整 數 論

胡濬濟著

中華教育文化基金會
科學教育委員會編輯

商務印書館發行

整　數　論

胡濬濟著

中華教育文化基金會
科學教育委員會編輯

商務印書館發行

整數論

中華民國十九年九月初版

每冊定價大洋壹元
外埠酌加運費匯費

著作者 胡濬濟

編輯者 中華教育文化基金會科學教育委員會

發行兼印刷者 上海寶山路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

A TREATISE ON INTEGERS

By

HU SUN TSI

Edited by

The Science Education Committee, The China Foundation for the promotion of Education and Culture

1st ed., Sept., 1930

Price : $1.00, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

序

友人自德意志歸來,談及近來柏林大學數論教程有七種之多,此實近數年來數論勃興之結果而亦其原因也。數論在數學中與他種數學本鮮關係,自代數數論,解析數論,質數論等興,形勢為之一變;今日之數論,決非數十年前之數學家所能夢見。侵入代數與代數羣論等發生關係,侵入解析數學與函數論等交相為用;故今日之數論,五光十色,有令人應接不暇之概。然而,登高自卑,行遠自邇,淺顯明確之知識,實爲遠大學術之基礎;況吾國中學數學對於數論,素不重視,又無適當參考書以爲之補助,青年學子,對於數論,終鮮興趣,此本書之所以作也。若夫代數數論,解析數論等高深之數論,則請俟諸異日,是爲序。

中華民國十八年一月　　　　胡濬濟

整數論

目 錄

第一篇

自然數之起源

第二篇

四則算法

第三篇

整數之性質

第四篇

相合式

第五篇

法馬氏定理

第六篇

指數

第七篇

二項相合式

第八篇

不定方程式

第九篇

域及理想數

整數論

第一篇

自然數之起源

1. 數物與次序. 以數數物，與賦物以次序，此二種作用，在吾人心中有密切之關係。一，二，三，知物件之數爲三。今取其徑路分析之，則先見甲物而命之爲第一物，再見與甲不同之乙物而命之爲第二物，又見與甲與乙不同之丙物而命之爲第三物。如數至三而物窮，則其數爲三可知。如是，吾人當數物之際，不得不賦物以次序，從可知矣。

然吾人數物之時，心中不必一一起如此複雜作用，一見而知其數爲三爲五，亦常有也。蓋三個五個少數物件，其數物之作用，反復於吾人心中者屢矣。故三個五個物件，其全體之印像，牢銘於吾人之記憶，吾人藉此記憶之助，於未覺心中數物作用之前而已知其數也。是故雖少數物件，如其物之排列動靜不同，則其影響於數數者不尠。正列而靜止者，十個以下之物之數，不難一覽而知，苟運動之，或不規則的排列之，則不必然矣。要之，吾人數物之時，謂爲已賦物以次序可也。

欲數甲乙丙等之物之際，吾人知甲爲一物件，及甲與乙與丙不相同之外，甲與他物件區別所有之特徵盡去之而不顧，謂

桌子，人，數學爲三個物件，與謂一物件一物件再一物件爲三物件無異。屈指數物者已將所欲數之物之特徵盡抽去矣。以拇指代表桌子，以食指代表人，以中指代表數學。桌子也，人也，數學也，同以一指代表之可矣。人苟忘其各指所代表爲何物，但知拇指所代表者最先所見一物件，食指所代表者其次所見一物件，中指所代表者最後所見一物件，而其物之數爲三，仍可知也。

一個一個物件，順次以一個一個之指代表之，觀代表最後之物之指而知其數。數物之原理盡於此矣。

吾人可數之物無限，欲代表無限之物，亦必需無限之物。因代表無限之物吾人所作者曰數（序數）。數也者，非能離人類的理性先天的存在者也。欲明數之眞相，不得不追溯數之起源。

2. **序數.** 序數之觀念，人類所共有明瞭而不可動搖者也。雖然，吾人於數學，當注重思想之精確。故列舉下列各條，作爲序數之原則。以下所謂數者，指序數而言也。

第一。數有先後之次序。二相異之數（甲，乙），其中唯一數（例如甲）先於他數（例如乙）。

吾人所謂先後之意義，當遵下列二規則：（一）甲先於乙，則乙不得先於甲；（二）甲先於乙，乙先於丙，則甲必先於丙。甲先於乙，“或乙後於甲”或乙次於甲，表同一之事實。是故甲後於乙，乙後於丙，則甲必後於丙，

第二。任何序數，必有緊接其後之序數。

乙緊接甲云者，甲之後，乙之先，不得有第三數存在之謂也。

第三。若甲先於乙，則可自甲移至緊接甲之數。又可自此數移至其次之數，如是以次進行，必可達乙。

第四。序數有最初之數。

所謂"最初之數"云者，無先於此數之數之謂也。

以上四條，曰序數之原則。序數之性質，不外乎此四條原則論理上所必至之結果也。

第四條中所謂最初之數，名之曰 1；緊接 1 之數，名之曰 2；緊接 2 之數，名之曰 3。如是，無論至何數，由第二條所規定，必有緊接其後之數。故所有序數，一一與以命名，則因吾人之語數有限，必非吾人字彙之所能盡矣。吾人字彙中所有最大之數曰億曰兆，而億兆非數之終極。億兆以內之數，非數之極小部分乎？否乎？然，所有之數，與以命名之必要究何在乎？無名之數，非無其數之謂也。

無論何數，初不難以記號表之。最初之數，其次，… 其次，… 如是，無論至何數，以同記號反復增加，吾人心中所想像之數，無不可以此等記號表示之。然此紀數法之難供實用，不待言矣。

命數法，紀數法，非理論上之問題而實用上之問題也。此問題以極少數之字，極少數之記號，極便利之方法組成之，而能命名或表示極多之數爲主。古今東西民族所得幾乎符合之解釋，卽所謂十進制者是也。然十進制之說明，非說明數之加減乘除之後，理論上不可能也。

3. 純數．吾人當數物之際，認各物爲一物件，及此一物

件與其他之物不同之外，各物之間所有可區別之特徵，均可置之度外，旣言之矣。今於欲數之物之中，認爲最先一物件者配以序數 1，再以吾人認爲與此物不同另一物件配以序數 2，如是，一個一個物件，按次以一個一個之序數配之（對照之）。因序數之層出不窮，故無論如何，決無不能對照之事。故此對照法，必至對照之物窮而止。此時與最後之物配合之序數，卽所數之物之個數之所由定也。

置若干物於吾人之前，以前述方法數之之時，各物之間生一定之次序，數物旣竟，達一定之序數。

當個個之物與個個之數對照之際，各物之中何者配 1，何者配 2，卽數物之次序，全憑數者之隨意，此手續非一定不移者也。欲數之物雖有一定，然因數物之手續而生各物之間之次序可任意變化。惟此手續中有一定不移者，最後達到之序數也。例如數 A, B, C 各物之時，A, B, C 順次以 1, 2, 3 配之者有之，B, C, A 順次以 1, 2, 3 配之者亦有之。

A	B	C		B	C	A
1	2	3		1	2	3

然，曰 A，曰 B，曰 C，映於數者之眼，不過各爲一物件而已，故前述之配合，可以

一物件	一物件	一物件	一物件	一物件	一物件
1	2	3	1	2	3

表示之，如此改寫之後，可見此二種數法之區別全消滅矣。

數物而達到最後之序數，與數時次序無關係，一定不移者

也。故可以此序數表物之數。數以表物之數者曰純數。

純數者，與序數同一之原則而定者也。詳言之，前述原則之中，易先後之語以大小之語可矣。

物件之數之多少，因其所表示次序之先後而知之，純數之大小，因其相當序數之先後而定之。

個個之序數，作個個之物件觀之之時，吾人得數序數之數自 1 至 n 所有之序數之個數，卽 n 也。

同是數也，表物之次序時曰序數，表物之多少時曰純數。置此區別於度外，1, 2, 3 …… 曰自然數（或曰整數）。克郎內克氏曰：整數者，造物主之所作也，其他人事也。誠哉！自然數之稱也。

第二篇

四則算法

1. 論加法減法. 今有 A, B, C, …… 等文字所表物之一組，名之曰甲。又有 P, Q, R, …… 等文字所表物之一組，名之曰乙。A, B, C, …… P, Q, R, …… 等非表數，各文字各表一物件。甲，乙非各表一物件，各物件全體之名稱也。此甲組之物件之中，加入乙組之物件，令為第三組，名之曰丙。丙者，A, B, C, …… P, Q, R, …… 等各物件，卽屬於甲組之物件與屬於乙組之物件盡含於丙之團體也。且甲，乙以外之物件不含一個。故甲之中加入乙，與乙之中加入甲，其結果相同。

又如有甲，乙，丙三組之物件，如前述，先合甲乙使成一組，此組之中，再以丙加入，使仍成一組，則此最後一組之中，盡含屬甲屬乙屬丙之各物件，且此外不含一物件。是故三組之物件合成一組之結果，與其次序無關係。

甲組之物件 A, B, C, …… 其數 a，乙組之物件 P, Q, R, …… 其數 b。今合甲乙使成一組之物件丙。丙之數幾何？數丙之物之際，其數物件之次序，與數得之結果無關係。因此，屬於甲之物件，不必更煩 1, 2, 3, …… a 序數配合之手續，卽以屬於乙中之物件前配 1 者 (P) 以緊接 a 之序數 $(a+1)$ 配之，以屬於乙中之物件前配 2 者，以其次序數 $(a+2)$ 配之，如是，

按次前進，至屬於乙中之物件前配 b 者，設所配之序數爲 c，則 c 者，卽甲乙相合而成丙組之物件之數也。此手續可用下圖說明之：

1	2	3	a	1	2	3	b
A	B	C ……		P	Q	R	……
1	2	3	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	c

是故由 a, b 二數達 c 之手續如下：

緊接 a 之序數以 1 配合之，其次之序數以 2 配合之，如是，按次前進，至與 b 配合之序數，此序數卽 c 也。

如上述之法，由 a, b 所作而得之數 c，曰加 b 於 a 所得之和，用下列記法表之：

$$a+b=c$$

例如甲組之物件之數爲五，乙組之物件之數爲三。數甲乙相合之數之際，屈拇指曰七，屈食指曰八，屈中指曰九，卽七，八，九者與一，二，三之序數配合。拇指，食指，中指代表 1, 2, 3 也。

若以前屬於乙之物件，與 1 至 b 之序數相配合之手續爲基礎，再以緊接 b 之數配 1，其次數配 2，如是按次前進，至與 a 配合之序數時，此序數卽 $b+a$ 也。然而 $a+b$ 與 $b+a$ 皆不外乎丙組之物件之數，故

$$a+b=b+a$$

卽二數之和與所加之數之次序無關係。名之曰加法之對易律。三組之物件順次合併之時，用前述同樣之論法得

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

卽 a, b, c 三數相加之際，先加 b 於 a，再加 c 於 a, b 之和；與以 b, c 之和加於 a，其結果相同。名之曰加法之締合律。

上述兩組之物件合併之，可得一組之物之數。今就其手續觀之，可知下列事實：

a 以某數 b 加之，其所得之和大於 a，$a+b>a$。此定理亦可顚倒之如下：

c 若大於 a，則 c 必等於 a 與某數 b 之和，卽

$$c=a+b$$

之 b 必存在也。

今取 1, 2, 3 …… c 之序數作一組之物件考之，則因 a 小於 c，故 a 必在此一組之中。今將此組分爲兩組，令 1, 2, 3 …… a 爲甲組，餘者爲乙組。如是所得之甲乙丙組合併之，則仍歸於前之一組，無待論也。然在甲組之中，其所有之序數之個數爲 a，取乙組之中所有之序數數之，設此數爲 b，則 $a+b=c$。此 b 卽吾人所主張必存在之數也。

如 c, a 二數之中 c 大於 a，則適合下列條件之數 x

$$a+x=c$$

必定存在已瞭然矣。今證明適合前列條件之數僅限於一個。設 b 之外尙有適合前列條件之數 b' 存在，卽

$$a+b=c, \qquad a+b'=c$$

則 b, b' 二者之中，必有一數大於他數。例如 b' 大於 b，則

$$b'=b+d$$

之數 d 不得不存在。因此

$$a+b'=a+(b+d)$$

此等式之右邊之和從締合律，得

$$(a+b)+d=c+d$$

故其和必大於 c。卽 b' 若大於 b，則 $a+b'$ 必大於 $a+b$ 也。是故 b 與 b' 不得不相等。c 大於 a 時如前法達到 b 數之手續曰自 c 減 a。b 曰 c 與 a 之差，用下列記法表之

$$b=c-a$$

自 c, a 得 b，可依下列手續求之。先取 1, 2, 3 …… c 序數考之。其最後之數，卽 c，配以 1，c 之前之數配以 2，如是按次前進，達與 a 相配之數時，此數之前一數卽 b 也。

例如自 8 減 5，可依下圖求之

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \underline{3}| & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad 8-5=3$$

如有一組物件，其數爲 c，分之爲甲乙二組時，則屬於甲之數小於 c；名此數爲 a，則屬於乙組之數卽

$$b=c-a$$

也。

2. 論乘法除法. 觀前節所述知加法從締合律。故同一之數 a，幾次相加所得之和，由該數 a 與其相加之次數 b 完全決定。以此法求和，卽由所與之數 a 及 b 求第三定數之手續，可作施於 a, b 二數間之一種算法觀之。此算法卽乘法，a 爲被乘數，b 爲乘數，求得之和曰 a 之 b 倍，或稱 a, b 相乘之積