◎新课程学习能力评价课题研究资源用书

◎主编 刘德 林旭　　编写 新课程学习能力评价课题组

中国教育学会《中国教育学刊》推荐学生用书

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING STUDY

配人教版

数学 九年级下册

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记

光明日报出版社

新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主　　编　刘　德　林　旭
本册主编　郑迎庆　王定成

数学 九年级下册

配人教版

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手.数学.九年级.下册/刘德,林旭主编. 一北京:光明日报出版社,2009.10
配人教版
ISBN 978-7-5112-0280-2

Ⅰ.学… Ⅱ.①刘… ②林… Ⅲ.数学课一初中一教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159798 号

学习高手
数学/九年级下册(人教版)

主　　编:刘　德　林　旭

责任编辑:温　梦
策　　划:聂电春　　责任校对:徐为正
版式设计:邢　丽　　责任印制:胡　骑

出版发行:光明日报出版社
地　　址:北京市崇文区珠市口东大街 5 号,100062
电　　话:010－67078249(咨询)
传　　真:010－67078255
网　　址:http://book.gmw.cn
E － mail:gmcbs@gmw.cn
法律顾问:北京昆仑律师事务所陶雷律师

印　　刷:山东滨州明天印务有限公司
装　　订:山东滨州明天印务有限公司
本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系调换。

开　　本:890×1240　1/32
字　　数:200 千字　　印　　张:7
版　　次:2009 年 10 月第 1 版　　印　　次:2009 年 10 月第 1 次
书　　号:ISBN 978-7-5112-0280-2

定价:11.90 元

目录

第二十六章　二次函数

26.1　二次函数及其图象

如图是八百里清江上一座集公路交通和城市景观于一体的中承式钢筋混凝土拱桥，主桥上的桥拱在空中划出一道优美的弧线，远远望去像是一弯彩虹横卧清波上．它给人们一种美的享受．这样的曲线就是抛物线．抛物线就是二次函数的图象．桥梁设计者如何利用抛物线的特点计算那拱桥上一根根垂直支架的长度呢？让我们带着这个问题，一起来研究二次函数的图象和性质吧！

高手支招① 细品教材

一、二次函数的定义(★★)

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数，$a\neq0$)的函数，叫做二次函数．其中 x 是自变量，a,b,c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项．

由于任何一个二次函数关系式都可以变形为 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数，$a\neq0$)的形式，所以我们把 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数，$a\neq0$)叫做二次函数的一般形式．

二次函数 $y=ax^2+bx+c$($a\neq0$)中，x,y 是变量，a,b,c 是常数，其中 b,c 可以是任意实数，a 必须是不等于零的实数．这是因为当 $a=0$ 时，二次函数就不是二次函数了．

状元笔记

理解二次函数的定义要注意掌握它的结构特征：①等号左边是函数，右边是关于 x 的二次式；② x 的最高次数是 2；③二次项的系数 $a\neq0$，b,c 可以为零．

【示例】下列函数中，是二次函数的为 …………………………………（　　）

A. $y=\dfrac{1}{x^2}$　　　　B. $y=(x+1)^2-2$

C. $y=x^2-(1-x)^2$　　　　D. $y=x^2-2z$

思路分析：选项 A，不是整式，所以不是二次函数；选项 C，可化简为 $y=2x-1$ 的形式，是一次函数；选项 D 有三个变量，所以不是二次函数；选项 B 可化为 $y=x^2+2x-1$，为二次函数的一般形式．

答案：B

二、二次函数 $y=ax^2$ 的图象(★★)

二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条曲线，这条曲线叫做抛物线 $y=ax^2$.

抛物线 $y=ax^2$ 是轴对称图形，其对称轴就是 y 轴. 由于二次函数 $y=ax^2$ 的图象是抛物线，所以常叙述为抛物线 $y=ax^2$.

二次函数 $y=ax^2$ 中隐含了一个重要条件：$a\neq0$.

状元笔记

二次函数 $y=ax^2$ 的图象与对称轴 y 轴只有一个交点，这个交点也就是抛物线的顶点，由于交点的坐标为(0,0)，所以顶点是坐标原点.

【示例】如图 26.1－1，函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 和函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的图象在同一坐标系中的图象大致是……………………………………………（　　）

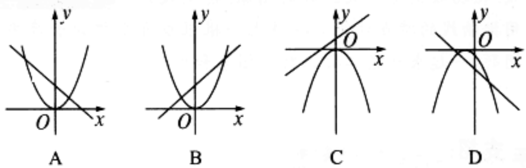

图 26.1－1

思路分析：选项 A 由二次函数图象可知 $a>0$，而由一次函数的图象可知 $a<0$，两者相矛盾；同理选项 C 也可排除；选项 D 中二次函数图象的顶点不在原点，所以 D 应排除.

答案：B

三、二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法(★★)

画二次函数 $y=ax^2$ 的图象的一般步骤是：

(1)列表：先取原点，然后在原点两侧对称计算出几个点的坐标；

(2)描点：先将对称轴 y 轴的一侧的几个点描出来，然后根据对称关系描出另一侧的几个对称点；

(3)连线：按照一定的顺序将所描点用平滑的曲线连接起来.

状元笔记

画二次函数图象取点时，一般在对称轴的一侧取 3 至 5 个点. 再根据对称性得出另一侧的 3 至 5 个点. 描点的方法一般是按自变量从小到大的顺序进行，或从左到右依次进行.

【示例】在同一坐标系中，画出函数 $y=2x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象.

思路分析：按照画二次函数的图象的一般步骤列表、描点和连线分步进行，便可画出相关图象.

解：列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$y=-2x^2$	…	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	…

根据上表中 x、y 的值在坐标系中描点 (x,y)，并用平滑曲线顺次连接各点，得到函数 $y=2x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象，如图 26.1-2.

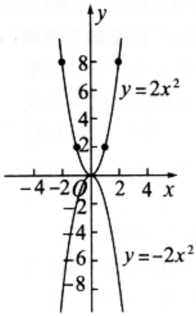

图 26.1-2

四、二次函数 $y=ax^2$ 的性质(★★★)

二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条抛物线，其对称轴是 y 轴，顶点在原点，开口方向由 a 的符号决定.

当 $a>0$ 时，开口向上，抛物线(除顶点外)都在 x 轴的上方，并向上方无限延伸. 顶点 $O(0,0)$ 是最低点，当 $x=0$ 时，y 的最小值为 0. 在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大. a 越大，开口越小.

比较几条抛物线 $y=ax^2$ 的关系：若 a 的绝对值相等，则它们的形状相同；当 a 相等时，它们的形状与开口方向相同；当 a 互为相反数时，它们的形状相同，开口方向相反.

当 $a<0$ 时，开口向下，抛物线(除顶点外)都在 x 轴的下方，并向下方无限延伸. 顶点 $O(0,0)$ 是最高点，当 $x=0$ 时，y 的最大值为 0. 在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小.

抛物线 $y=ax^2$ 的开口大小取决于 $|a|$ 的值：$|a|$ 越大，开口越小；$|a|$ 越小，开口越大.

【示例】函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 交于点 $(1,b)$.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)求抛物线 $y=ax^2$ 的关系式,并求顶点坐标和对称轴;

(3)x 取何值时,二次函数 $y=ax^2$ 中的 y 随 x 的增大而增大?

思路分析:(1)将点$(1,b)$分别代入两个函数关系式可得;(2)将(1)中求得的 a 值代入,可得抛物线的关系式;(3)根据二次函数的性质可求.

解:(1)将 $x=1,y=b$ 代入 $y=2x-3$,解得 $b=-1$. 所以交点坐标是$(1,-1)$. 再将 $x=1,y=-1$ 代入 $y=ax^2$ 中,解得 $a=-1$. 所以 $a=-1,b=-1$.

(2)由(1)可得抛物线的关系式为 $y=-x^2$,于是可得顶点坐标为$(0,0)$,对称轴为直线 $x=0$,即 y 轴.

(3)因为 $a=-1<0$,对称轴为直线 $x=0$,所以当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

五、二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质(★★★)

将二次函数 $y=ax^2$ 向右移动 $h(h>0)$个单位,向上移动 $k(k>0)$个单位,即可得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.(若向左移,可理解为向右移 $-h$个单位,向下移,可理解为向上移$-k$ 个单位)

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 是由 $y=ax^2$ 平移而来,所以它们的开口方向、大小和形状完全一样,所不同的是它们的顶点坐标和对称轴,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标为(h,k),对称轴为直线 $x=h$.

状元笔记

平移的方向及平移后的顶点坐标的确定方法,有句口诀:"左加右减,上加下减",即是向左平移,括号内便加,向右平移,括号内便减,向上平移,括号外便加,向下平移,括号外便减.

【示例】抛物线 $y=-2(x-2)^2-5$ 是由抛物线 $y=-2x^2$ 经过怎样的平移而来?

思路分析:原抛物线可化为 $y=-2(x-0)^2+0$,经过比较抛物线 $y=-2(x-2)^2-5$,括号内是"$-$",括号外是"$-$",根据"左加右减,上加下减"即可知道是向右和向下平移而来的.

解:抛物线 $y=-2(x-2)^2-5$ 是由抛物线 $y=-2x^2$ 向右平移 2 个单位,再向下平移 5 个单位而得到的.

六、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质(★★★)

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可通过配方变形为 $y=a(x-h)^2+k$,可由抛物线 $y=ax^2$ 向左(或向右)平移$|h|$个单位,再向上(或向下)平移$|k|$个单位得到. 所以二次函数有如下性质:

(1)当 $a>0$ 时,抛物线开口向上,并向上方无限延伸;对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$;在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$的左侧,y 随

状元笔记

比较抛物线 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 和 $y=ax^2+bx+c$,可知三者的关系是由特殊到一般的关系. 其性质也由特殊推广到一般. 因此弄清三者之间的关系,是解决相关问题的关键.

x 的增大而减小，在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而增大；抛物线有最低点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，其最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(2)当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下方无限延伸；对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$；在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而减小. 抛物线有最高点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，其最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

【示例】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图 26.1－3 所示，有下列 5 个结论：

①$abc>0$；②$b<a+c$；③$4a+2b+c>0$；④$2c<3b$；⑤$a+b>m(am+b)$($m\neq1$ 的实数).

其中正确的结论有 …………………………（　　）

A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 5 个

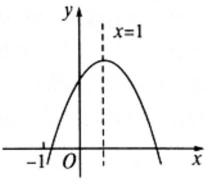

图 26.1－3

思路分析：a 的符号根据开口方向确定，c 的符号根据抛物线与 y 轴的交点位置来确定，b 的符号由对称轴的位置及 a 的符号确定. 形如 $a-b+c$，$4a+2b+c$ 的式子，可看作抛物线上的点的纵坐标，找到对应的横坐标就可确定点的位置，从而可确定其符号. 其中③④⑤正确.

答案：B

七、用待定系数法求二次函数的解析式(★★★)

与用待定系数法求一次函数的解析式一样，可由二次函数图象上三个点的坐标，列出关于 a、b、c 的三元一次方程组，求出三个待定系数 a、b、c，从而求出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式.

若已知抛物线的顶点坐标，可设抛物线的解析式为 $y=a(x-h)^2+k$，把顶点坐标代入，再根据另外一个点的坐标即可求出 a 的值. 若已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，则可用交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

【示例】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(-1,0)$，$(0,-3)$，$(2,-3)$ 三点，(1)求这条抛物线的解析式；(2)写出抛物线的开口方向，对称轴和顶点坐标.

思路分析：将三个点的坐标代入解析式中，建立关于 a、b、c 的三元一次方程组，求出 a、b、c 的值，即可求出抛物线的解析式，然后进行配方，写成顶点式，即可写出对称轴和

顶点坐标.

解：(1)由题意得$\begin{cases}a-b+c=0,\\c=-3,\\4a+2b+c=-3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)将 $y=x^2-2x-3$ 配方，得 $y=(x-1)^2-4$.

∴抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为$(1,-4)$.

高手支招② 归纳整理

ZHIZHAO

本节主要内容是二次函数的概念，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象和性质. 教材按从特殊到一般、从简单到复杂的顺序编排. 二次函数的图象和性质是学习的重难点. 学习本节内容要掌握二次函数的图象和性质，能确定抛物线的顶点与对称轴，会求二次函数的最值；会用待定系数法确定二次函数的关系式；掌握二次函数图象平移规律，做到数形结合；能运用二次函数的图象和性质解决一些简单的应用问题.

二次函数的图象和性质

- 二次函数的定义：形如 $y=$__①__$(a\neq0)$的函数叫做二次函数.
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，自变量 x 的取值范围一般都是__②__.
- 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 向左(或向右)平移__③__个单位；再向上(或向下)平移__④__个单位得到.
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的顶点坐标为__⑤__；对称轴为__⑥__.
- 当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上，当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，其最小值为__⑦__.
- 当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下，当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，其最大值为__⑧__.
- 由二次函数图象上三个点的坐标建立关于 a、b、c 的三元一次方程组，求出__⑨__的值，即用待定系数法，求二次函数的解析式.

答案

①ax^2+bx+c ②全体实数 ③$|h|$ ④$|k|$ ⑤$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

⑥$x=-\frac{b}{2a}$ ⑦$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ⑧$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ⑨a、b、c

高手支招③典例精析

一、基础知识题型

【例1】(湖北武汉中考)已知二次函数的图象开口向下,且经过原点,请写出一个符合条件的二次函数关系式________.

思路分析:∵二次函数的图象开口向下,∴$a<0$.

又∵二次函数的图象经过原点,

∴二次函数图象上有一点的坐标为(0,0).于是可写出二次函数关系式 $y=-2x^2$.

答案

$y=-2x^2$

技术化提示 本题是一道开放题,符合这两个条件的二次函数有无数个.

【例2】(江苏泰州中考)二次函数 $y=x^2+4x+3$ 的图象可以由二次函数 $y=x^2$ 的图象平移而得到,下列平移正确的是 ……………………………… (　　)

A. 先向左平移2个单位长度,再向上平移1个单位长度

B. 先向左平移2个单位长度,再向下平移1个单位长度

C. 先向右平移2个单位长度,再向上平移1个单位长度

D. 先向右平移2个单位长度,再向下平移1个单位长度

思路分析:先将二次函数 $y=x^2+4x+3$ 进行配方,$y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$,将二次函数 $y=x^2$ 的图象先向左平移2个单位长度,再向下平移1个单位长度,可以得到二次函数 $y=x^2+4x+3$ 的图象.

答案:B

技术化提示 回答一个二次函数图象经过怎样的平移得到另一个二次函数的图象时,一般先配方,后比较顶点坐标,确定平移方向和平移单位.

【例3】已知函数 $y=mx^{m^2+1}$ 是关于 x 的二次函数.

(1)求满足条件的 m 的值.

(2)m 为何值时,函数图象有最低点?最低点的坐标是什么?这时当 x 为何值时,函数值 y 随 x 的增大而增大?

(3)m 为何值时,函数有最大值?最大值是多少?此时 x 的值为多少?你能说明函数 y 的值随 x 的变化而变化的规律吗?

思路分析:首先根据二次函数的定义求出 m 的值,再借助草图进行分析,最

后结合对称轴，讨论变量y的值随x的变化情况.

解：(1)根据题意，得 $m^2+1=2$.

解得 $m=\pm1$.

经检验，$m=\pm1$ 都符合题意.

(2)如图 26.1-4，∵函数图象有最低点，∴$m=1>0$. 此时 $y=x^2$，

∴最低点的坐标为$(0,0)$，当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大.

(3)∵函数有最大值，∴$m=-1<0$. 此时 $y=-x^2$，如图所示.

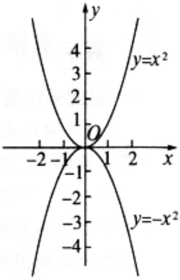

图 26.1-4

∴当 $x=0$ 时，函数 y 有最大值 0. 当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小；当 $x=0$ 时，函数 y 取最大值.

技术化提示 根据二次函数的定义确定 m 的值时，要注意检验；结合二次函数的性质讨论相关问题时，关键是抓住 a 的符号与对称轴方程.

【例 4】将抛物线 $y=2(x+1)^2-5$ 向右平移 1 个单位，再向上平移 5 个单位，则所得的抛物线的关系式为________.

思路分析：因为抛物线平移后仍是抛物线，根据抛物线平移规律可得所求的关系式.

由抛物线 $y=2(x+1)^2-5$ 向右平移 1 个单位，得 $y=2x^2-5$，再向上平移 5 个单位，得所求的关系式为 $y=2x^2$.

技术化提示 将抛物线左右平移时，函数关系式的平方项发生变化；上下平移时，函数关系式的常数项发生变化.

【例 5】已知一抛物线与 x 轴的交点是 $A(-2,0)$、$B(1,0)$，且经过点 $C(2,8)$.

(1)求该抛物线的关系式；

(2)求该抛物线的顶点坐标.

思路分析：(1)已知抛物线上的三点坐标，可直接运用待定系数法，列三元一次方程组求解；(2)把二次函数的一般式化为顶点式可得顶点坐标.

解：(1)设这个抛物线的关系式为 $y=ax^2+bx+c$.

∵抛物线过 $A(-2,0)$、$B(1,0)$、$C(2,8)$三点，于是得

$$\begin{cases}4a-2b+c=0,\\ a+b+c=0,\\ 4a+2b+c=8.\end{cases}$$ 解这个方程组，得 $a=2,b=2,c=-4$.

∴所求抛物线的关系式为 $y=2x^2+2x-4$.

(2)∵ $y=2x^2+2x-4=2(x^2+x-2)=2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{2}$,

∴该抛物线的顶点坐标是 $(-\frac{1}{2},-\frac{9}{2})$.

技术化提示 求二次函数关系式,可根据已知条件的不同,选设不同形式的关系式,再将已知点的坐标代入列方程组求解.

二、综合拓展题型

【例6】(吉林中考)如图26.1-5,抛物线 $y_1=-x^2+2$ 向右平移1个单位得到 y_2,回答下列问题:

(1)抛物线 y_2 的顶点坐标为________.

(2)阴影部分的面积 $S=$________.

(3)若再将抛物线 y_2 绕原点 O 旋转180°得到抛物线 y_3 的开口方向________,顶点坐标________.

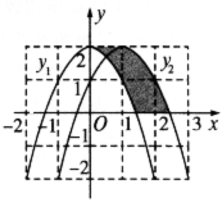

图 26.1-5

思路分析:(1)抛物线 y_2 的顶点坐标根据平移可得;(2)阴影部分面积利用割补法可求;(3)由中心对称的性质可知 y_3 开口方向和顶点坐标.

答案

(1)(1,2) (2)2 (3)向上 (−1,−2)

技术化提示 求这类图形的阴影部分面积,可将这个曲面四边形分割为无数个平行四边形,再利用平行四边形的面积公式计算.

【例7】如图26.1-6,直线 l 经过 $A(4,0)$、$B(0,4)$ 两点,它与二次函数 $y=ax^2$ 的图象在第一象限交于点 P,若 $\triangle AOP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$,求这个二次函数的关系式.

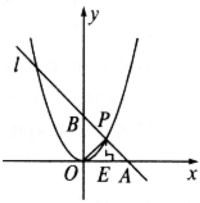

图 26.1-6

思路分析:要求二次函数 $y=ax^2$ 的关系式,必须求出点 P 的坐标.根据 $\triangle AOP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$,可以求出点 P 的纵坐标,再根据直线 l 的关系式,可求点 P 的横坐标.

解:设直线 l 的关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

∵ l 过 $A(4,0)$、$B(0,4)$ 两点,∴ $\begin{cases}0=4k+b,\\4=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=4.\end{cases}$

∴直线 l 的关系式为 $y=-x+4$.

过点 P 作 $PE\perp OA$ 于 E，$\because S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}OA\times PE$，$\therefore \frac{9}{2}=\frac{1}{2}\times 4\times PE$.

$\therefore PE=\frac{9}{4}$. 又$\because$点 P 在直线 l 上，$\therefore \frac{9}{4}=-x+4$. 解得 $x=\frac{7}{4}$. $\therefore P(\frac{7}{4},\frac{9}{4})$.

$\because$点 P 在 $y=ax^2$ 上，$\therefore \frac{9}{4}=(\frac{7}{4})^2a$. 解得 $a=\frac{36}{49}$. $\therefore y=\frac{36}{49}x^2$.

技术化提示 求 $y=ax^2$ 类的函数关系式的关键是确定 a 的值. 一般利用已知条件建构方程或方程组求解.

【例 8】已知抛物线 $y=(m-1)x^{m^2-m}$ 开口向下，求 m 的值.

错解：$\because$抛物线开口向下，$\therefore m-1<0$，解得 $m<1$.

错解分析：只考虑 $m-1<0$ 是不全面的，

$\because$抛物线是二次函数图象，$\therefore x$ 的次数应为 2，即 $m^2-m=2$.

正解：根据题意，得 $\begin{cases}m^2-m=2,\\ m-1<0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$.

三、探究创新题型

【例 9】如图 26.1-7，一个二次函数的图象经过点 A、C、B 三点，点 A 的坐标为 $(-1,0)$，点 B 的坐标为 $(4,0)$，点 C 在 y 轴的正半轴上，且 $AB=OC$.

(1)求点 C 的坐标；

(2)求这个二次函数的关系式，并求出该函数的最大值.

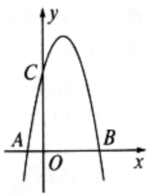

图 26.1-7

思路分析：先根据已知条件求出 C 点的坐标，再利用三点坐标求关系式，最后可直接利用公式求这个函数的最大值.

解：(1)$\because A$ 的坐标为 $(-1,0)$，B 的坐标为 $(4,0)$，

$\therefore AO=1$，$OB=4$. $\because AB=OC$，$AB=AO+OB=1+4=5$，$\therefore OC=5$.

$\therefore$点 C 的坐标为 $(0,5)$.

(2)方法一：设图象经过 A、B、C 三点的二次函数的关系式为 $y=ax^2+bx+c$.

$\because$这个函数的图象经过点 $(0,5)$，$\therefore c=5$.

又$\because$过点 $(-1,0)$，$(4,0)$，于是，得 $\begin{cases}a-b+5=0,\\ 16a+4b+5=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{5}{4},\\ b=\frac{15}{4}.\end{cases}$

$\therefore$所求的二次函数关系式为 $y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5$.

$\because a=-\frac{5}{4}<0$，$\therefore$ 当 $x=-\frac{\frac{15}{4}}{2\times(-\frac{5}{4})}=\frac{3}{2}$ 时，y 有最大值，其最大值为 $y=\frac{4\times(-\frac{5}{4})\times5-(\frac{15}{4})^2}{4\times(-\frac{5}{4})}=\frac{125}{16}$.

方法二：设图象经过 A、B、C 三点的二次函数的关系式为 $y=a(x-4)(x+1)$.

$\because$ 点 $C(0,5)$ 在图象上，$\therefore 5=a(0-4)(0+1)$. 解得 $a=-\frac{5}{4}$.

$\therefore$ 所求的二次函数关系式为 $y=-\frac{5}{4}(x-4)(x+1)$.

$\because A$ 的坐标为 $(-1,0)$，B 的坐标为 $(4,0)$，$\therefore$ 线段 AB 的中点坐标为 $(\frac{3}{2},0)$.

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$. $\because a=-\frac{5}{4}<0$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，y 有最大值，其最大值为 $y=-\frac{5}{4}\times(\frac{3}{2}-4)\times(\frac{3}{2}+1)=\frac{125}{16}$.

技术化提示 在求最值时，也可以先将求出的二次函数关系式，通过配方化为顶点式，再直接写出最值.

高手支招④ 链接中考

ZHIZHAO

二次函数的图象和性质是历年中考重点考查的内容. 考查的形式多样，既有选择题、填空题，也有解答题. 考查内容主要是不同形式的二次函数(有特殊的、有一般的)的图象和性质；函数图象的平移与函数关系式的变化之间的关系；利用待定系数法求二次函数关系式；利用二次函数解决简单的应用问题. 除常规题型外，图象阅读、图象理解、二次函数与几何综合等新题型层出不穷. 分值约 8～12 分.

【例 1】(山东泰安)抛物线 $y=-2x^2+8x-1$ 的顶点坐标为…………（　　）

A. $(-2,7)$　　B. $(-2,-25)$

C. $(2,7)$　　D. $(2,-9)$

答案：C

点拨 本题既可用配方法求出顶点坐标，也可直接运用公式求出顶点坐标.

【例 2】(安徽)已知二次函数的图象经过原点及点$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$,且图象与 x 轴的另一交点到原点的距离为 1,则该二次函数的解析式为__________.

答案

$y=x^2+x$,$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}$

点拨 图象经过原点,即是过点(0,0),又图象与 x 轴的另一交点到原点的距离为 1,即是图象可能经过点(1,0),也有可能经过点(−1,0),所以本题应考虑两种情况.

【例 3】(湖北孝感)将函数 $y=x^2+x$ 的图象向右平移 $a(a>0)$ 个单位,得到函数 $y=x^2-3x+2$ 的图象,则 a 的值为……………………………… ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案: B

点拨 将两个函数解析式进行配方,得 $y=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$,$y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$,它们的顶点坐标由$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$变成了$(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$,显然顶点向右平移了 2 个单位.

【例 4】(湖北荆门)如图 26.1-8,一开口向上的抛物线与 x 轴交于 $A(m-2,0)$,$B(m+2,0)$两点,记抛物线顶点为 C,且 $AC\perp BC$.

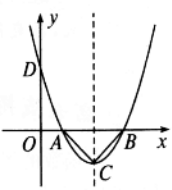

图 26.1-8

(1)若 m 为常数,求抛物线的解析式.

(2)若 m 为小于 0 的常数,那么(1)中的抛物线经过怎么样的平移可以使顶点在坐标原点?

(3)设抛物线交 y 轴正半轴于 D 点,问是否存在实数 m,使得$\triangle BOD$ 为等腰三角形?若存在,求出 m 的值;若不存在,请说明理由.

解:(1)设抛物线的解析式为 $y=a(x-m+2)(x-m-2)=a(x-m)^2-4a$.

$\because AC\perp BC$,由抛物线的对称性可知:$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形,又 $AB=4$,

$\therefore C(m,-2)$代入得 $a=\frac{1}{2}$. $\therefore$解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-m)^2-2$.

(2)$\because m$ 为小于零的常数,$\therefore$只需将抛物线向右平移 $-m$ 个单位,再向上平移 2 个单位,可以使抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-m)^2-2$ 顶点在坐标原点.