HZ BOOKS
华章教育

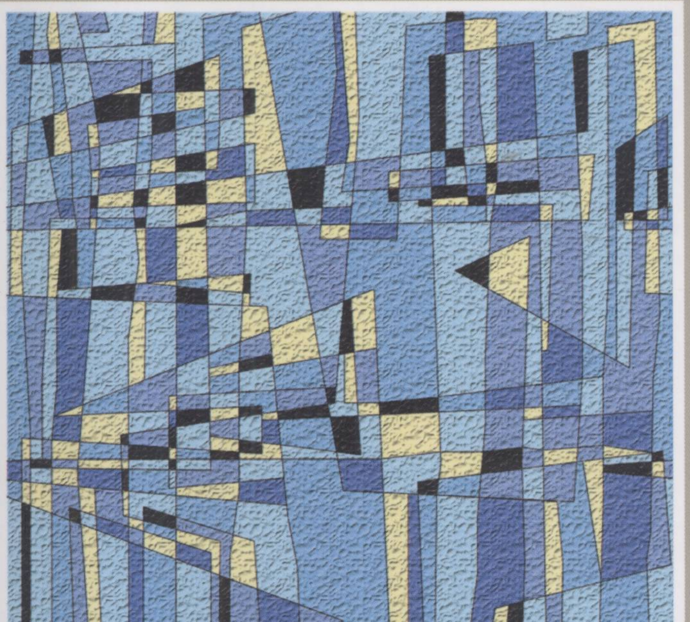
普通高等院校公共基础课"十一五"应用型规划教材

应用概率统计

学习指导与习题选解

Applied Probability Statistics Guide

彭美云 主编



机械工业出版社
China Machine Press

普通高等院校公共基础课“十一五”应用型规划教材

应用概率统计

学习指导与习题选解

Applied Probability Statistics Guide

彭美云 主　编
凌卫平 朱玉龙 副主编
朱廷亮 刘会灵 参　编

机械工业出版社
China Machine Press

本书是“十一五”应用型规划教材《应用概率统计》一书的配套教学指导书。全书各章都由学习目标与知识结构、基本内容、自测题及自测题答案、教材习题解答四部分构成，供教师与学生在教学过程中综合强化每章节的知识内容。

本书既可作为各类普通高等院校应用型公共基础课的教学指导书，也可作为广大应用工作者及学习“概率统计”读者的参考书和工具书。

图书在版编目（CIP）数据

应用概率统计学习指导与习题选解 / 彭美云主编. —北京：机械工业出版社，2009.12
（普通高等院校公共基础课“十一五”应用型规划教材）

ISBN 978-7-111-28975-3

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 彭…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料　②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 199405 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：刘夏风　　　　版式设计：刘永青
北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷
2010 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・9.5 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-28975-3
定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88379210；88361066
购书热线：（010）68326294；88379649；68995259
投稿热线：（010）88379007
读者信箱：hzjg@hzbook.com

PREFACE 前言

本书是与教材《应用概率统计》配套的教学指导书，我们在编写该书时，根据教材内容，做了部分延伸，对某些难度较大的例题或教材中习题做了详细分析与解答，旨在帮助教师与学生在使用本教材进行教学时，能获得更好的效果。

本书共分 9 章，内容包括：随机事件及其概率，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数学特征，大数定律和中心极限定理，样本及其分布，参数估计，假设检验，一元线性回归分析，这些内容是与教材《应用概率统计》完全一致的。每章的结构分为四个部分，概述如下：

1. **学习目标与知识结构** 在每章开头首先向读者介绍该章的学习目标、重点、难点及知识结构等。

2. **每章中各节的基本内容** 包括以下几个方面：

（1）主要知识点：也是各节的主要内容。

（2）教学要点：这部分是对主要内容的进一步讲解与分析，并配有小结与归纳，以便读者能更系统地掌握好每节的基本内容与主要内容。

（3）题型、例题、方法：为配合各节内容的学习，我们在教学要点之后都配有相应的“题型、例题、方法”这一栏目，所选择的基本题型一般都是比较典型或比较有代表性的题目。在对这些题型进行讨论时，基本上都做了思路分析，给出了解题的过程，最后归纳出方法要点，以此通过解题过程帮助读者更好地掌握基本概念与基本理论，并在此基础上，达到开拓思路，提高分析能力的目的。

3. **自测题及自测题答案** 在各章的内容之后，就是自测题部分，这部分主要为读者设计了一套包含了该章的重点内容且综合性较强的测试题，并给出了答案。自我测试可起到帮助读者提高综合解题的能力与应试能力，增强学习自信心，提高学习效果等作用。

4. **教材习题选解** 对教材《应用概率统计》中大部分难题或综合性较强的习题，都给出了详尽的解答，读者在学习过程中可以对此进行核对与比较，习题选解也能为读者起到释疑解难的作用。为给读者提供独立思考空间，我们留了一部分题未给出答案，这些题就由读者自己完成解答。

本书也可供广大统计应用工作者和使用其他版本概率论与数理统计教材的读者参考使用。

参与本书编写的基本上都是编写原教材《应用概率统计》的作者，他们是彭美云（第1、8章）、凌卫平（第2、3章）、朱玉龙（第4、5、7、9章）、刘会灵（第4、5章部分），朱廷亮（北京理工大学珠海学院）应邀参与了第6章的编写。

由于编写时间仓促，书中若有不当之处，敬请各位同行和读者予以指正。

CONTENTS 目 录

（注：带*号章节为选修）

Chapter

第 1 章

随机事件及其概率

1.1 学习目标与知识结构

【学习目标】

本章从内容结构上是学习概率论的基础，从程序上是概率论入门的一把钥匙. 因此本章的学习目标包括以下几个方面.

1. 熟练掌握随机现象、随机试验、随机事件、样本空间等基本概念以及它们之间的关系.

2. 随机事件及其运算要着重掌握事件的“和”、“积”、“互不相容”、“相互对立”、“相互独立”.

3. 深刻理解概率的公理化定义及其性质，掌握古典概型的特点及计算方法与技巧.

4. 理解条件概率与事件独立性概念，并能熟练、灵活地应用乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、二项概率公式于实际问题的概率计算.

【重点】

1. 随机事件、样本空间，以及事件之间的关系及其运算规律，概率的一般定义.

2. 古典概型与条件概率及其应用.

【难点】

事件之间的关系与事件之间的运算证明；古典概型与条件概率的应用.

【知识结构】

本章可分成三个模块，如图 1-1 所示.

$$\text{随机事件及其概率} \Rightarrow \begin{cases} \text{概率论的基本概念} \\ \text{条件概率及其应用} \\ \text{贝努里概型和二项概率} \end{cases}$$

图 1-1

现分述如下.

1.2 概率论的基本概念

【主要知识点】随机现象、随机试验、随机事件、事件间的关系和运算、概率的一般定义、概率的加法公式与古典概型.

【教学要点】

1. 随机试验　随机试验具有以下三个特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行（亦即不变的一组条件“S”下）;

（2）每次试验的可能结果不止一个，且所有可能结果都是已知的；

（3）在每次试验之前，不能确定哪一个结果会出现，如图 1-2 所示.

$$\text{条件“S”下} \Rightarrow \begin{cases} \text{结果}1 \\ \text{结果}2 \\ \vdots \\ \text{结果}n \end{cases}$$

图 1-2

称这样的试验是一个随机试验，简称试验．在概率论中，就是通过随机试验来研究随机现象的.

2. 随机事件　在随机试验中，可能出现或可能不出现的试验结果称为随机事件，简称事件，随机事件是概率论研究的主要对象.

3. 样本空间　随机试验所产生的可能结果的全体称为样本空间，记为Ω．Ω中的元素称为基本事件，也称为样本点．基本事件的集合称为随机事件，亦即指一般的随机事件，简称事件．在概率论中，必然事件用Ω表示，不可能事件用Φ表示.

4. 事件之间的关系　事件的包含与相等，事件的并与交，事件的差，互不相容，相互对立等这些概念的描述及表示.

5. 事件之间的运算规律　设A，B，C为试验E的事件，Ω为样本空间，Φ为不可能事件，则事件的运算满足以下规律.

（1）$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$　（交换律）

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$　（结合律）

（3）$(A\cup B)C=AC\cup BC$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$　（分配律）

（4）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$　（德摩根（De Morgan）对偶律）

以上规律都可推广到n个事件的情况.

另外，事件的运算还有下列等式成立：

$$A\cup A=A \quad A\cup\overline{A}=\Omega \quad A\cup\Omega=\Omega \quad A\cup\Phi=A$$

$$A\cap A=A \quad A\cap\overline{A}=\Phi \quad A\cap\Omega=A \quad A\cap\Phi=\Phi$$

注意到，这些规律可以用定义来证明，亦可通过图形直观看出．但不能简单套用代数的运算规律．例如，$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cap\Omega=A$，其结果都为A，但公式的正确性都只能通过定义来理解．如$A\cap\Omega=A$，因为Ω是必然事件，因此有$\Omega\supset A$，而$A\cap\Omega$表示A与Ω同时发生，即为A与Ω的公共部分，实际上就是A所包含的部分，故有$A\cap\Omega=A$．由此还可得出这样的规律：只要$A\supset B$，便有$A\cap B=B$，这一

结果在实际计算中很有用．这种理解方法同时也可帮助我们加强对公式的记忆．

6．概率的一般定义　直观地说，概率是用来描述事件在试验中出现的可能性大小的一个数量指标．这里我们是通过讨论事件频率的概念及其有关性质来导出概率的一般定义．在概率定义的基础上，又进一步推出概率的一些重要性质并做了证明，包括概率的加法公式．概率的加法公式是学习概率论中接触到的第一个概率计算公式，对公式的理解可从一般形式到特殊情况．如其一般形式为对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

则当 $AB=\Phi$ 时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

当 $AB=\Phi$，且 $A\cup B=\Omega$，即 $B=\overline{A}$ 时，有

$$P(A\cup B)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

从而又可表示成

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

上述三个公式都可推广到 n 个事件的情况．

7．古典概型　古典概型是学习概率论中接触到的第一种概型，它是一类最简单而又常见的随机试验，这类试验具有以下特点：

（1）试验的样本空间的元素只有有限个，即 $\Omega=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$；

（2）试验中每个基本事件发生的可能性相同，且两两互不相容．即

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$$

具有这种性质的随机现象的数学模型称为古典概型，也称为等可能概型．

古典概型中事件 A 的概率计算公式结构十分简单，如下式所示：

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件个数}}{\text{样本空间}\Omega\text{包含的基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

公式中 k，n 的确定是古典概型计算中的难点，其需要用到的主要工具是初等数学中的排列与组合，对此，学生必须熟练掌握．

【题型、例题、方法】

基本题型 I　关于事件间关系的表述

【例题 1】　指出下列事件关系中哪些成立，哪些不成立．

（1）$A\cup B=A\overline{B}\cup B=A\cup B\overline{A}$；

（2）$\overline{A}B=A\cup\overline{B}$；

（3）$(AB)(A\overline{B})=\Phi$；

（4）若 $A\overline{B}=\Phi$，则 $A\subset B$；

（5）若 $\overline{A}\subset\overline{B}$，则 $A\supset B$．

【解】（1）成立，因为 $A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$，同理可证：$A\cup B=A\cup B\overline{A}$．

（2）不成立，因为式子左边不含 A，而右边含 A．

（3）成立，因为 B 与 $\overline{B}$ 不能同时发生，故 AB 与 $A\overline{B}$ 也不可能同时发生.

（4）成立，因 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}=AB\subset B=A\subset B$.

（5）成立，若 B 发生不会导致 A 发生，则必导致 $\overline{A}$ 发生，而 $\overline{A}\subset\overline{B}$，即导致 $\overline{B}$ 发生，从而得到 $B\subset\overline{B}$ 的结论，显然这是不可能的.

【例题 2】　设 A，B，C 为随机事件，试说明下列关系式的含义：

（1）$ABC=A$；（2）$AB\subset C$；（3）$A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$.

【解】（1）$ABC=A\Rightarrow BC\supset A\Rightarrow B\supset A$ 且 $C\supset A$，从而有 A 发生则必有 B 与 C 同时发生.

（2）$AB\subset C\Rightarrow A$ 与 B 同时发生必导致 C 发生.

（3）$A\subset\overline{B}\cup\overline{C}\Rightarrow A\subset\overline{BC}$，即 A 发生必导致 B 与 C 不会同时发生.

【方法要点】上述两题都是从事件关系与运算规律及性质等多个方面入手，将某一事件的含义及事件的运算性质进行等价表示与描述.

基本题型Ⅱ　古典概型的计算

【例题 3】　将一枚均匀硬币抛掷两次，试求：

（1）$A=\{$出现两次正面$\}$

（2）$B=\{$恰好出现一次正面$\}$

（3）$C=\{$至少出现一次正面$\}$

的概率.

【分析】抛一枚均匀硬币一次有两种可能，抛两次就有 2^2 种可能，若正面用 H 表示，反面用 T 表示，则抛两次的样本空间 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$，也就是说，样本空间包含的基本事件总数 $n=4$，而事件 A 包含的基本事件个数 $k_A=1$，B 包含的基本事件个数 $k_B=2$，C 包含的基本事件个数 $k_C=3$，从而 A，B，C 的概率由古典概型公式就可算得.

【解】根据以上分析，A，B，C 三事件的概率分别为：

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{k_C}{n}=\frac{3}{4}$$

【例题 4】　从分别标有号码为：1，2，3，4，5，6，7，8，9 的 9 件同型产品中任取 3 件，求取得的标号都是偶数的概率.

【分析】从 9 件中任取一件都是试验 E 的一个结果，那么从 9 件中任取 3 件的所有结果就是从 9 件中任取 3 件的不同组合数，因此 $n=C_9^3$，且这些结果都是处于同等的地位，即具有等可能性．若设 $A=\{$取得的 3 件标号都是偶数$\}$，则由题意知，事件 A 包含的基本事件数是从 4 个标有偶数号码产品中任取 3 件所得的结果，不同的结果数 $k=C_4^3$，则由古典概型公式就可算得事件 A 的概率.

【解】设 $A=\{$取得的 3 件标号都是偶数$\}$，根据以上分析得

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{21}$$

【例题 5】　在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面 4 个数全不相同的概率（设后面 4 个数中的每一个数都是等可能地取自 0，1，2，…，9）.

【解】因为电话号码的数字是可重复的，因此由 0，1，2，…，9 所构成的 4 个数字的基本事件总数为10^4，设 $A=\{$电话号码的后面 4 个数全不相同$\}$，则事件 A 包含的基本事件个数为 P_{10}^4，于是由古典概型公式算得所求概率为：

$$P(A)=\frac{A_{10}^4}{10^4}=0.504$$

【注】本题计算与电话号码的位数无关.

【例题 6】　有 n 对新人参加集体婚礼，现进行一项游戏：随机地把人分为 n 对，问每对恰为夫妻的概率是多大？

【分析】不妨把这 $2n$ 个人从左至右排成一行，这是个全排列，因此总共有 $(2n)!$ 种排法. 游戏规定处在第 1，2 位上的作为一对夫妻，3，4 位上的作为一对夫妻，以下类推，直到最后一对. 很显然，第一位上可有 $2n$ 种取法，但第二位上只有 1 种取法，而第 3 位上的有 $2n-2$ 种取法，第 4 位也只有 1 种取法，如此类推，若设 $A=\{$每对恰为夫妻$\}$，则 A 包含的基本事件个数

$$k=2n\ (2n-2)\cdots 2=2^n n!$$

【解】从分析结果可知，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{2^n n!}{(2n)!}$$

【注】从计算结果可知，当 n 越大，每对恰为夫妻的可能性越小. 例如，取 $n=2$ 时，$P(A)=\frac{1}{3}$，取 $n=6$ 时，$P(A)=\frac{2^6 6!}{(12)!}=\frac{1}{10395}$. 这是个概率极小的事件，在一次试验中几乎不可能发生.

【方法要点】古典概型一类问题的计算，一般包括 3 个方面：首先找出所要求的事件 A 是什么？再分析伴随事件 A 发生所包含的基本事件个数 k 的值与试验的样本空间包含的基本事件总数 n 的值，最后用古典概型公式即可算出 $P(A)$ 的值. 特别要注意的是，k 与 n 的值必须在同一个样本空间中计算. 此外，在古典概型一类问题的计算中，尚需注意的问题小结如下：

1. 注意通过分析事件之间的关系来确定样本空间包含的基本事件总数 n 与事件 A 包含的基本事件个数 k;

2. 掌握利用概率的定义、性质来分析与解决实际问题. 在例题中我们用到了事件间的包含、相等及互不相容等关系，用到了概率的加法公式、对立事件的计算公式及古典概型计算公式；

3. 采用古典概型计算公式时，要特别注意“n”与“k”必须在同一样本空间中确定.

1.3 条件概率及其应用

【主要知识点】条件概率、乘法公式、事件独立性概念、全概率公式、贝叶斯公式及其用于实际问题的概率计算.

【教学要点】

1．条件概率　$P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率．同样可定义 $P(A|B)$．定义同时给出了条件概率的计算公式．由条件概率的定义可知，如前讨论的“古典概型”相对条件概率而言，可称其为无条件概率．特别要强调的是条件概率亦具有概率的 3 条基本性质：

（1）对任一事件 B，$P(B|A)\geqslant 0$

（2）$P(\Omega|A)=1$

（3）设 B_1，B_2，…是两两互不相容的事件，则有

$$P(B_1\cup B_2\cup\cdots|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)+\cdots$$

条件概率的定义及其性质在概率计算中有十分重要的作用.

2．乘法公式　概率乘法公式的作用在于利用条件概率去计算积事件的概率，它的一般形式为：

（1）两个事件的乘法公式：当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)\,P(B|A)=P(B)\,P(A|B)$$

（2）多个事件的乘法公式：设 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$．（此假设可保证公式中所有条件概率都有意义.）

$$P(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

【注】当一事件发生涉及多个事件共同发生时，要找出这种关系并使用乘法公式.

3．事件的独立性

（1）若有 $P(AB)=P(A)P(B)$，称事件 A 与 B 独立，显然此时 B 与 A 也独立，故称事件 A 与 B 相互独立.

（2）称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，如果对任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 有：

$$P(A_{i1}\ A_{i\,2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})\ P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$

其中 i_1，i_2，…，i_k 是 k 个自然数，且有：$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.

【注】（1）A_1，A_2，…，A_n 中两两相互独立不蕴含 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，但反之成立.

（2）$\{A，B\}$，$\{\overline{A}，B\}$，$\{A，\overline{B}\}$，$\{\overline{A}，\overline{B}\}$四对中只要有一对相互独立，则其他三对也相互独立.

（3）设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则有 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$.

4．全概率公式　设 A_1，A_2，…，A_n 是样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，$(i=1，2，…，n)$．对 $B\subset\Omega$，且满足 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}BA_i$，

则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)\text{ .}$$

5．贝叶斯公式：设 A_1，A_2，…，A_n 是样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$．对 $B\subset\Omega$，且满足 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}BA_i$ 及 $P(B)>0$，对任一 $1\leqslant j\leqslant n$，有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

贝叶斯公式在经营管理、投资决策、医学卫生统计等方面有重要的应用价值．

【注】（1）当一个事件是由多种“原因”产生的一些互不相容事件构成时，往往会考虑用全概率公式计算它的概率．使用全概率公式的关键是正确确定样本空间 Ω 的一个划分 $\{A_i\}$，$i=1，2，…，n$．全概率公式体现了化繁为简，从而达到解决问题的一种思维方法，在实际中有广泛应用．

（2）贝叶斯公式讨论的是一类已知“结果”寻找引起“结果”发生的“原因”的问题，即求 $P(A_j\mid B)$，并称此概率为后验概率．使用贝叶斯公式的关键也是要正确确定样本空间 Ω 的一个划分 $\{A_i\}$，$i=1，2，…，n$．

【题型、例题、方法】

基本题型Ⅰ　关于条件概率与乘法公式

【例题 1】　在全部产品中有 4%是废品，合格品中有 72%为一等品，现从其中任取一件为合格品，求它是一等品的概率．

【解】设 $A=\{$任取一件为合格品$\}$，$B=\{$任取一件为一等品$\}$，则由题意知，

$$P(A)=96\%\text{ ，}\quad P(AB)=P(B)=72\%$$

于是所求概率为：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.72}{0.96}=0.75$$

【方法要点】这是一个比较典型的求条件概率的问题，其可直接运用条件概率公式来计算．在提出假设时，要根据题意，注意分析所假设事件间的关系，本题中事件 A 与 B 有着包含关系，即 $A\supset B$，因此在运用公式时就有 $AB=B$，这样直接代入就可求得．

【例题 2】　证明下列两式相等：

（1）$C\subset B$，且 $P(B\mid A)=0$，则有 $P(C\mid A)=0$；

（2）$B\cap A=C\cap A=\Phi$，则有 $P(B\cup C\mid A)=P(B\mid A)+P(C\mid A)$．

【证明 1】因为 $C\subset B$，所以 $AC\subset BA$．已知 $P(B\mid A)=0\Rightarrow P(AB)=0$，

所以　$P(AC)=0$，从而 $P(C\mid A)=0$．

【证明 2】因为 $BA=CA=\Phi$，所以 $(B\cup C)A=BA\cup CA=\Phi$，从而

$$P(B\cup C\mid A)=\frac{P(B\cup C)A}{P(A)}=\frac{P(BA)+P(CA)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(BA)}{P(A)}+\frac{P(CA)}{P(A)}=P(B\mid A)+P(C\mid A)$$

【归纳】一般地，计算条件概率有两种途径：

1．在缩减的样本空间中直接计算事件 B 发生的条件概率；

2．在样本空间 Ω 中，先计算 $P(AB)$，$P(A)$，再按条件概率公式求得 $P(B\mid A)$．

基本题型 II　关于事件的独立性

【例题 3】　已知事件 A 与 B 相互独立，且知只有 A 发生的概率和只有 B 发生的概率均为 1/4，试求 $P(A)$ 与 $P(B)$．

【解】由题意知，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\frac{1}{4}$ 即

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}$$

从而有　$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)$

再由　$P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}$ 及 A，B 相互独立，

与　$P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-P^2(A)=\frac{1}{4}$

解得：　$P(A)=\frac{1}{2}$ 与 $P(B)=\frac{1}{2}$

【例题 4】　已知事件 A_1，A_2，A_3 相互独立，设 $P(A_i)=p_i$，$i=1$，2，3 求下列事件的概率：

（1）A_1，A_2，A_3 全不发生；

（2）A_1，A_2，A_3 至少有一个发生；

（3）A_1，A_2，A_3 恰好发生一个；

（4）A_1，A_2，A_3 至多发生一个．

【解】（1）A_1，A_2，A_3 全不发生 $\Rightarrow P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\prod\limits_{i=1}^{3}P(\overline{A}_i)=\prod\limits_{i=1}^{3}(1-p_i)$

（2）A_1，A_2，A_3 至少有一个发生 $\Rightarrow P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i)$

$$=1-P(\bigcap_{i=1}^{3}\overline{A_i})=1-\prod_{i=1}^{3}(1-p_i)$$

（3）A_1，A_2，A_3 恰好发生一个 $\Rightarrow P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$

$$=\sum_{i=1}^{3}p_i\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant 3,j\neq i}(1-p_j)\right]$$

（4）A_1，A_2，A_3 至多发生一个 ⇒（A_1，A_2，A_3 恰好发生一个）与（A_1，A_2，A_3 全不发生）的并，因此由（1）与（3）的结果可得：

$$A_1，A_2，A_3 至多发生一个 \Rightarrow \prod_{i=1}^{3}(1-p_i)+\sum_{i=1}^{3}p_i[\prod_{1\leqslant j\leqslant 3,j\neq i}(1-p_j)]$$

【例题 5】　已知每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，且他们是否含有肝炎病毒是相互独立的，今混合 100 个人的血清，试求混合后的血清中含有肝炎病毒的概率.

【分析】先写出假设：$A=$\{混和后的血清中含有肝炎病毒\}，可见此假设与\{100 个人中至少有一人的血清中含有肝炎病毒\}等价，设事件知 $A_i=$\{第 i 个人的血清中含有肝炎病毒\}，i=1，2，…，100. 显然 A 与 A_i 有如下关系：$A=A_1\cup A_2,\cdots,\cup A_{100}$，由事件的独立性及对偶原理将加法转化为乘法即可求得答案.

【解】设：$A=$\{混和后的血清中含有肝炎病毒\}

$A_i=$\{第 i 个人的血清中含有肝炎病毒\}i=1，2，…，100

则所求概率为：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2,\cdots,\cup A_{100})=1-P(\overline{A_1\cup A_2,\cdots,\cup A_{100}})\\&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A}_{100})=1-\prod_{i=1}^{100}P(\overline{A}_i)=1-\prod_{i=1}^{100}[1-P(A_i)]\\&=1-(1-0.004)^{100}=0.33\end{aligned}$$

【结论】计算结果说明，虽然每个人的血清中有肝炎病毒的概率都很小，仅为 0.004，但把许多人的血清混合起来后，其中含有肝炎病毒的概率就很大了. 这就是通常说的小概率事件会产生大效应，所以在实际问题中，遇到此类情况要特别引起重视.

【注】本例题讨论的都是事件之间并与交的最基本的关系，在实际应用中，几乎处处会遇到，因此学生必须熟练掌握. 特别地，当各事件相互独立时，并与交可以用对偶原理进行转换，以此简化计算. 另外注意到，以上结果还可推广到有限个事件的情况，例如，当有 n 个事件相互独立时，上述 4 种情况的讨论就留给读者自行完成.

【小结】通过对以上各题的分析讨论，要求学生能达到熟练判断所要讨论的问题是属于哪种概型，应采用什么公式，各事件之间有什么关系等，以此提高自己的分析能力.

基本题型Ⅲ　关于全概率公式与贝叶斯公式

下例题可在决策或判断上应用.

【例题 6】　已知某厂生产的产品不合格率为 0.1%，但是没有适当的仪器进行检验. 有人声称发明了一种仪器可以用来检验，误判的概率为 0.05，且把不合格品判为合格品的概率也是 0.05，试问厂长能否采用该人发明的仪器？

【分析】厂长如何决策，关键还是要通过运用全概率公式与贝叶斯公式，求出实际中合格品被判为不合格品的概率大小来决定.

【解】设 $A=\{$任取一件为不合格品$\}$

$B=\{$任取一件产品被仪器判为不合格品$\}$

由题意知：

$$P(A)=0.001,\ P(\overline{A})=0.999$$

$$P(\overline{B}\mid A)=0.05,\ P(B\mid\overline{A})=0.05$$

则有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})\\&=0.001\times0.95+0.999\times0.05=0.050\,9\end{aligned}$$

【注】被判为不合格品的概率是 0.0509．题中的 A 与 $\overline{A}$ 构成样本空间的一个划分．再由贝叶斯公式求检验出的不合格品确实是不合格的概率为

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}\\&=\frac{0.000\,95}{0.050\,9}=0.018\,7\approx0.02\end{aligned}$$

也就是说，被判为不合格品中实际上有 98%的产品是合格的．显然，这位厂长会考虑成本太高而不敢采用．

【小结】全概率公式和贝叶斯公式是概率论中的两个重要公式，他的基本思想是将复杂事件分解成较简单事件的“组合”，通过解算简单事件的概率求出复杂事件的概率，因此有着广泛的应用．其中全概率公式论述的是综合各种原因发生导致结果发生的概率大小，而贝叶斯公式是指结果发生是由某一原因 A_i 引起的可能性大小，这在医学治疗、电子产品的可靠性检验等方面都有广泛应用．实际使用时，要注意正确分析两者的关系．

1.4 贝努里概型与二项概率

【主要知识点】贝努里概型，二项概率．

【教学要点】

1．贝努里（Bernoulli）概型　贝努里概型是指在 n 次重复独立试验中，每次试验只有两个可能结果：事件 A 发生或不发生，且不等概．称此重复独立试验为 n 重贝努里试验，此类试验的概率模型称为贝努里概型．

对于 n 重贝努里概型，我们最关心的是在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率，其概率大小可用二项概率公式算出．

2．二项概率公式

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0，1，\cdots，n，\ 0<p<1$$

为事件 A 在 n 次重复独立试验中恰好发生 k 次的概率计算公式，并称其为二项概率公式．

贝努里概型与二项概率是应用相当广泛的概率模型，涉及面宽，且计算简便，容易掌握．