导学教程系列丛书
DAOXUEJIAOCHENG

新编高考总复习

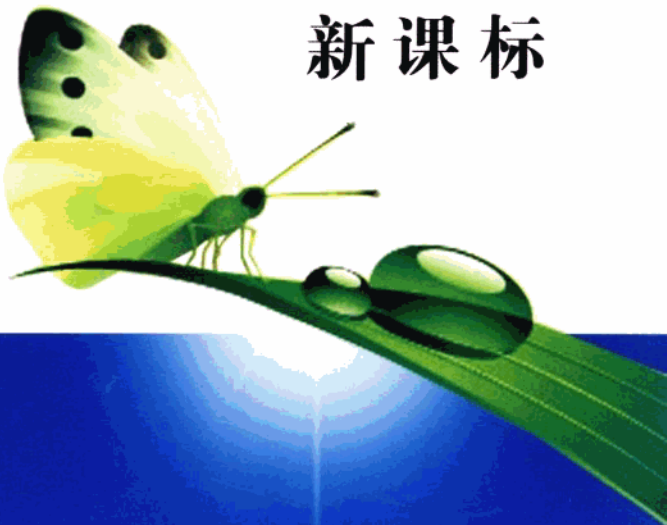
导学教程

daoxuejiaochengdaoxuejiaocheng

高考专题辅导与训练

丛书主编：王显忠

新课标



2000-2010
十载盛誉
品质尊享

- 突出重点　科学导引
- 概括综合　系统简要
- 专题集训　全面提升

数学（理科）

学生用书

济南出版社

新课标

导学教程

高考专题辅导与训练

好雨知时节，
润物细无声。
《导学教程》
润你求学心田，
助你步入名校殿堂……

主　编：刘承恩
副主编：王春峰、苏冰
孙明宇

（理科）

数学

学校 ____________________

班级 ____________________

姓名 ____________________

济南出版社

众志成城 导学教程

图书在版编目（CIP）数据

导学教程:新编高考总复习·专题辅导·数学.理科/王显忠主编

-济南：济南出版社，2003.4(2009.11重印)

ISBN 978-7-80629-839-8

Ⅰ.导… Ⅱ.王… Ⅲ. 数学课—高中—

升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第017615号

出　　版　济南出版社

发　　行　济南出版社出版发行

电　　话　0531-86131729

地　　址　济南市经七路251号

印　　刷　山东汶上新华印刷有限公司（0537-7326636）

版　　次　2009年11月第1版印刷

开　　本　880mm×1230mm　1/16

印　　张　11.5　印数：250001-300000套

字　　数　460千字

书　　号　ISBN 978-7-80629-839-8

定　　价　29.80元

不吝付出

付出总有回报

不仅说到

说到更要做好……

导学教程

——千仞高台的基石

导学教程

——攀登高峰的阶梯

学习要抓住基本知识，即不好高骛远，而忽略基本的东西。珠穆琅玛峰是世界著名的高峰，因为它是建立在喜马拉雅山之上，盘基广大高原之上的一个高峰，假如把珠穆琅玛峰建立在河海平原上，八千公尺的高峰是难以存在的，犹如无源之水易于枯竭的。

——徐特立

前言 PREFACE

真情铸精品 实效更实用

经过数百名教育考试专家、全国各地高中一线特高级教师和教研员认真解读考纲，探究考势，潜心研究，博采众长，反复比较，提炼考点，新版《精讲精练》终于以崭新的面貌呈现在您的面前！

《精讲精练》坚持以夯实基础为基本，以能力提升为目的系统设计引导“思考与领悟”，注重“探究与创新”，融教案与学案于一体，全面优化了学习过程，为莘莘学子构筑了实现梦想的知识平台。

《精讲精练》根据各学科特点，设置了科学合理，简明实用的栏目，精选了高考题，模拟题，及学科高考专家原创题，彰显了“命题以能力立意为主，强调与现实生活的紧密结合”，节节经典，题题高效。

《精讲精练》是一根小小的火柴，却能照亮您一片迷茫的心空；《精讲精练》是一抹小小的新绿，却能倾倒您整个高考浪漫的“春季”；《精讲精练》是一朵小小的浪花，能让您滴水知海，助您轻松畅游，到达成功的彼岸。

《精讲精练》编委会

目录 CONTENTS

专题一　集合与常用逻辑用语 …………………… (1)

专题二　不等式 …………………………………… (5)

专题三　函数的图像与性质 ……………………… (10)

专题四　二次函数、指数函数、对数函数 ……… (15)

专题五　方程、函数的零点及函数模型的应用 … (20)

专题六　三角函数的图像和性质 ………………… (25)

专题七　三角恒等变换、平面向量与解三角形 … (30)

专题八　导数及其应用 …………………………… (34)

专题九　等差数列、等比数列 …………………… (39)

专题十　数列综合应用 …………………………… (43)

专题十一　空间中的几何体 ……………………… (47)

专题十二　点、直线、平面之间的位置关系 …… (52)

专题十三　空间向量及其应用 …………………… (57)

专题十四　直线与圆 ……………………………… (63)

专题十五　椭圆、双曲线、抛物线 ……………… (68)

专题十六　圆锥曲线综合问题 …………………… (74)

专题十七　算法初步与框图 ……………………… (79)

专题十八　计数原理和二项式定理 ……………… (83)

专题十九　概率、随机变量及其分布列 ………… (86)

专题二十　统计、统计案例、复数 ……………… (91)

专题二十一　不等式选讲与几何证明 …………… (97)

专题二十二　坐标系与参数方程 ………………… (102)

参考答案(单独成册) …………………………… (110)

阶段测试卷(活页卷)

阶段测试(一) ……………………………………… (157)

阶段测试(二) ……………………………………… (161)

阶段测试(三) ……………………………………… (165)

阶段测试(四) ……………………………………… (169)

阶段测试(五) ……………………………………… (173)

阶段测试(六) ……………………………………… (177)

专题一　集合与常用逻辑用语

Daoxuejiaocheng

高考考纲点击

1. 了解集合的含义、元素与集合的属于关系；能用自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题.

2. 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集；在具体情境中，了解全集与空集的含义.

3. 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集；理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集；能使用韦恩图(Venn)表达集合的关系及运算.

命题规律展示

1. 从考查内容上看，集合问题仍是2010年高考的考查热点，在试题中一定会出现集合的问题.

2. 从考核的背景上看，多与不等关系、不等式的解集、方程的根联系，有可能会加强Venn图的应用考查.

3. 从能力要求上看，对学生用集合思想解决数学问题的能力培养力度逐渐加大.

主干知识梳理

1. 集合元素的性质 $\begin{cases}\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$.

2. 集合的表示法：______；______；______.

3. 集合间的关系

(1)相等关系：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 A ______ B.

(2)包含关系：若任意元素 $x\in A$，则 $x\in B$，那么集合 A 与 B 的关系是 A ______ B.

(3)真包含关系：若任意元素 $x\in A$，则 $x\in B$，且存在 $y\in B$，但 $y\notin A$，那么 A 与 B 的关系为 A ______ B.

4. 并集、交集、补集的概念

并集：$A\cup B=$ ____________.

交集：$A\cap B=$ ____________.

补集：$\complement_U A=$ ____________.

5. 充分条件、必要条件与充要条件

(1)若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的______，q 是 p 的______.

(2)“若 p 则 q”为假，记作 $p\nRightarrow q$.

(3)若______，则 p 是 q 的充分必要条件，即充要条件.

热点题例导航

热点 1　集合的运算

例 1　已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}}+(x-1)^0$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(2-x)$ 的定义域为 N，则 $M\cap N$ 等于

A. $\{x|x>-2\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|-2<x<2\}$　　D. 以上都不对

思路导引　根据函数定义域的求法，先求得 M、N，然后借助于数轴求得两集合的交集.

方法总结　本题考查函数定义域的求法及集合的运算,求集合的运算时注重借助于数轴或 Venn 图求解,特别是求解较为复杂的集合运算时一目了然.

变式训练

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-10x$,且集合 $A=\{x|f'(x)\leqslant 0\}$,集合 $B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$,若 $A\cup B=A$,求 p 的取值范围.

热点 2　命题的真假判断与否命题

例 2　(独创题)以下判断正确的是

A. "若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$"的逆否命题是"若 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$,则 $ab\neq 0$"

B. 命题"$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+4\leqslant 0$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+4>0$"

C. 命题"对边平行且相等的四边形是平行四边形"是全称命题

D. "a,b,c 成等比数列"是"$b^2=ac$"的充要条件

思路导引　从命题和充要条件的概念,结合数学其它相关知识求解.

方法总结　命题真假的判定方法:

①一般命题 p 的真假由涉及到的相关交汇知识辨别真假.

②四种命题的真假的判断根据:一个命题和它的逆否命题同真假,而与它的其他两个命题的真假无此规律.

③形如 $p\vee q$、$p\wedge q$、$\neg p$ 命题真假根据真值表判定.

④全称命题与特称命题(存在性命题)的真假根据教材中给定方法判断.

变式训练

2. (2008·广东)已知命题 p:所有有理数都是实数,命题 q:正数的对数都是负数,则下列命题中为真命题的是　(　　)

A. $(\neg p)\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

热点 3　命题与充要条件

例 3　设 p:实数 x 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$,其中 $a<0$;q:实数 x 满足 $x^2-x-6\leqslant 0$ 或 $x^2+2x-8>0$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求 a 的取值范围.

思路导引　先解一元二次不等式求得 p、q,进而得出 $\neg p$、$\neg q$.借助于数轴求解.

解析　p:$(x-3a)(x-a)<0$,又 $a<0$,$\therefore 3a<x<a$.

记 $A=(3a,a)(a<0)$　　(4 分)

q:$x^2-x-6\leqslant 0$ 或 $x^2+2x-8>0$,

$\therefore (x-3)(x+2)\leqslant 0$ 或 $(x+4)(x-2)>0$.

$\therefore -2\leqslant x\leqslant 3$ 或 $x>2$ 或 $x<-4$,

$\therefore x\geqslant -2$ 或 $x<-4$.

记 $B=(-\infty,-4)\cup[-2,+\infty)$　　(8 分)

$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,

$\therefore q$ 是 p 的必要不充分条件.

$\therefore A\subsetneqq B$,$\therefore a\leqslant -4$ 或 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$.　　(12 分)

答案　$a\leqslant -4$ 或 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$

方法总结　本题主要考查一元二次不等式的解法,非命题和充要条件,求解时 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件转化成 q 是 p 的必要不充分条件是关键,然后转化成集合关系借助于数轴求解.本题解得 p、q 后亦可求得 $\neg p$、$\neg q$ 对应的集合,再借助于数轴求解.

变式训练

3. 已知 $c>0$,设命题 p:函数 $y=c^x$ 为减函数;命题 q:当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}>\frac{1}{c}$恒成立.如果 $p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,求 c 的取值范围.

易错辨析

例题　已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

错解　由 $x^2-3x-10\leqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 5$.

欲使 $B\subseteq A$，只需 $\begin{cases}-2\leqslant p+1,\\ 2p-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow -3\leqslant p\leqslant 3$，

$\therefore p$ 的取值范围是 $-3\leqslant p\leqslant 3$.

错因辨析　解决有关 $A\cap B=\varnothing$、$A\cup B=\varnothing$、$A\subseteq B$ 等集合问题时，容易忽视空集的情况而漏解，这需要在解题过程中全方位、多角度审视问题. 本题漏掉了 $B=\varnothing$ 的情况.

自我校正

知能过关演练

一、选择题

1. (2009·**湖北**)已知 $P=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,0)+m(0,1),m\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(1,1)+n(-1,1),n\in\mathbf{R}\}$是两个向量集合，则 $P\cap Q$ 等于　(　　)

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(-1,1)\}$

C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(0,1)\}$

2. (2009·**江西**)已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$中有 n 个元素. 若 $A\cap B$ 非空，则 $A\cap B$ 的元素个数为　(　　)

A. mn　　B. $m+n$

C. $n-m$　　D. $m-n$

3. (2009·**广东**)给定下列四个命题：

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

②若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；

③垂直于同一直线的两条直线相互平行；

④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直. 其中，为真命题的是(　　)

A. ①和②　　B. ②和③

C. ③和④　　D. ②和④

4. (2009·**山东枣庄**)命题 p：若 $xy\neq 6$，则 $x\neq 2$ 或 $y\neq 3$；命题 q：当 $a\in(-1,5]$时，$|2-x|+|3+x|\geqslant a^2-4a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则　(　　)

A. “$p\vee\neg q$”为假命题

B. “$\neg p\vee q$”为假命题

C. “$p\wedge\neg q$”为真命题

D. “$p\wedge q$”为真命题

5. (2009·**浙江**)对于正实数 α，记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$构成的集合：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_2>x_1$，有 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$. 下列结论中正确的是　(　　)

A. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)\cdot g(x)\in M_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$

B. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$ 且 $g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$

C. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$

D. 若 $f(x)\in M_{\alpha_1}$，$g(x)\in M_{\alpha_2}$，且 $\alpha_1>\alpha_2$，则 $f(x)-g(x)\in M_{\alpha_1-\alpha_2}$

6. (2009·**四川**)已知 a,b,c,d 为实数，且 $c>d$. 则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. (2009·**山东英雄山**)已知命题 p：“$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\geqslant 0$”，命题 q：“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+2ax+2-a=0$”，若命题“p 且 q”是真命题，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $\{a|a\leqslant -2$ 或 $a=1\}$

B. $\{a|a\geqslant 1\}$

C. $\{a|a\leqslant -2$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2\}$

D. $\{a|-2\leqslant a\leqslant 1\}$

8. (2009·**福建**)设 m、n 是平面 α 内的两条不同直线；l_1、l_2 是平面 β 内的两条相交直线，则 $\alpha/\!/\beta$ 的一个充分而不必要条件是　(　　)

A. $m/\!/\beta$ 且 $l_1/\!/\alpha$　　B. $m/\!/l_1$ 且 $n/\!/l_2$

C. $m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$　　D. $m/\!/\beta$ 且 $n/\!/l_2$

9. (2009·**安徽**)下列选项中，p 是 q 的必要不充分条件的是　(　　)

A. p：$a+c>b+d$，q：$a>b$ 且 $c>d$

B. p：$a>1,b>1$，q：$f(x)=a^x-b(a>0$，且 $a\neq 1)$的图像不过第二象限

C. p：$x=1$，q：$x^2=x$

D. p：$a>1$，q：$f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$在$(0,+\infty)$上为增函数

10. (2009·**湖南株洲**)设集合 $A=\{x\mid |x-1|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+1}{x-3}\leqslant 0\right\}$，那么“$x\in A$”是“$x\in B$”的　(　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

11. (2008·**潍坊模拟**)给出下列判断：

①$a^m b^n=(ab)^{mn}$；

②函数 $y=1-e^{-x}$ 是增函数；

③$a<0$ 是方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实数根的充分不必要条件；

④$y=\ln x$ 与 $y=\ln(-x)$ 的图像关于 y 轴对称.

其中正确判断的个数为　(　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

12. (2008·**济南模拟**)已知：m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，其中 $m\subset\alpha,n\subset\beta$. 命题 p：若 $\alpha/\!/\beta$，则 $m/\!/n$ 的原命题、逆命题、否命题和逆否命题中正确命题的个数是　(　)

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 4 个

13. (2009·**山东**)已知 α、β 表示两个不同的平面，m 为平面 α 内的一条直线，则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的　(　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

14. (2009·**宁夏、海南**)有四个关于三角函数的命题：

p_1：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

p_2：$\exists x,y\in\mathbf{R}$，$\sin(x-y)=\sin x-\sin y$

p_3：$\forall x\in[0,\pi]$，$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$

p_4：$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$

其中的假命题是　(　)

A. p_1,p_4　　B. p_2,p_4

C. p_1,p_3　　D. p_2,p_3

二、填空题

15. (2008·**威海模拟**)已知集合 $M=\{x\mid 1+x>0\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{1-x}>0\right\}$，则 $M\cap N$ 等于________.

16. (2008·**临沂模拟**)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中只有一个元素，则 a 的值为________.

17. (2007·**南昌模拟**)已知集合 $M=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(2t+1,-2-2t),t\in\mathbf{R}\}$，$N=\{\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{b}=(3t-2,6t+1),t\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$________.

18. (2009·**江苏**)已知集合 $A=\{x\mid\log_2 x\leqslant 2\}$，$B=(-\infty,a)$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$，其中 $c=$________.

专题二 不等式

Daoxuejiaocheng

高考考纲点击

1. 会从实际情境中抽象出一元二次不等式模型.会解一元二次不等式.

2. 通过函数图像了解一元二次不等式与相应的二次函数、一元二次方程的联系.

3. 在熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式的解法的基础上,掌握一些简单的高次整式不等式和分式不等式的解法;掌握含参数的不等式的解法.

4. 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

5. 掌握用比较法、分析法、综合法证明简单的不等式.

6. 了解二元一次不等式的几何意义,能用平面区域表示二元一次不等式组.

7. 会从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题,并能加以解决.

命题规律展示

不等式的性质或解或证明是每年高考试题的必考内容,与函数、方程、导数、三角、平面向量、数列、平面解析几何等多个知识点相链接.主要应用不等式的基本性质解决有关求单调区间、求最值、恒成立、解不等式、证明不等式问题,所以应切实加强不等式方面的复习,弄清每类问题的解决方法,分析解决问题的切入点,提高解题能力.

主干知识梳理

一、不等式的性质

1. $a<b,b<c\Rightarrow a$ ______ c;

$a>b\Rightarrow a+c$ ______ $b+c$;

$a>b,c$ ______ $\Rightarrow ac>bc$;

$a>b,c$ ______ $\Rightarrow ac<bc$.

2. $a<b,c<d\Rightarrow a+c$ ______ $b+d$;

$a>b$ ______ $,c>d$ ______ $\Rightarrow ac>bd$;

$a>b$ ______ $,n\in\mathbf{N}^*,n>1\Rightarrow a^n>b^n,\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

二、不等式的解法

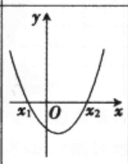
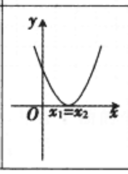
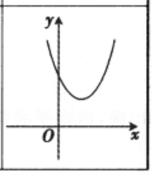
1. 一元一次不等式的解法

一元一次不等式 $ax>b(a\neq0)$ 的解集为:

①当 $a>0$ 时,解集为 ______;

②当 $a<0$ 时,解集为 ______.

2. 一元二次不等式的解集如下表所示:

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$

3. 分式不等式:

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow f(x)g(x)\geqslant0$ 且 $g(x)\neq0$.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$.

4. 指数、对数不等式的解法

(1) $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),a>1,\\f(x)<g(x),0<a<1.\end{cases}$

(2) $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x)>0,a>1,\\0<f(x)<g(x),0<a<1\end{cases}(a>0,a\neq1)$

三、基本不等式

1. 公式(1):若 a,b 是正实数,$\dfrac{a+b}{2}$ ______ $\sqrt{ab}$,当且仅当 ______ 时等号成立.

2. 公式(2):对于任意实数 a,b 都有 a^2+b^2 ______ $2ab$,当且仅当________时等号成立.

3. 性质应用:两个正数的积为常数时,它们的和有____________;两个正数的和为常数时,它们的积有____________.

四、不等式常用的证明方法

比较法、综合法、分析法、放缩法、数学归纳法及构造函数证明不等式等.

五、利用图解法解决线性规划问题的一般步骤

1. 作出可行域.将约束条件中的每一个不等式当作等式,作出相应的直线,并确定原不等式表示的半平面,然后求出所有半平面的交集.

2. 作出目标函数的等值线.

3. 求出最终结果,在可行域内平行移动目标函数等值线.从图中能判定问题有唯一最优解,或者是无穷最优解,或是无最优解.

热点题例导航

热点1　解不等式

例1 (2009·江西)设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $k>0$,求不等式 $f'(x)+k(1-x)f(x)>0$ 的解集.

思路导引　(1)解决此类问题的关键是正确求出 $f'(x)$;(2)注意等价转化思想的应用.

方法总结　本题主要考查利用导数求函数单调区间及解不等式的能力,在解不等式时要注意对参数 k 的讨论.

变式训练

1. (1)(2008·山东)不等式 $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$ 的解集是　(　　)

A. $\left[-3,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$

(2)(2008·江西)不等式 $2^{x^2+2x-4}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的解集为________.

热点2　基本不等式的应用

例2 (2008·江苏)设 x,y,z 为正实数,满足 $x-2y+3z=0$,则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值是________.

思路导引　变量较多,消元并化简,求解.

方法总结　用基本不等式求函数的最值时必须同时具备"一正、二定、三相等"这三个条件,才能应用,否则会求出错误的结果.

变式训练

2. (2009·天津)设 $a>0,b>0$,若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为　(　　)

A. 8　　B. 4

C. 1　　D. $\dfrac{1}{4}$

热点3　不等式的证明

例3 (2009·山东)等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r(b>0$ 且 $b\neq1,b,r$ 均为常数$)$的图像上.

(1)求 r 的值;

(2)当 $b=2$ 时,记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$,

证明:对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

思路导引　已知条件中含 S_n,可用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 进行变换.要证不等式与自然数 n 有关,可考虑数学归纳法.

方法总结 本题考查等比数列前 n 项和公式的理解，以及利用数学归纳法证明不等式的能力，若用方法 2 则思路比较灵活，过程较简.

变式训练

3. 已知关于 x 的函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc$，其导函数为 $f'(x)$. 令 $g(x)=|f'(x)|$，记函数 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M.

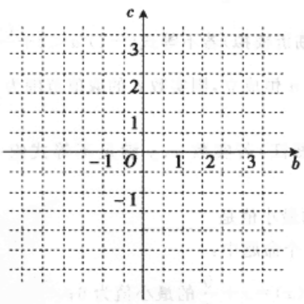
(1)如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\frac{4}{3}$，试确定 b、c 的值；

(2)若 $|b|>1$，证明：对任意的 c，都有 $M>2$；

(3)若 $M\geqslant k$ 对任意的 b、c 恒成立，试求 k 的最大值.

热点 4 简单的线性规化问题

例 4 (2009·全国Ⅰ)设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0]$，$x_2\in[1,2]$.

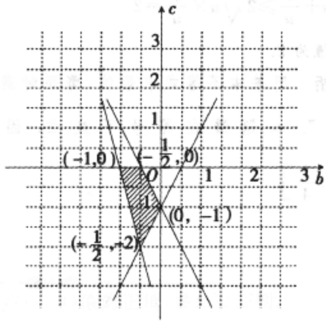


(1)求 b、c 满足的约束条件，并在下面的坐标平面内，画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域；

(2)证明：$-10\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}$.

思路导引 (1)由已知得二元一次不等式组，画出平面区域，(2)构造函数利用函数单调性证明不等式.

解析 (1)$f'(x)=3x^2+6bx+3c$



依题意知，方程 $f'(x)=0$ 有两个根 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0]$，$x_2\in[1,2]$，所以 $f'(-1)\geqslant 0$，$f'(0)\leqslant 0$，$f'(1)\leqslant 0$，$f'(2)\geqslant 0$.

由此得 b、c 满足的约束条件为 $\begin{cases}c\geqslant 2b-1,\\c\leqslant 0,\\c\leqslant -2b-1,\\c\geqslant -4b-4.\end{cases}$ (4 分)

满足这些条件的点 (b,c) 的区域为图中阴影部分. (6 分)

(2)**证明** 由题设知 $f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$，

故 $bx_2=-\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}c$.

于是 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$. (8 分)

由于 $x_2\in[1,2]$，而由(1)知 $c\leqslant 0$，故

$-4+3c\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c$. (10 分)

又由(1)知 $-2\leqslant c\leqslant 0$，

所以 $-10\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}$. (12 分)

答案 (1)$\begin{cases}c\geqslant 2b-1\\c\leqslant 0\\c\leqslant -2b-1\\c\geqslant -4b-4\end{cases}$ 图略 (2)略

方法总结 本题考查导数的运算、函数的极值问题、根的分布、线性规划及不等式的性质等基础知识，考查运算能力及数形结合思想. 求解本题时要注意由于 x_1，x_2 是 $f(x)=0$ 的两个极值点，因此 x_1，x_2 应是 $f'(x)=0$ 的两根. 而 $x_1\in[-1,0]$，$x_2\in[1,2]$ 等价于 $f'(x)=0$ 的两根分别在区间 $[-1,0]$ 和 $[1,2]$ 内，由此可以列出 b、c 的线性约束条件.

变式训练

4. (2009·湖北)在"家电下乡"活动中，某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇. 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用. 每辆甲型货车运输费用 400 元，可装洗衣机 20 台；每辆乙型货车运输费用 300 元，可装洗衣机 10 台. 若每辆车至多只运一次，则该厂所花的最少运输费用为 ( )

A. 2 000 元 B. 2 200 元

C. 2 400 元 D. 2 800 元

易错辨析

例题 设 $0<u\leqslant\frac{1}{4}$，则 $u+\frac{1}{u}$ 的最小值________.

错解 $u+\frac{1}{u}\geqslant 2\sqrt{u\times\frac{1}{u}}=2$

∴最小值为 2.

错因辨析 用基本不等式求最值，需同时满足"一正，二定，三相等". 本题错在等号不成立. 因为 $u=\frac{1}{u}$ 得 $u=1\notin\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

自我校正

知能过关演练

一、选择题

1. (2009·天津)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, x\geqslant 0,\\4x-x^2, x<0.\end{cases}$ 若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$

D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

2. (2008·全国Ⅰ)若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 (　　)

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$

C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

3. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论不正确的是 (　　)

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$

C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $|a|+|b|>|a+b|$

4. (2009·山东)设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-6\leqslant 0,\\x-y+2\geqslant 0,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$ 若目标函数 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 的最大值为 12，则 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{25}{6}$　　B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{11}{3}$　　D. 4

5. 已知 $x>0,y>0,x,a,b,y$ 成等差数列，x,c,d,y 成等比数列，则 $\frac{(a+b)^2}{cd}$ 的最小值是 (　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

6. (2009·安徽)若不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\x+3y\geqslant 4,\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y=kx+\frac{4}{3}$ 分为面积相等的两部分，则 k 的值是 (　　)

A. $\frac{7}{3}$　　B. $\frac{3}{7}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. (2009·江西)一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的"直径"，封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的"周率". 下图四个平面区域(阴影部分)的周率从左到右依次记为 $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4$，则下列关系中正确的为 (　　)

A. $\tau_1>\tau_4>\tau_3$　　B. $\tau_3>\tau_1>\tau_2$

C. $\tau_4>\tau_2>\tau_3$　　D. $\tau_3>\tau_4>\tau_1$

8. (2008·天津)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\x-1 & x\geqslant 0\end{cases}$，则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集为 (　　)

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

B. $\{x|x\leqslant 1\}$

C. $\{x|x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

D. $\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

二、填空题

9. (2009·湖北)已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，则 $a=$________.

10. (2008·临沂模拟)若不等式 $(-1)^n a<2+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

11. (2009·浙江)若实数 x、y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 2,\\2x-y\leqslant 4,\\x-y\geqslant 0\end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最小值是________.

12. 在下列四个命题中：

①函数 $f(x)=x+\frac{9}{x}$ 的最小值为 6；

②不等式 $\frac{2x}{x+1}<1$ 的解集是 $\{x|-1<x<1\}$；

③若 $a>b>-1$，则 $\frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$；

④若 $|a|<2,|b|<1$，则 $|a-b|<1$.

正确命题的序号是________(注：把你认为正确的命题序号都填上).

13. (2009·**聊城模拟**)过点 $P(1,0)$ 作曲线 $C:y=x^k(x\in(0,+\infty),k\in\mathbf{N}^*,k>1)$ 的切线，切点为 M_1，设 M_1 在 x 轴上的投影是点 P_1. 又过点 P_1 作曲线 C 的切线，切点为 M_2，设 M_2 在 x 轴上的投影是点 P_2，…. 依此下去，得到一系列点 $M_1,M_2\cdots,M_n,\cdots$，设它们的横坐标 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，构成数列为 $\{a_n\}$.

(1)求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求其通项公式；

(2)求证：$a_n\geqslant 1+\frac{n}{k-1}$.

14. (2008·**泰安模拟**)已知函数 $f(x)=ax^2+2bx+c(a<b<c)$，m 是方程 $f(x)=-a$ 的实数根，且 $f(1)=0$.

(1)求证：$-3<\frac{c}{a}\leqslant -1$，且 $b\leqslant 0$；

(2)判断 $f(m-4)$ 值的正负，并加以证明.

15. 解关于 x 的不等式

$ax^2-(a+1)x+1<0$.

专题三 函数的图像与性质

Daoxuejiaocheng

高考考纲点击

1. 了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域;了解映射的概念.

2. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图像法、列表法、解析法)表示函数.

3. 了解简单的分段函数,并能简单应用.

4. 理解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义;结合具体函数,了解函数奇偶性的含义.

5. 会运用函数图像理解和研究函数的性质.

命题规律展示

函数、函数图像及性质是必考内容,难度多是中档或中档以上,复习时一定理解概念.牢固掌握解题方法,提高分析问题和解决问题的能力,利用数形结合和转化及分类讨论的思想加强训练.

主干知识梳理

1. 函数

(1)函数的概念:函数实质上是从非空集合 A 到集合 B 的一个特殊________,记作________,其中 x 的取值范围 A 叫做这个函数的________,$f(x)$ 的集合 C 叫函数的________,B 与 C 的关系是________,我们将 f、A、C 叫做函数的三要素.但要注意,函数定义中 A,B 是两个非空________,而映射中两个集合 A、B 是任意的非空集合.

(2)函数的表示方法

函数表示方法有________、________、________.

2. 映射

映射 $A\to B$ 中两集合的元素的关系是一对一或多对一,但不可一对多,且集合 B 中元素可以没有对应元素,但 A 中元素在 B 中必须有________确定的对应元素.

3. 函数的单调性与最值

(1)单调性

对于定义域内某一区间 D 内________的 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$ →
$\begin{cases}\text{若 } f(x_1)<f(x_2) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } D \text{ 上\_\_\_\_\_\_\_\_.} \\ \text{若 } f(x_1)>f(x_2) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } D \text{ 上\_\_\_\_\_\_\_\_.}\end{cases}$

(2)最值

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,①如果存在实数 M 满足:对任意的 $x\in I$,__________,且__________,__________,那么我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.②如果存在 M 满足:对任意的 $x\in I$,__________,且__________,那么我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

4. 函数奇偶性

对于定义域内的________ x →
(定义域关于原点对称)
$\begin{cases}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \Leftrightarrow f(-x)=-f(x) \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \Leftrightarrow f(-x)=f(x)\end{cases}$.

性质:(1)函数 $y=f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于________对称.

(2)函数 $y=f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于________对称.

(3)偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上的单调性________.

(4)奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上的单调性________,奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时,必有 $y=f(x)$ 的图像过原点,即 $f(0)=$________.

5. 函数周期性

(1)定义

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,使得当 x 取定义域内的任何值时,都有________,那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,称 T 为这个函数的周期.

(2)性质

①如果一个周期函数的所有周期中,存在一个最小的正数,就把这个最小的正数叫做这个周期函数的最小正周期.

②如果 T 是函数 $y=f(x)$ 的周期,则 $kT(k\neq 0)$ 且 $k\in \mathbf{Z}$ 也是 $y=f(x)$ 的周期.

③对于函数 $y=f(x)$ 定义域内的每一个 x,若 $f(kx+T)=f(kx)$(k,T 是不为零的常数),则函数 $y=f(x)$ 的周期为 $\frac{T}{k}$.

6. 函数的图像变换

(1)平移变换

①$y=f(x)$ 的图像向左平移 $a(a>0)$ 个单位长度得到函数________的图像.

②$y=f(x-b)(b>0)$ 的图像可由 $y=f(x)$ 的图像____________长度得到.

对于左、右平移变换,方向容易出错,在实际判断中可熟记口诀:左加右减,但要注意平移的单位.

而对于上、下平移,相比较容易掌握,原则是:上加下减,但要注意的是加、减指的是在 $f(x)$ 整体上所做的加、减.

(2)对称变换(在 $-x$ 有意义的前提下)

①$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于________对称.

②$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于________对称.

③$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于________对称.

④$y=|f(x)|$ 的图像可将 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴下方的部分________,其余部分不变.

⑤$y=f(|x|)$ 的图像:可先作出 $y=f(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时的图像,再利用偶函数的图像关于________对称,作出__________的图像.

(3)伸缩变换

①$y=Af(x)(A>0)$ 的图像,可将 $y=f(x)$ 的图像上所有点的________变为原来的 A 倍,________不变而得到.

②$y=f(ax)(a>0)$ 的图像,可将 $y=f(x)$ 的图像上所有点的________变为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍,________不变而得到.

热点题例导航

热点1 函数的定义域、值域(最值)及函数值

例 1 (2008·湖南)已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a\neq 1)$.

(1)若 $a>0$,则 $f(x)$ 的定义域是________;

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是________.

思路导引 求定义域,就是求使 $f(x)$ 有意义的 x 的取值范围.

方法总结 单调区间必须是定义域的子集,同时系数 $a-1$ 的正负直接影响 $f(x)$ 的单调性,需分类讨论.

变式训练

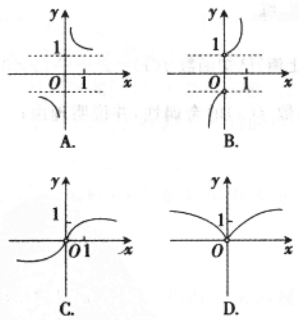
1. (2009·山东)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), x\leqslant 0,\\ f(x-1)-f(x-2), x>0,\end{cases}$ 则 $f(2\,009)$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

热点2 函数的图像

例 2 (2009·山东)函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图像大致为



思路导引 用排除法.确定函数图像,需①判奇偶性,②求特殊的函数值,③考查单调性或变化趋势.