建筑力学

第一分册

理論、材料、建筑力学教研組合編

学植端

广东林学院

华南工学院教务处出版科印

1960.11

目 录

緒 論

剛 体 力 学

·运动学部分·

弹性体力学

緒 論

§ 1. 建筑力学的任务及其内容

建筑力学是一門研究各种建築物的强度、稳定性和刚度問題的科学。

研究强度及稳定性的目的，是使我們对一个建筑物承受荷儎时，能了解它的內力分布情况与及是否安全，並且根据这些科学的分析，在設計一新建筑物时，能合理选泽材料，避免浪費，以达到旣安全又經济的双重意义，研究刚度的目的，是使建筑物不致出现过大的变形，因为一个建筑物变形过大，即使在强度方面並无危险，但在使用方面是不适宜不容許的。

同时，建筑力学的任务不仅限于现有各种类型建筑物的計算，並且要发展现有理論，对新型建筑物提出合理的分析方法，进行对新材料性能研究等等，从而提高这門科学的水平。

从广义的范围来說，建筑力学所研究的对象不仅限于建筑方面，因为飞机、船舶、机器等計算方法，在原則上並无什么差别；不过现就本专业目的来說，本課程只着重討論建筑方面的問題，即將建筑力学限于建筑范围內討論之。

在本課程中，包括了刚体力学，弹性体力学与塑性体力学三大部分，刚体力学（或称理論力学）部份研究力对刚性物体作用的一般定理，为以后內容打下必要的基础。弹性体力学部份包括了材料力学、結构力学、結构稳定、結构振动及弹性理論等內容，它攷慮了物体受力（或溫度变化等）后所产生的形变，从而研究出各种建筑物强度、稳定性与刚度計算方法及原理，由于在若干問題上，不可能將上述各部份內容严格分开，同时，为了避免重复及学习效果提高，我們采用了新系統，而不將它們划分为几門課程，至于塑性体力学部份，則是从事研究塑性物体及弹塑性物体的形变及应力問題，以便我們更有根据地充份发揮材料的性能，节省材料。

§ 2. 建筑力学发展簡史及其发展方向①

整个建筑力学发展史完全証实了恩格斯的名言“科学之有賴于生产更甚于生产之有賴于科学”，它每一阶段的发展，成就均与当时社会的生产力有着密切的关系，同时也遵循着实践——理論——实践的发展过程。

①可參看“理論力学緒論”，“材料力学发展史”。西北工业大学学报，1960年，第1期。

И.М.拉宾諾維奇著“建筑力学教程”第一卷第一分冊第一章。

В.В.包罗金，В.З.符拉索夫，И.И.高尔金伯拉著“关于建筑力学发的展問題”，力学学报，1960年1月。

远在公元前1400年以前，我們的祖先已能根据他們的实践經驗，广泛利用木架結构的建筑，这比欧洲古代采用的叠石制度的建筑要高明得多。

春秋战国时期（公元前770—221），我国由奴隶社会过渡到封建社会，由于生产关系的改变而促进了生产力的发展，文化发达，在工艺方面，出现有周礼“考工記”，这是一本最早記載我国古代工艺技术的書藉，墨翟所著“墨經”，其中提出了力的定义，运动的定义，槓杆原理等自然定律，特别指出，这比阿几米德（公元前287—212）提出的槓杆原理还早二百年。

秦朝（公元前221—202）时，伟大的劳动人民便建筑了著名于世的万里長城，四川灌县都江堰，也是当时最突出的水利結构工程，是蜀都太守李冰率子二郎与广大劳动人民所建造，迄今已用二千多年，仍然完好，为中外水利专家所称道。

隋朝（公元581—618）匠帅李春在河北省赵县洨水河上建造了一座型式优美的石拱桥，跨長37公尺余，在大拱上两端各有两小拱，以便排洩洪水以減輕对桥的威胁，同时又減輕了自重，这种聪明无比的措旋，在900年后才出现于欧洲。

到了宋代中叶，喻潔著有“木經”；李仲明著有“营造法式”（公元1102），此書总結了我国历代木結构建筑方面的經驗，內有經驗公式、数学、测量、制图等基础知識，还給出估計工料的办法、图样等，它是世界上最早而最完备的建筑著作。

在外国，古罗馬、印度、埃及的劳动人民，在生产实践中对力学也积累了丰富的經驗，如古罗馬的神殿，埃及的金字塔，都是著名于世的宏偉建筑。

但在上述年代中，我国与世界各国一样，均处于封建及神权統治时期，劳动人民伟大的智慧，得不到应有的发展，所以，总的来說，建筑力学在理論上的总結是极少的，以至它还未能成为一門科学，但积累了丰富的实践經驗。

到了十五世紀，欧洲到了文艺复兴时期，随着社会的商业及手工业的发展，力学也被刺激迅速发展起来，在十五至十六世紀間，先后由意大利辽納交·达·芬奇，法国代里昂，荷兰司蒂芬等研究，提出了力矩定理，力的平行四边形定律，奠定了靜力学的基础。

到了十七世紀，东西方通商頻繁，欧洲殖民强国夺取海外殖民地达到空前的高潮，当时为了解决航海問題，除发展了天文学外，对动力学也起了很大的推动作用，英国物理学家牛頓（1643—1727）在总結前人經驗的基础上，完备地建立了古典力学的基本定律。

与此同时，由于海运发达，自然要求建造吨位較大的船只及改变船只的結构，欲要确定船只結构尺寸，單凭过去的經驗是不足应付的，必須从事寻求新的計算結构强度的方法，这样，从十六至十八世紀，經过人們相繼的研究，对于梁的强度，刚度等問題，都相当完善地解决了，特别指出，意大利科学家伽利略（1564—1642）是首先提出这問題的。

十八世紀后期，在英国开始了产业革命，机器的发明引起了人們对扭轉問題的研究，同时在工程上已采用的各种平板、空間結构等应力与形变問題，均超出过去材料力学

所能解决的范围，为了解决这些問題，促使了弹性理論这一門科学的形成。

到了十九世紀初期，由于产业革命的結果，給当时資本主义带来了繁荣，生产力大大提高，工业生产迅速发展，那时資本主义需要建筑各种各样的工程結构，如桥梁、厂房、工业展覽大厦、堤坝、运河、高烟囱，起重机、船舶等，为了設計这些結构，需要有特殊訓練的工程师，从事专門研究这些問題，于是在力学史上，开始分出了結构力学这一門科学（即通常所指狭义的建筑力学）。

鉄路的出现，对建筑力学提出了新的要求，当时資本主义工业关心的是爭夺銷售市场，这便要加强鉄路的建設，它要求在鉄路桥梁上能行駛越来越重、速度越快的火車，这样，除了考虑靜荷僦作用外，还必須考虑动力对桥梁的作用，必須研究冲击、振动等問題。同时，为了避免在河流中建造桥墩的困难，以減少造桥的費用，于是促使桥梁跨度增大，这就必須寻找新的合理計算方法，以求出最輕的桁架形式，这些要求都促使了建筑力学的发展。

在本世紀初，当鋼筋混凝土这一种建筑材料得到了人們的信任后，便被广泛应用在各种建筑工程中，它的整体性特点引起了新的結构形式出现，如刚架、平板、壳体及薄壁結构等，同时，自然要求新的計算方法，所謂超靜定杆件系統的問題，就在这情况下得到充分的发展，并已获得相当彻底的解决。

但当資本主义发展到它最后一个阶段——帝国主义阶段时，它的腐朽制度便很明显暴露出来，它不独不能刺激科学的发展，反过来阻碍了科学的发展，当苏联十月社会主义革命成功后，在两种不同制度的社会对比之下，更清楚地看出这点，优越的社会主义制度，使苏联的生产力空前飞跃，科学方面的成就，已超过最发达的帝国主义国家，建筑力学領域上，也是如此，②例如斯大林奬金获得者苏联科学院院士加辽金（1871—1945）对弹性力学的研究，斯大林奬金两次获得者符拉索夫教授（1906—1957）对薄壁杆件和壳体結构的强度，剛度与振动的研究；伊留辛教授对塑性力学的究研；伯思斯坦教授和克雷洛夫院士对結构动力学的究研；拉宾諾維奇教授和普洛柯費耶夫教授对結构力学一般的研究，都获得巨大的成就，把苏联的建筑力学推进世界第一位。

关于我国在建筑力学上得到大发展，还是在解放后十年多来之事，在这以前，例如在欧洲文艺复兴时期，我国还是彻底的封建时期，生产力得不到发展，当时統治階級为了保持旧有的生产关系，提倡所謂“重儒术而輕工艺”，近百年来，又受到帝国主义的侵略，使我国長期处于半殖民地状态，工业不发达，生产落后，至使科学在一个長时期落后于欧洲。

中华人民共和国成立后，建筑力学在党的領导下，随着生产建設的大发展而蓬勃成長起来，例如長江大桥、治淮工程、现代化鋼鉄联合企业工程以及各地的大建筑，如北京人民大会堂，新車站等等，都促使建筑力学的发展，现分下面几方面略为叙述。

由于大规模的基本建設，引起了对刚构静力分析大量研究，不論在数量或質量上，成果均很大，尤其是在“传播法”方面，我国学者有了創造性的成就，又蔡方蔭对变截

②可参看И.М.拉宾諾維奇著“苏联桿件系統建筑力学成就”

面刚构分析的研究，作出了很大的貢献，在薄壳結构方面，近年来由于各地已較多采用，所以也迅速发展起来，特别对园柱形开口薄壳及双曲扁壳进行了較多的研究，提出了簡化計算图表，使更結合工程設計需要，现这类型結构正日益向大跨度及新型式方面发展，广东省利用壳体理論，同时为了节省鋼材、水泥、木材，首先使用磚砌薄壳結构，效果良好，现正向全国推广，磚薄壳結构是在1956年由我院首先提出，现我院建造的体育館，就是采用了底徑为40公尺的园球形磚薄壳結构，是目前世界上跨度最大的砖薄壳，中南工业建筑設計院也系統地对无筋扁壳进行了研究和总結。清华大学作出了剧院眺台的新型空間薄壁結构。

結构动力学的研究，在解放前是一个空白点，解放后，随着大规模建設，生产实际要求解决很多这方面的問題，例如工业厂房、水工結构，桥梁及机械基础的振动等，这便大大推动了結构动力学的研究，且已取得一定的成績，如結合我国情况制訂了“地震区建筑规范草案”，它反映了我国科学工作者及工程师們在这方面的研究，其中关于按建筑物分类，以及考虑振型迴会的概率来計算地震荷俌及其分布是比較合理的，挡水坝的动力計算和实驗研究，也有了一定基础，例如佛子岭水庫是我国治准工程中初次建筑比較大的水庫，已于1954年完成，在生产中对应力分析的方法和理論都有所提高，如推演了地震时悬鏈綫的公式，在横向地震方面时，解决了力的积累問題共振問題等。

在弹性理論方面，胡海昌发展了各向异性的弹性力学，在极限設計方面，我們制訂了“荷俌暫行规范”，对于鋼材、混凝土、磚砌体以及木材等建筑材料的匀質系数进行了一系列研究工作，也开始研究了材料超出的极限后的工作规律。

关于电化計算技术，近年来已引起注意，不少高等学校及設計院都在进行研究，尤其是結合各种类型的电模拟計算机，如連續梁、刚架、排架等电比仪的制作，目前已研究不少，並且也进行着壳体的电化計算研究工作，預計不久將来，电化計算技术被我們充份掌握后，会使建筑力学在計算工作上面貌一新。

从上一些簡單的叙述中，便清楚知道，科学的发展是与社会的制度有着多么密切的关系；苏联科学的成就，我国十年多来的成就，特别是1958年以来生产大跃进所引起的科学发展，更充份証实了恩格斯的結論，根据现代生产的发展，建筑力学的发展方向大概如下：

在弹性塑性方面，如何將它們与直接工程設計联接起来，就是建筑力学一个重要的任务；由于新材料的出现，且結构新的工作条件日益复杂，建筑力学必須研究材料在弹性范围之外工作；同时也必須研究目前仍認为极端困难但又十分迫切的，建筑物在超过弹性极限后，在复杂（非比例）加俌时工作的問題。

在薄壁結构方面，板壳类型的結构日益重要，所以关于它的有效計算方法，几点支持的多层壳及加筋板，箍条及隔框加强的壳等問題都是很重要的。

薄壳稳定性理論，超过弹性限度的稳定問題，蚌变条件下的稳定問題都是稳定性的新課題。

在結构动力学方面，应要研究弹性系統微振时的固有频率，以及对周期性外力作用

下的弹性系統的振动分析，在冲击荷儎作用下的結构計算。又由于高张力强度的新合金及高强度高分子聚合物的出现，无疑將促使更广泛的采用悬索及柔性結构，与此相应，大位移时弹性系統的动力性質的分析也是很重要的。

关于保証大跨度悬桥剛性梁的空气动力稳定問題，在Tacoma－Narrow（1940年）桥破坏事件产生后，被人們注意起来了，此弹性系統的动力稳定性理論是建筑力学最年輕的方向之一。

§3. 研究建筑力学的方法

从建筑力学的发展史便十分清楚，它的发展是与社会的生产分不开的，而它所采用的方法，必須符合辯証唯物論的認識論，卽遵循着实踐——理論——实踐的反复循环过程，以为建筑力学單純是理論的研究，可以不顧实际，是极端錯誤的，这必然会走上資产阶級“学者”的道路，与社会主义建設相背而馳，1957年資产阶級右派分子在科学界方面向党进攻，正好暴露出他們反党反馬克思主义的面目，而被我們所唾弃，苏联在建筑力学上的成就超过最发达的帝国主义国家，其主要的原因正如拉宾諾維奇教授所說：“苏联建筑力学独有的特征，就是它与实际建設的密切联系，同时还有原则性，科学性，以及分析的深入性”。这些話当我們进行研究建筑力学时是值得三省的。

一切建筑力学的理論都是經过实踐的認識，加以总結发展而成，并且还要到实践中加以証明的，許多新理論现在还經受着实践的考驗，並且所有理論，都会随着人們在实践中对自然规律認識的提高而有所修改，使它更符合于客观情况，例如一个結构的計算簡图随着时代不同而不断修改，一个計算方法反复的改正；又如在建筑工程上，人們是先建造了梁的結构，然后发展到拱結构以至桁架結构，都是理論对于实践的依赖关系的明显例子，这正符合毛主席所說：“实践,認識,再实践，再認識，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和認識之每一循环內容，都比較地进到了高一級的程度”。

清楚实践的重要性，我們在研究建筑力学时，便必須紧密結合生产实践来思考問題，而且，要掌握最新的实驗方法，由于近代的結构型式日趋复杂，新材料不断出现，至使其中理論計算是否可靠与其准确程度都要求在实驗中給予証明，因此，实驗更显出它的重要性，在本課程实驗中，我們除了要掌握一般机械法外，还須掌握光測及电測等方法。

另一方面，在学习建筑力学上，要善于抓住問題的本質，不要被数量众多的公式表面迷惑了，不能單独注意公式推导的过程，而忽視了公式推导的前提，先决条件及其一些假定，能否进行独立思考，就要看能否抓住問題的本質；只有理解一个理論的根源所在，才能不会錯用理論，並可进一步发展理論。

对初学者来說，多做习作也是必須的，因为这是对理論理解的一个实践过程。

刚　体　力　学

刚体力学是整个建筑力学中的一个組成部份。

正如本書緒論中所談到的那样，整个自然界中存在着各形各式的物質，而一切物質都按照着自己固有的规律在不断地运动着。因此，物質运动的形态是多种多样的，其中有簡單的，也有的是很复杂的，前者如物体在空間位置的改变；后者如分子运动，光子运动及电子的运动等，伴随着这类的运动，还会产生相应的热、光及电流等效应。

刚体力学是研究物質运动的最簡單形态的科学，即研究物体的机械运动的规律。所謂机械运动是指一个物体相对于另一物体在空間位置的变化。由于物体的平衡是机械运动中的一个特殊情况，所以在刚体力学中也將研究物体的平衡問題。

物体的机械运动在自然界及工程上几乎都遇到，例如星球的运动、水的流动以及各种机器的运动等。因此刚体力学是天体力学、流体力学及工程技术的重要基础之一。

根据刚体力学研究的对像，可將它分为三个部分：

（一）运动学：从几何的观点研究物体运动的性質，而不攷慮物体間相互的机械作用。

（二）动力学：研究物体（或机械系統）相互的机械作用与运动的关系。

（三）静力学：研究物体平衡的规律及力的合成规律。

必須强調地指出，刚体力学的研究方法，仍应以客观实践为基础，必需遵循着“实践、理論、实践”的辯証方法及观点，必需以馬克思列宁主义的辯証唯物主义及毛澤东思想为指导思想。

在刚体力学中，經常用到“刚体”及“質点”这两个名称，所謂刚体是指这样的一种物体，在这物体中各点間的距离在任何情况下都保持不变，换句話說，如物体永远保持其本身的几何形状而不改变者，則为刚体。实际上，經驗告訴我們，任何物体在力作用下，总有些变形的，我們在以后的討論中把它們看成刚体是因为：1)在力的作用下，物体的变形很小，不考虑这一微小的变形，对于我們研究和計算的結果並无影响；2）把物体視作刚体可以大大地簡化研究和計算中的繁瑣性，进一步掌握問題的主要方面。

所謂質点，是这样的物体，它只有几何位置，而无尺寸大小，但却有一定的質量，因而也就有相当的重量。把一个实在的物体，抽象为一个質点，仅在这物体的尺寸大小对所研究的問題不起显著影响时，才有可能。比如，在研究行星繞太阳的运动时，行星就可以視为質点，因为行星的大小，与其到太阳的距离相比实在很小，以致我們只要研究行星（質点）的整体的运动即已足够，而沒有必要研究其中各点之間运动的差别。

有限或无限个質点的集合，幷相互存在着一定的联系与影响，則称之为質点的机械系統——質点系。任何物体都可以看成这样的系統。若系統中各質点的距离不能改变，則該系統称为不变系統。刚体就是这样的系統。

·运动学部分·

第一章　运动学基本概念

运动学是从几何观点来研究物体运动规律的科学，研究物体运动的几何性質，运动时物体位置的改变与其所經历的时間之关系。它只說明物体运动的情况，而不牽涉到运动产生的物理因素，无須考虑力与質量等物理概念，撇开物体的質量而仅攷虑它的几何形狀，把質点則抽象为一个几何点，如此，由于运动学完全建立在几何学的基础上，因而研究这部份的問題仅以几何学公理作为基础已經足夠，而不需要象靜力学及动力学那样建立它自己的公理。

把物体运动与产生运动的原因相联系起来研究，是动力学的研究內容，有待于动力学中去解决。

大家都知道，几何学中也曾提及所謂“运动”的問題，但是必需指出，这与我們在下面將要研究的物体的运动是不同的，在几何学中所談的运动①，完全是任意的，未必有某种确定的规律，特别是其中並未与“时間”这个概念相联系在一起，而运动学里所研究的运动，則是物体的眞实运动。

于是，研究物体的运动，就牽涉到时間和空間这个概念。无数的实践証明了，时間和空間是物質存在的客观形式，它們是和物質的运动彼此相关联着的，列宁在他的傑出的著作——“唯物主义与經驗批判主义”一書中指出，“运动着的物体除了在空間与时間之內就不能运动②”这就很明显地說明了，物質不可能存在于空間和时間之外，而空間和时間也只能依賴于物質的运动。在古典力学里，这种空間、时間及运动着的物質之間的联系，並沒有明确地反映出来，認为空間和时間是永远不变的，与物質的运动也是互相沒有联系的，把这样理解的空間和时間称做“絕对的”空間和时間。显然，这种孤立地考虑問題的方法是形而上学的，是錯誤的。而辯証唯物主义早在十九世紀就正确地指出了空間，时間和运动着的物質之間存在着一定的制約和不可分割的联系，由此可見，和研究其他各門科学一样，我們只有以辯証唯物主义的世界观来認識物質世界，来研究运动学，才能正确地反映物質运动的客观规律，才能正确地理解物質运动的实質，而不致于墜入形而上学的錯誤的地步。

时間的單位以“秒”来計量。我們知道，地球繞太阳走一周所需的时間称为一年，一年的365.25分之一，称为“平均太阳日”，那么，1秒就应該是：

$$1\text{秒}=\frac{1}{24\times60\times60}\text{平均太阳日。}$$

①几何学中，把綫定义为点的运动的軌迹，把面定义为綫运动的軌迹等。
②人民出版社，1956年版，第171頁。

时間的标記，可以用一根无限長的軸綫來計量，这条軸綫称为时間軸。按照物体运动先后的次序，在时間軸上記下对应的各点，每一点代表物体运动的一个时刻，称为“瞬时”。在計算时間的时候，我們确定开始的那个瞬时，称为“初瞬时”，从初瞬时开始，經过时間t秒鐘而終了的那个瞬时称为“瞬时t”，或称为“第t秒时”、“第t秒末”。任意两个瞬时之間所延續的一段时間，称为“时間間隔”。例如由瞬时t_1到瞬时t_2的时間間隔以Δt表示之，则$\Delta t = t_2 - t_1$。当Δt趋近于零($\Delta t \to 0$)时。就是瞬时t_1。

物体的运动是指此物体在連續的各个瞬时在空間所占据不同的位置。物体在空間的位置以及位置的变化只能相对于另一个物体来确定，所以要描述物体的位置，就必須选择另一物体作为参考，这个被选为参攷的另一物体，称为“参考体”，把固連于参考体上的坐标系称为“参攷系”。这样，在討論物体的位置时，就可以用它在坐标系中的坐标来表示了。要确定物体在空間的运动，只有在給定了参考系（或参考体）之后，才有明确的意义。与此同时，我們也可以看出，运动学里所謂确定某物体的运动，就是要确定这物体在所选参考系中对应于每一个瞬时的位置。

为了便于研究，在以后各章中，把固連于地球的参考系視为不动的，并称它为“静参考系”。物体对于假定为不动的参考系的运动，称为“絕对运动”，显然它只具有人为的規定的意义。若对于靜参考系有运动的参考系称为“动参考系”。物体对动参考系的运动称为“相对运动”。

任何物体可以視作由无数个点所集合而成的，若物体內各点的相对位置始終不变者，則构成所謂的刚体。在运动学中除了研究点的运动之外，也还要研究刚体的运动。

第二章 点的运动

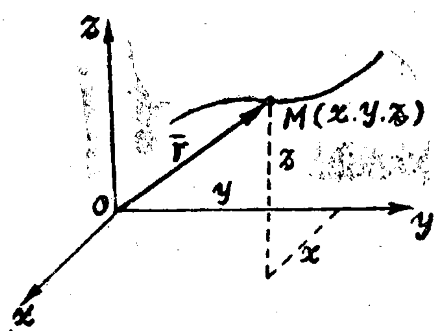
§ 2.1 运动的矢量表示法

运动着的点（以下簡称动点）在空間所划过的曲綫，称为动点的运动軌跡。若軌跡为直綫，則得点的直綫运动，一般情况下，得点的曲綫运动。又若动点的軌跡为一平面曲綫，則此类运动卽为平面曲綫运动。

（1）运动方程式

設动点M的曲綫运动軌跡是已知的，如图2.1中之曲綫$\widehat{AB}$。若在空間取一个定点O作为参考系中之参考点、則在任一瞬时，动点M在空間的位置，可用由O点畫至动点M的矢量$\overline{OM}=\overline{r}$（称作矢径）来表示，动点在运动时，矢径r是隨着时間在改变其長度与方向的，而成为时間t的單值連續的矢函数，卽

$$\overline{r}=\overline{r}(t) \qquad (2.1)$$



（图 2.1）

这就是动点M的矢量形式的运动方程。它説明了动点M的运动随时間变化的規律，例如当t=0时，点M占据的空間位置为M_o，此时的矢径为r_o，同样，当$t=t_1$时，点占有的位置为M，則对应的矢径为$\overline{r}$卽$\overline{r}$等等。

（2）速度：

設在t时，动点在M的位置，此时矢径为$\overline{r}$，在$t+\triangle t$时，动点的位置在M（图2·1），其对应的矢徑为$\overline{r}+\triangle\overline{r}=\overline{OM'}$，則$\triangle\overline{r}=\overline{MM'}$就代表动点在$\triangle t$时間内的位置的改变，称为“位移”。我們把$\triangle\overline{r}$与$\triangle t$之比称为点在$\triangle t$时間内的平均速度，用$\overline{V}^*$代表，卽

$$\overline{V}^*=\frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t}.$$

显然，平均速度也是矢量，它的方向是与$\triangle\overline{r}$的方向相同的，但是这种表示方式，点M是沿弦$\overline{MM'}$运动，而非沿弧$\widehat{MM'}$的运动的眞实速度，若当$\triangle t$趨近于零（$\triangle t\to 0$）时，則弦$\overline{MM'}$逐漸趨近于曲線的弧$\widehat{MM'}$長，此时上述平均速度的极限值，称为点M在t瞬时的眞实速度，簡称速度，用$\overline{V}$表示，卽

$$\overline{V}=\lim_{\triangle t\to o}\overline{V}^*=\lim_{\triangle t\to o}\frac{\triangle\overline{r}}{\triangle t}=\frac{d\overline{r}}{dt} \qquad (2.2)$$

速度$\overline{V}$的大小，可如下求出：設点M的运动规律，即其所走的路程S与时間t之間的关系已知为S=f(t)，並令$\overset{\frown}{MM'}=\triangle\sigma=|\Delta S|$，如图2.2所示,其中M及M'分别为瞬时t及t+△t时动点的位置，則速度之大小为：

$$V=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{MM'}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{MM'}{\triangle\sigma}\cdot\frac{|\triangle S|}{\triangle t}$$

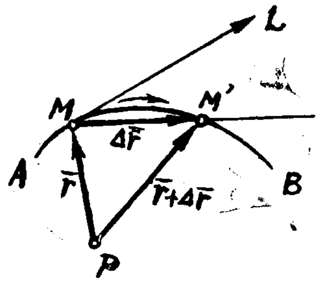
但

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{MM'}{\triangle\sigma}=1,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\triangle S|}{\triangle t}=\left|\frac{dS}{dt}\right|$$

故

$$V=\left|\frac{dS}{dt}\right| \qquad (2.2a)$$



（图 2.2）

攷察式(2.2)及(2.2a)即可知，在曲綫运动中，动点的真实速度$\overline{V}$为一矢量，方向沿着軌迹的切綫(图中ML)，大小等于弧長S对时間的导数的絕对值。設若动点沿弧之正向运动，則导数$\frac{ds}{dt}$有正值，反之則取負值。因而，設規定切綫之正方向为孤S之增加的方向，並以V_c代表速度$\overline{V}$在切綫上的投影，則

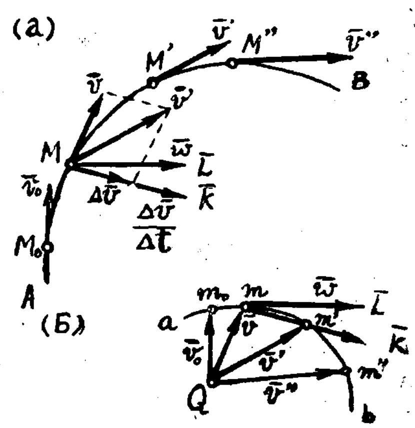
$$V_c=\frac{ds}{dt}=f'(t) \qquad (2.3)$$

速度的單位是米/秒，或仟米/小时等等。

点在空間运动的軌迹$\overset{\frown}{AB}$(見图2.1所示)，可由随动点在各不同空間位置与坐标原点之間的矢径的变化来描述，我們把这些矢徑端点連成的曲綫(它应該就是$\overset{\frown}{AB}$曲綫)，称为“位矢端綫”。因而，动点在任一瞬时的速度之方向，就应在其位矢端綫上相应位置的切綫方向。

（3）加速度：

加速度是用来描述动点在运动过程中，其速度在每一瞬間改变的程度。設动点沿空間曲綫AB面运动，在瞬时t及t+△t，动点的位置为M及M'，其对应的速度則为$\overline{V}$与$\overline{V'}$，(图2.3)在△t时間內，速度由$\overline{V}$改变为$\overline{V'}$(一般而言，速度的改变应包含其大小及方向的改变)速度的平均改变率即动点的平均加速度，以$\overline{\omega}^*$代表，得



（图 2.3）

$$\overline{\omega^*}=\frac{\overline{V'}-\overline{V}}{\Delta t}=\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}$$

在图2.3的a）及б）中分别用矢量$\overline{MK}$及$\overline{mk}$表示。图б）中的曲綫ab是这样繪出的：通过任一定点Q，分别作$\overline{V_o}$、$\overline{V}$、$\overline{V'}$及V''之速度矢量，將各矢量之端点用曲綫相联即得ab曲綫，此綫称为“速度矢端綫”，此图即为速度矢端图。該图中各矢端m_o，m，m'，……分别与图a）中动点位置M_o，M，M'……相对应。当Δt趋近于零时，矢端图中之矢量$\overline{mh}$將趋近于点m的切綫$\overline{ml}$的位置，平均加速度$\Delta\overline{V}/\Delta t$將趋近于动点在瞬时t的眞实加速度或瞬时加速度$\overline{\omega}$，代表$\overline{\omega}$的矢量$\overline{ML}$平行于速度矢端图在点m的切綫ml．由此得

$$\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\omega^*}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}=\frac{d\overline{V}}{dt} \tag{2.4}$$

因此，在曲綫运动中，动点的加速度等于速度对时間的矢导数，方向沿着速度矢端图的切綫（显然，此方向不是动点运动軌迹的切綫方向）。加速度的單位是每秒每秒米，即米/秒^2。

§ 2.2 运动的直角坐标表示法

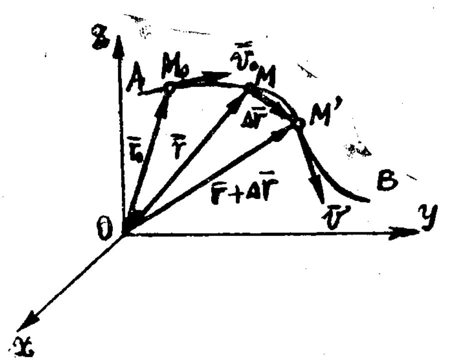
在实际应用上，采用矢量計算有时显得不方便，宜用坐标法。本节就按慣用的直角坐标来講述。

以任一定点0为原点，作互相垂直的三軸x，y，z，于是动点在任一时間所占的空間位置，就可以用坐标（x y z）来表示（图2.4）。显然，动点不同瞬时所占据的空間坐标位置是时間t的單值連續函数，即

$$\left.\begin{aligned}x&=f_1(t)\\y&=f_2(t)\\z&=f_3(t)\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式（2.5）即称为直角坐标形式的运动方程。

若由式（2.5）中消去时間t，就可得到、x，y和z間的两个关系式，这两个关系式表示点在空間划过的几何曲綫，亦即动点的軌迹方程。它仅具有几何意义，而与时間毫无关系。



（图 2.4）

設动点的直角坐标形式的运动方程为已知，则其速度和加速度可求出如下。根据矢导数投影的定理①，可將公式（2,2）

$$\overline{V}=\frac{d\overline{r}}{dt}$$

①矢量数投影定理：某矢导数在任一軸上的投影，等于該矢量在同一軸上投影的导数。

的$\overline{v}$及$\overline{r}$矢量分别向x,y,z三轴投影。速度$\overline{v}$在三轴上的投影为V_x, V_y, V_z。設矢徑$\overline{r}$由坐标原点畫出（参閱图2.4）則$\overline{r}$的投影分别为x,y,z，因此可得式（2,2）在三轴上投影式为

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.6}$$

卽：速度在各坐标軸上的投影，等于动点的各对应坐标对时間的一阶导数。

速度的模及方向可按下列公式确定：

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\overline{V}.X) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\
\cos(\overline{V},Y) &= \frac{V_y}{V} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\
\cos(\overline{V},z) &= \frac{V_z}{V} \longrightarrow
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

按同样的方法，可得加速度的表达式。由公式（2.4）

$$\overline{W} = \frac{d\overline{v}}{dt}$$

投影在各軸上，得

$$\left.\begin{aligned}
W_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\
W_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\
W_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

加速度的模与方向可以由下列公式决定：

$$W = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \tag{2.10}$$