高中平面解析几何

全一册·必修

中学数学
重点
难点
基点

李申榜 主编

中 学 数 学

重点　难点　基点

高中平面解析几何

（全一册·必修）

主　　编　李申榜

分册主编　蒋林祥

编　　者　蒋林祥　吴永中

吴立平　陈　峰

李文英

湖南师范大学出版社

〔湘〕新登字 011 号

中学数学重点难点基点

高中平面解析几何

(全一册　必修)

主　　编:李申榜

分册主编:蒋林祥

责任编辑:邱大先
　　　　　李　琪

湖南师范大学出版社出版发行

(长沙市岳麓山)

湖南省新华书店经销　长沙市银都教育印刷厂印刷

787×1092　32 开　8.25 印张　193 千字

1993 年 7 月第 1 版　1996 年 3 月第 7 次印刷

印数:74351—92450 册

ISBN7—81031—297—9/G・126

定价:6.50 元

前　言

本套丛书作为中学生课程辅导读物，旨在配合中学数学教师帮助学生更好地理解、消化教材的内容，起到落实“双基”，培养能力的作用.

我们根据多年从事教学、教研实践所积累的经验，依照教材的章节顺序，从教学重点、自学难点、训练基点三个方面对教材内容进行了深入的挖掘. 教学重点中根据数学教学大纲精神以表格的形式列出了知识点和应达到的认识层次，对本单元的知识结构进行了图解，并对要点进行了简要分析；自学难点中针对学生在学习过程中概念的模糊处、知识的难懂处、应用的易错处进行了深入浅出的讲解；训练基点中对本单元知识的应用进行了归类，例举了题型，并提供了巩固本单元知识的若干训练题和形成性测试题. 每章之后配有一套总结性测试题，用以反馈教与学的信息. 训练题、测试题的答案附书后.

由于时间仓促，本书难免存在不足之处，诚望广大师生批评指正.

主编者

1993 年 4 月

目　录

第一章　直线

第一节　有向线段、定比分点

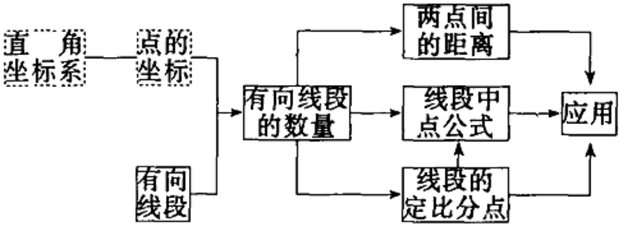
【教学重点】

一、教学目标

<table>
<tr><th rowspan="2">节次</th><th rowspan="2">知 识 要 点</th><th colspan="4">认识层次</th></tr>
<tr><th>了解</th><th>理解</th><th>掌握</th><th>熟练运用</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.1
有向线段、两点的距离</td><td>有向直线</td><td>✓</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>有向线段、有向线段的数量、长度</td><td></td><td>✓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>有向线段的数量公式、长度公式</td><td></td><td></td><td>✓</td><td></td></tr>
<tr><td>两点间的距离公式</td><td></td><td></td><td></td><td>✓</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1.2
线段的定比分点</td><td>线段的定比分点</td><td></td><td></td><td>✓</td><td></td></tr>
<tr><td>定比分点的坐标公式</td><td></td><td></td><td></td><td>✓</td></tr>
<tr><td>线段的中点坐标公式</td><td></td><td></td><td></td><td>✓</td></tr>
<tr><td>三角形的重心坐标</td><td></td><td></td><td>✓</td><td></td></tr>
<tr><td>用坐标法研究几何问题</td><td>✓</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

二、内容剖析

(一)知识结构



(二)要点分析

1. 有向直线和有向线段的概念

(1)有向直线与有向线段的特征是有方向性. 平面几何中的直线与线段只考虑它们的位置而不考虑它们的方向,而现实生活与生产实践中却往往还要考虑它们的方向.

(2)规定了正方向的直线叫做有向直线. 数轴是一条有向直线,但有向直线不一定是一条数轴.

(3)规定了方向,即规定了起点和终点的线段叫做有向线段. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overline{AB}$,它的方向是从 A 到 B.

无向线段 AB 与 BA 是同一条线段,而有向线段$\overline{AB}$与$\overline{BA}$是不同的线段.

2. 有向线段的数量公式

(1)如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行,那么它的方向与 l 的正方向可能相同或相反.

(2)根据$\overline{AB}$与有向直线 l 的方向相同或相反,分别把它的长度加上正号或负号,这样所得的数,叫做有向线段的数量. 显然,$\overline{AB}$落在一有向直线上时才具有确定的数量 AB.

(3)当$\overline{AB}$落在一条数轴上时，$\overline{AB}$的数量 AB 可以用 B 点的坐标(x_2)减去 A 点的坐标(x_1)来表示，即 $AB=x_2-x_1$. $\overline{AB}$的长度 $|AB|=|x_2-x_1|$(通称数轴上两点间距离公式).

3. 两点间的距离公式

(1)平面上任意两个点 $p_1(x_1,y_1)$与 $p_2(x_2,y_2)$之间的距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$是这两点的同名坐标之差的平方和的算术平方根.

(2)两点间的距离也就是由这两点确定的线段的长度，与线段的端点位置的顺序无关，只与它的两个端点的坐标有关.

(3)公式中有五个量，知道其中任意四个便可求出其余一个.

4. 有向线段的定比分点

(1)按定比划分线段的"定比"是什么？P 点分有向线段$\overline{P_1P_2}$的比 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$是分有向线段的数量比，不是有向线段的长度的比，更不是有向线段的比.

(2)$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$中，分子是起点 P_1 到分点 P 的有向线段的数量，分母是分点 P 到终点 P_2 的有向线段的数量，这里起点终点的顺序不能颠倒，分子分母也不能颠倒.

(3)点 P 的位置，决定比值 λ 的正负. 当点 P 在线段 P_1P_2 上时，点 P 是$\overline{P_1P_2}$的内分点，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}>0$(因为 P_1P、PP_2 同向)；当点 P 在线段 P_1P_2 的延长线或反向延长线上时，P 点是$\overline{P_1P_2}$的外分点，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}<0$(因为 P_1P 与 PP_2 方向相反).

(4)已知两个端点为 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$分$\overline{P_1P_2}$所成的比为 λ 时，点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\qquad(\lambda\neq-1)$$

5. 线段中点坐标公式

当点 P 是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，$P_1P=PP_2$，即 $\lambda=1$. 因此线段$\overline{P_1P_2}$的中点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

6. 三角形重心的坐标公式

已知三角形三顶点的坐标(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，则其重心的坐标是$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

【自学难点】

一. 模糊处

分辨$\overline{AB}$、AB、$|AB|$这些符号的意义.

(1)$\overline{AB}$表示一个几何图形，即以 A 为起点、B 为终点的有向线段.

(2)AB 表示有向线段$\overline{AB}$的数量，它是一个实数.

(3)$|AB|$表示有向线段$\overline{AB}$的长度，它是一个非负数.

二. 难懂处

1. 为什么证明有向线段的数量公式“$AB=x_2-x_1$”用完全归纳法，而证明两点间的距离公式、线段的定比分点公式不需要用完全归纳法？

有向线段数量公式成立的基础是“对于数轴上的任意两点 A、B，它们与原点构成的有向线段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{AB}$的数量满足关系式 $OA+AB=OB$”. 它的成立与 O、A、B 三点的位置顺序无关，其证明需要用完全归纳法，也就是要对 O、A、B 的六种不同的顺序逐个加以证明，并指出即使三点中有两个点重合时，等式仍然成立.

有向线段的数量公式证明以后，给我们极大方便，即轴上两点的距离和方向的确定不需直观的观察，而完全由坐标的计算来解决．而两点间距离公式、线段的定比分点公式的证明都要依赖于线段 P_1P_2 在横坐标轴和纵坐标轴上的射影这两个有向线段．可以说，这两个公式的一般性源于有向线段数量公式的一般性，所以其证明不再需要用完全归纳法了．

2．λ 为什么不能等于 -1？

有些同学仅从公式 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ 考虑，认为式中分母不能为零，所以 λ 不等于 -1．但正确地理解还需通过 λ 的定义来思考．

设 P 外分 $\overline{AB}$ 的比为 λ，$\overline{AP}$ 与 $\overline{PB}$ 方向相反，$\lambda=\frac{AP}{PB}<0$．如果 $\lambda=-1$，即 $\frac{AP}{PB}=-1$，$AP=-PB$，即 $AP=BP$．如果 A、B 不重合，这是不可能的；如果 A、B 重合，则不存在有向线段 $\overline{AB}$，当然就不存在分点 P 了．由此可知，$\lambda\neq-1$．

三、易错处

1．初学线段的定比分点时，受平面几何无向线段思维定势的影响，有时容易错误地认为 $\lambda=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，要特别注意 λ 是两个线段的数量之比．

2．几个符号容易出错：如两点间的距离 $|P_1P_2|$ 易写成 P_1P_2，有向线段的数量 AB 易写成 $\overline{AB}$．

3．两点 P_1P_2 的距离 $|P_1P_2|$ 在计算时往往不注意非负数这一结果．如求 $A(ab^2,2abc)$ 与 $B(ac^2,0)$ 两点间的距离，写成

$$AB=\sqrt{(ab^2-ac^2)^2+(2abc-0)^2}=\sqrt{(ab^2+ac^2)^2}=a(b^2+c^2)$$

应为 $|AB|=|a|(b^2+c^2)$．

【训练基点】

一.题型例举

(一)有向线段

例1 已知数轴 x 上点 A、B、C 的坐标分别为 $-3,1,4$.

(1)求$\overline{AB}$、$\overline{CB}$的数量;

(2)如果 x 轴上还有两个点 M,N,且 $AM=-2,|CN|=2$,求点 M,N 的坐标.

解 (1)$AB=1-(-3)=4$

$CB=1-4=-3$

(2)设 M、N 的坐标分别为 x_m,x_n,

由 $x_m-(-3)=-2$ 得 $x_m=-5$

由 $|x_n-4|=2$ 得 $x_n=6$ 或 2

例2 对于直线上任四个点 A、B、C、D,当$\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$时,求证:$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

证明 以四点所在直线为数轴,设 A、B、C、D 四点的坐标分别为 o、b、c、d.

$\because \frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$,即$\frac{c}{b-c}+\frac{d}{b-d}=0$.

$\therefore b(c+d)=2cd$,即$\frac{c+d}{cd}=\frac{2}{b}$.

$\therefore \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{c+d}{cd}=\frac{2}{b}$.

又 $\frac{2}{AB}=\frac{2}{b}$.

$\therefore \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

说明 关于同一直线上有向线段之间的关系的证明,一般可取此直线为数轴,各点就有相应的坐标,利用有向线段的数量

公式，把关于有向线段数量的运算转化为对应实数的运算，这是解析几何的一种基本思想方法. 本例设 A 为原点是计算上的一个技巧，只是为了计算简便而已.

例 3 若 a、b、c、$d\in R$，求证

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \qquad ①$$

分析 这是一个代数题，能否通过坐标法把它转化成几何形式，用几何方法做呢？只要我们逆用两点间距离公式，就会明白题中三个根式的几何形式，实现从"数"到"形"的转化.

解 因 a、b、c、$b\in R$，所以可把 $\sqrt{a^2+b^2}$ 看作是直角坐标系中点 $A(a,b)$ 到原点 O 的距离，同样把 $\sqrt{c^2+d^2}$ 看作是点 $B(c,d)$ 到原点 O 的距离，把 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ 看作是 $|AB|$（图 1－1－1），欲证①式，只要证 $|AO|+|BO|\geqslant|AB|$ ②

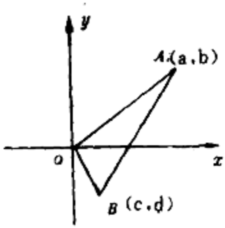


图 1－1－1

若点 A、O、B 不共线，则由三角形两边之和大于第三边可知②式成立；

若点 A、O、B 共线时，考虑下面情形：

(1)当点 A、B 在点 O 的同侧，则

$|AO|+|BO|>|AB|$；

(2)当点 A、B 在点 O 的两侧，则

$|AO|+|BO|=|AB|$；

(3)当点 A、B 中有一个与点 O 重合时，如 B 与 O 重合，则 $|AO|+0=|AO|=|AB|$

(4)当点 A、B 都与 O 重合时，$|AO|=|BO|=|AB|=0$，②式

仍然成立.

∴ 不论 A、B 在平面上的位置如何,②式都成立,从而①成立.

说明 透彻理解两点间距离公式,就可认识被开方式是平方和形式的二次根式的几何意义,也就为代数问题转化为几何问题提供了条件.在以后的学习中,要注意弄清并掌握几何对象的代数形式,才能灵活地实行数形转化.

(二)两点间的距离

例 1 已知 A、B 两点的坐标,求 $|AB|$

(1) $A(-5,8)$, $B(7,3)$

(2) $A(a+2b,a)$, $B(b,2a+b)$

解 (1) $|AB|=\sqrt{[7-(-5)]^2+(3-8)^2}=13$

(2) $|AB|=\sqrt{(a+2b-b)^2+(a-2a-b)^2}$

$=\sqrt{2(a+b)^2}=\sqrt{2}\,|a+b|$

注 $|AB|$ 是非负数.(2)中 $\sqrt{2(a+b)^2}=\sqrt{2}(a+b)$ 不恒成立.

例 2 已知点 $A(2,1)$, $|AB|=\sqrt{5}$,求点 B 的坐标.

(1) B 点在 y 轴上;

(2) B 点在第二、四象限角平分线上.

解 (1)设点 B 的坐标为 $(0,y)$.由

$\sqrt{(y-1)^2+4}=\sqrt{5}$ 得 $(y-1)^2=1$

$y-1=\pm 1$ $\therefore y_1=2, y_2=0$

∴ 所求点 B 的坐标为 $(0,2)$ 或 $(0,0)$

(2)设点 B 的坐标为 $(x,-x)$,由

$\sqrt{(x-2)^2+(-x-1)^2}=\sqrt{5}$ 得

$2x^2-2x=0$ $\therefore x_1=0, x_2=1$

∴所求点 B 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(1,-1)$.

说明 在 y 轴上的点的横坐标为零，在 x 轴上的点的纵坐标为零；在第一，三象限角平分线上的点的横、纵坐标相等，在第二、四象限角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数.

例3 求与 y 轴及点 $A(-4,2)$ 的距离都是 10 的点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标是 (x,y)，点 P 到 y 轴的距离是 $|x|$，$|PA|=10$，故有

$$\begin{cases}|x|=10\\ \sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=10\end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases}x_1=-10\\ y=10\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-10\\ y_2=-6\end{cases}$$

满足条件的点是 $P_1(-10,10)$ 和 $P_2(-10,-6)$.

注 点 P 到 y 轴的距离应为 $|PA|$，不是 PA. 即 $|x|=10$，并非只是 $x=10$.

例4 已知 $A(-2,-4)$，$B(6,4)$，$C(-6,0)$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 $|AB|=8\sqrt{2}$， $|BC|=4\sqrt{10}$

$|CA|=4\sqrt{2}$

$\because$ $|BC|^2=|AB|^2+|CA|^2$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形（$\angle A$ 是直角）.

说明 应用两点间距离公式不仅可以判断三角形形状，也可以判断三点共线（此时有两边之和等于第三边）.

（三）线段的定比分点

例1 求下列各题中分点 P 的坐标：

(1)起点 $A(1,3)$，终点 $B(2,-4)$，定比 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

(2)起点 $A(7,8)$，终点 $B(1,-6)$，求线段 AB 上两个三等分点的坐标.

解 (1)设 P 点坐标为 (x,y).

则 $x=\dfrac{1-\frac{1}{2}\cdot 2}{1-\frac{1}{2}}=0$

$y=\dfrac{3-\frac{1}{2}(-4)}{1-\frac{1}{2}}=10$

∴ P 的坐标为 $(0,10)$.

(2)设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是 AB 的两个三等分点，显然 $\lambda_1=\frac{AP_1}{P_1B}=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{AP_2}{P_2B}=\frac{2}{1}=2$

于是 $x_1=\dfrac{7+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=5$，$y_1=\dfrac{8+\frac{1}{2}(-6)}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{10}{3}$

$x_2=\dfrac{7+2\cdot 1}{1+2}=3$，$y_2=\dfrac{8+2(-6)}{1+2}=-\dfrac{4}{3}$

∴ AB 上两个三等分点为 $(5,\frac{10}{3})$，$(3,-\frac{4}{3})$.

注 (2)中求 P_2 的坐标时，也可以看作 P_2 内分 BA 为定比 $\frac{1}{2}$. 即可以灵活地选择分点、起点和终点. 但是，一旦选好，λ 也就随之而定.

例 2 已知点 $A(-1,1)$，$B(2,-1)$，求满足下列条件的点 P 的坐标：

(1)反向延长 $\overline{AB}$ 到 P，使 $|BP|=\frac{5}{3}|AB|$；

(2)P 在直线 AB 上，且 $|AP|:|AB|=2:3$；

(3)P 在直线 AB 上，又在 y 轴上.

解 (1)如图 1—1—2. 设分点 P 的坐标为 (x,y). 此时 $\lambda=\frac{AP}{PB}=-\frac{2}{5}$，由定比分点公式可求得 $x=-3, y=\frac{7}{3}$.

∴ 点 P 的坐标是 $(-3,\frac{7}{3})$.

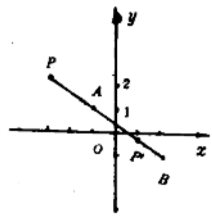


图 1—1—2

注 此题关键是确定 λ，步骤可概括为：画出示意图，定好始终分，算准数量比，外负内为正.

也可通过推算求 λ：

$$\lambda=\frac{AP}{PB}=-\left|\frac{AP}{BP}\right|=-\frac{|AP|}{|BP|}=-\frac{|BP|-|AB|}{|BP|}$$

$$=-\left(1-\frac{|AB|}{|BP|}\right)=-\left(1-\frac{3}{5}\right)=-\frac{2}{5}$$

(2) $\because \frac{|AP|}{|AB|}=\frac{2}{3}$　　$\therefore \frac{AP}{AB}=\pm\frac{2}{3}$

当 $\frac{AP}{AB}=-\frac{2}{3}$ 时，P 在 $\overline{AB}$ 反向延长上.

$\lambda=\frac{AP}{PB}=-\frac{2}{5}$　　同(1)(此略).

当 $\frac{AP}{AB}=\frac{2}{3}$ 时，P' 在 $\overline{AB}$ 上.

$\lambda=\frac{AP}{PB}=2.$

可求得 $P'(1,-\frac{1}{3})$，(如图 1—1—2).

(3)设点 P 的坐标为 $(0,y)$

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{0-(-1)}{2-0}=\frac{1}{2}$$

代入分点坐标公式得 $y=\dfrac{1+\frac{1}{2}(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$点 P 的坐标是$(0,\dfrac{1}{3})$.

说明 求 λ 有两种方法要熟练掌握:

(1)当 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$P(x,y)$三点坐标已知时,有公式 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$或 $\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$计算,(如本题(3)).

(2)当已知线段长度间的关系时,根据 $\lambda=\dfrac{p_1p}{pp_2}$的意义,转化为符号与长度两部分计算.(或根据题中条件建立关于 λ 的方程去求).

例 3 已知两点 $A(-2,0)$、$B(2,3)$,$P(x,y)$内分$\overline{AB}$的比 $\lambda=\dfrac{AB}{AP}$.求 P 点坐标.

解 $\because \lambda=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AP+PB}{AP}=1+\dfrac{PB}{AP}=1+\dfrac{1}{\lambda}$,

即 $\lambda^2-\lambda-1=0$

$\because \lambda>0$ $\therefore \lambda=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

代入分点坐标公式得

$x=2(\sqrt{5}-2)$,$y=\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$

$\therefore p$ 点坐标为$\left(2(\sqrt{5}-2),\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$.

例 4 已知三角形的顶点是 $A(5,-1)$,$B(-1,7)$,$C(1,2)$.求$\angle A$ 的平分线 AD 的长.

解 如图 1—1—3.