2}=5b$。

以$a=25b$，$\sqrt{ab}=5b$分别代入所求的分式，得

故$\dfrac{2a+\sqrt{ab}+3b}{a+\sqrt{ab}-b}=\dfrac{58b}{29b}=2$。

例7. 已知实数x、y满足等式$x^2+y^2-6x+8y+25=0$。

求：$\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$的值。

分析 1.本题所给特点是两个未知元，一个方程，乍看起来，x、y 的解是不定的。但因 x 与 y 是实数,这就启发我们设法将等式配成两个实数平方和为零的形式,从而利用实数的性质列出 x、y 的方程组，进而解得 x、y。

解法一：将原方程利用配方变形为：

$(x-3)^2+(y+4)^2=0$

根据两个非负数的和等于零，则两个非负数只有

x−3＝0，y+4＝0 同时成立时，原方程才成立。

即$\begin{cases} x-3=0, \\ y+4=0。\end{cases}$ 解得$x=3$，$y=-4$。

$\therefore \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}=-\dfrac{7}{12}$。

分析 2.如果把原方程看作是未知数 x 的二次方程，其余的作为已知数，那么，方程是否有解的问题就转化为判别式的讨论了。

解法二：将原方程整理化成为一般式

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的形式

$$x^2-6x+(y^2+8y+25)=0$$

$\because$ x为实数

$\therefore (-6)^2-4(y^2+8y+25)\geqslant 0$。

即$36-4y^2-32y-100\geqslant 0$;

化简整理得

$$y^2+8y+16\leqslant 0,$$

$$(y+4)^2\leqslant 0。$$

$\therefore \quad (y+4)^2=0$，$\therefore \quad y=-4$。

把 y＝−4 代入原方程。化简得

$$x^2-6x+9=0,$$

$$(x-3)^2=0, \quad \therefore x=3。$$

$\therefore \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}=-\dfrac{7}{12}$。

说明：1.以上两种解法容易看出，如果以配方的掌握和运用比较熟练，那么解法一显然较简捷。解法二的解法新颖独特，有很大的参考价值，因为判别式法是一种应用十分广泛的解题方法。

2.经常注意总结，归纳基本的解题思想和解题方法是十

分重要的。

解题的基本思想如：降次、消元及去分母、去绝对值符号、去根号等。

解题的基本方法如：利用非负数概念、算术根概念以及因式分解法、换元法、配方法、判别式法、反证法……等。

不少学生的通病是：解完一道题，不重视解题的总结、分析。不善于总结解完一道题后，得出一种思路、一个题型、一种方法或某种解题规律。这就是说，只有解题的"招架之功"，没有猎取规律性的"还手之力"。须知，联想是解题一种反馈方式，也是学习数学的汇聚性思想和探索解题方法的前提。

例8. 若x、y是实数，且$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+4$。

求：$log_4 xy$。

解：$\sqrt{2x-1}\geqslant 0$，$\sqrt{1-2x}\geqslant 0$，得

$$x=\frac{1}{2}, \qquad \therefore \qquad y=4。$$

于是$log_4 xy = log4_{\frac{1}{2}\cdot 4}$

$$=log_4 2 = log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}log_4 4=\frac{1}{2}。$$

例9.已知实数x、y适合$x^2-3xy+3y^2+4x-18y+52=0$

求$\dfrac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$的值。

解：将原等式变形为：

$$(2x-3y+4)^2+3(y-8)^2=0$$

根据非负数之和等于零，则每个负数均等于零，得

$$\begin{cases}2x-3y+4=0,\\ y-8=0,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=10,\\ y=8。\end{cases}$$

故$\dfrac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{8}}{10+\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{8}(10-\sqrt{8})}{100-8}$

$$=\frac{10\sqrt{8}-8}{92}=\frac{20\sqrt{2}-8}{92}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}-2}{23}.$$

例10. 若x、y为实数，且

$$y=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{6}}}{4x-5}$$

求：$log\frac{1}{7}(x+y)$的值。

解：为使y的表达式有意义，x必须同时满足下列三个不等式：

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x^2-1\geqslant 0,\\ 4x-5\neq 0。\end{cases}$$

$\therefore\ x=1,\quad$ 从而 $\quad y=0$

故知 $\quad log_{\frac{1}{7}}(x+y)=log_{\frac{1}{7}}(1+0)-log_{\frac{1}{7}}1=0$

例11. 已知x是实数，求$y=2x^2-6x+10$的极小值。

解：$y=2x^2-6x+10$

$$=2(x-3x+5)$$

$$=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{2}。$$

$\because$ x是实数，$\therefore$ $(x-\frac{3}{2})^2 \geqslant 0$。

$\therefore$ 当$x=\frac{3}{2}$时，y有极小值，并且其极小值为$\frac{11}{2}$。

例12. 计算$\sqrt{5^{2\log_5 lgx}-2lgx+1}$。

解：　原式$=\sqrt{5^{\log_5(lgx)^2}-2lgx+1}$

$=\sqrt{(lgx)^2-2lgx+1}$

$=\sqrt{(lgx-1)^2}$

$=|lgx-1|$

$=\begin{cases} lgx-1(当x\geqslant 10时); \\ 1-lgx(当1<x<10时)。\end{cases}$

2.非负数在化简中的应用

例1. 化简：$\sqrt{9x^2-12x+4}$，$(x<\frac{1}{2})$。

解：原式$=\sqrt{(3X-2)^2}=|3X-2|$。

$\because$ $x<\frac{1}{2}$，$\therefore$ $3x<\frac{3}{2}<2$。

故原式$=|3x-2|=-(3x-2)=2-3X$。

例2. 化简:$\sqrt{9a^2-6ab+b^2}$　$(a>\frac{1}{4},b>0)$。

解：原式$=\sqrt{(3a-b)^2}=|3a-b|$。

$\because$ $a>\frac{1}{4}$，$b>0$，则$3a>\frac{3}{4}b$。

若$3a-b\geqslant 0$，则$3a\geqslant b$，即$a\geqslant\frac{1}{3}b$。

由此可知

$$原式=|3a-b|=\begin{cases}3a-b，(当a>\frac{1}{3}b)；\\ b-3a，(当\frac{1}{4}b<a<\frac{1}{3}b)\end{cases}$$

例3. 把$\left|log_5\frac{1}{8}-log_5\frac{1}{7}\right|$的绝对值符号去掉。

解:∵ 底数5>1，∴ log_5x是增函数。

又$\frac{1}{8}<\frac{1}{7}$，　∴ $log_5\frac{1}{8}<log_5\frac{1}{7}$。

$$故\left|log_5\frac{1}{8}-log_5\frac{1}{7}\right|=-(log_5\frac{1}{8}-log_5\frac{1}{7})$$

$$=log_5\frac{1}{7}-log_5\frac{1}{8}。$$

例4. 化简:$|2-cos\alpha|+\sqrt{sin^2\alpha-10sin\alpha+25}$。

解:原式$=|2-cos\alpha|+\sqrt{(sin\alpha-5)^2}$

∵ $|cos\alpha|\leqslant 1$，$|sin\alpha|\leqslant 1$，

∴ $2-cos\alpha>0$，$sin\alpha-5<0$。

∴ 原式$=2-cos\alpha-(sin\alpha-5)$

$=7-sin\alpha-cos\alpha$。

例 5.实数 a、b、c 在数轴上的对应点如图所示:

图 1-1

化简: $|a+b|+|c-a|+|b+c|$。

解: (法一)∵ $a<0$，$b<0$，$a+b<0$，