TANXINGLIXUEJICHU

# 弹性力学基础

程尧舜 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

# 弹性力学基础

程尧舜　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内容提要


本书是为初学者写的弹性力学教程，共分11章，内容包括张量知识基础、应变分析、应力分析、本构关系、边值问题、平面问题的直角坐标解答和极坐标解答、扭转问题、空间问题和变分原理。全书符号简洁，阐述深入浅出，推导严谨，但又注重力学概念。本弹性力学教程的主要目的在于能为读者在工程应用方面及学习其他连续介质力学和有限单元法等数值方法打下基础。

本书可作为土木工程、机械工程等专业的本科生或研究生的教材，也可作为数学、力学等专业的参考书，同时也可供有关研究人员和工程技术人员参考。



**图书在版编目(CIP)数据**

弹性力学基础/程尧舜编著. —上海：同济大学出版社，2009.8

IBSN 978-7-5608-4092-5

Ⅰ. 弹… Ⅱ. 程… Ⅲ. 弹性力学—高等学校—教材 Ⅳ. 0343

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第097432号

**弹性力学基础**

程尧舜 编著

责任编辑 解明芳 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021—65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 12.25

印 数 1—3100

字 数 245000

版 次 2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4092-5

定 价 22.00元

# 前　言

本书是为学时数不太多的学生写的一本弹性力学教程。目前，大多数工程中的弹性力学问题是用有限元软件计算解决的，不太可能用解析解的方法去解决。因此，本书的着重点是弹性力学的基本概念和理论体系，为学生以后学习有限单元法、数值求解方法等作准备。书中的第 3 章到第 6 章是弹性力学的基本理论部分，也是全书最重要的部分。第 7 章和第 8 章叙述平面问题。其中，第 7 章仔细地分析了什么样的弹性力学问题可以按平面应变或平面应力问题求解。第 9 章讨论扭转问题。第 10 章用简单的方法导出了几个重要空间问题的解答。值得指出的是，在第 10 章中，没有叙述弹性力学通解和应力函数等内容。我们认为，对少学时的学生来讲，不加证明地列出这些内容是无济于事的，也不会带来什么方便。第 11 章讨论变分原理，但只叙述了最小势能原理和最小余能原理，这对一般的读者已经是足够了。另外，有许多学生和教师反映，学了弹性力学后，仍然看不懂有关文献，原因是不熟悉张量符号。鉴于此，本书第 2 章专门编写了张量的基础知识，并在后面用张量推导弹性力学的基本方程和表达式。只要学生习惯了张量符号，这样做并不会给学生带来多大困难。

本书初稿曾作为同济大学土木工程专业的教材使用过。在教学过程中，许强、朱合华和邹祖军三位教授指出了初稿中的一些错误之处，并提出了一些有益的建议；程纬、王君杰、蔡永昌、张冬梅和赖允瑾等教授和博士在使用本书初稿时也给编者提出了各种意见。在此，编者向他们表示衷心的感谢。

鉴于作者的水平，如书中不足之处，希望能得到有关教师和学生的指正。

编　者

2009 年 2 月

# 目　录

# 1 绪 论

## 1.1 弹性力学的内容

任何材料在受到外力、温度变化等因素的作用下，都会产生变形。如果去除引起变形的因素之后，材料会恢复原状，就称这种材料是弹性的。弹性力学是研究弹性固体在外部因素作用下而产生的应力分布和变形规律的一门学科。

在现代的工程实践中，常常要求人们对结构或其部件在外力等因素作用下的内力分布和变形作出比较精细的分析。而大部分工程材料在使用的条件下可以近似地看成弹性固体，所以弹性力学是一门应用极其广泛的学科。事实上，几乎所有工程技术领域，如土木工程、机械工程和航空航天工程等，都会涉及到弹性力学的问题。

材料力学和结构力学也分析结构在弹性范围内的应力和变形问题。但是，材料力学主要研究杆状构件，即一个方向的尺寸远大于其他两个方向尺寸的物体。结构力学则研究杆件组成的结构。虽然材料力学和结构力学在工程设计分析中非常重要，但是，对于非杆状结构，如板壳、堤坝等，就无能为力了，这时，必须用弹性力学知识来分析研究。在材料力学中，为了简化计算，根据直观经验对杆件的应力分布和变形作了一些假设，由此得到的结果必然是近似的，只能在一定的范围内适用。用弹性力学的方法研究杆件时，对应力分布和变形不作任何假设，所得结果是精确的，因此，可用来确定材料力学所得结果的精度和适用范围。

用弹性力学方法分析具体问题时，一般需要求解偏微分方程的边值问题。除了少数问题外，在大多数情况下，我们无法求出问题的精确的解析解，这大大地限制了弹性力学的应用范围。由于当代计算机技术和数值计算方法的发展，现在，我们可用数值方法来分析几乎所有弹性力学问题，得出足够精确的数值解，这极大地拓展了弹性力学的应用范围。这些计算方法包括有限差分法、加权残值法、边界单元法和有限单元法等。目前，应用最广泛的是有限单元法。事实上，几乎所有通用力学和结构分析软件所用的方法都是有限单元法。

可以说，弹性力学是一门古老的学科。在漫长的发展过程中，弹性力学的研究范围不断地扩大，有一些内容已逐渐形成了独立的学科分支，如板壳理论、弹性稳定理论及非线性弹性理论等。在初等弹性力学教程中包含所有这些内容是不可能的。本书只论述线性弹性力学的一般原理和一些典型问题的解法。

由于弹性力学的历史悠久，其理论体系已相当完美。但是，并不是所有问题都已解决、没有什么可研究了。事实上，有许多问题至今没有解决，仍有很多工程师、数学和力学工作者在研究弹性力学问题。总之，弹性力学目前还是非常活跃的学科之一。

## 1.2 弹性力学的基本假设

在一般情况下，弹性力学是在宏观低速（远小于光速）的范围内讨论问题的，所以，牛顿力学仍然有效，它是本学科最基本的基础。对本书要论述的线性弹性力学，还要作如下一些假设。

**1. 连续性假设**

弹性力学作为连续介质力学的一个分支，把所研究的物体假设成连续且没有任何空隙的连续介质。定义在这一连续介质上的所有物理量（如应力、位移和应变等）除在某些点、线或面上外是连续的。事实上，在本书后面的论述中，还会假设有关物理量不仅连续而且可导甚至高阶可导。有了这些假定之后，就可以利用数学中的极限、微积分和微分方程等强有力的工具来研究弹性力学。

连续性假设与物体的真实情况当然不符。实际物体是由大量原子组成的，弹性力学不考察物体中个别粒子的运动轨迹，而是研究这些粒子的宏观力学行为，即某种平均效应。可以想见，只要物体的尺寸比原子的尺寸大得多，则连续性假设就足够精确。因此，要理解在本课程中所讲的微元体或物质点，事实上包含了大量的原子。

**2. 线性弹性假设**

一块物体或介质，如果引起它变形的外力取消后能恢复到它原来的形状和大小，则就称它为弹性物体或弹性介质。弹性力学就是研究这种弹性介质的力学问题的。在本书所处理的线性弹性力学中还要假设应力和应变之间存在线性关系，即一个是另一个的线性函数。这种应力和应变之间的线性关系称为胡克（Hooke）定律。真实材料的特性不一定符合胡克定律。但是对大多数真实固体来讲，只要变形小到一定程度，材料特性就非常接近胡克定律，所以，胡克定律是实际材料特性的一个近似模型。

**3. 小变形假设**

假设物体在外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸。这个假设可使所考虑的问题大为简化。如在考虑平衡条件时，可以不计物体尺寸和位置的变化，在应变的表达式中可以略去位移的二次项。

上述三条假设是线性弹性理论的基本假设，缺一不可，在这些假设的基础上导出的微分方程都是线性的。值得注意的是，不能随便地把线性弹性理论中得到的结果用到上述假设不成立的问题中去。

除了上述三条假设之外，在本书所处理的大多数问题中，如无特别声明，还会进一步作如下假设。

**4. 无初应力假设**

假设物体在受到外界因素作用之前，物体处于无应力状态。也就是说，由弹性理论求得的应力是由荷载作用、温度变化等外界因素引起的。初应力的分布和大小是

和物体成形的历史有关的。如果物体中有初应力，则只要把初应力和由弹性理论求得的应力进行叠加就可得到真实的应力。

**5. 均匀性假设**

假设材料特性是处处相同的，即材料是均匀的。有些材料在宏观意义上也是不均匀的，如混凝土等，但是，如果所研究物体的尺寸比这种不均匀性的特征尺寸大得多，则也可作为均匀材料来处理。对于均匀物体，应力与应变线性关系中的系数是常数，它们与空间位置无关，即与坐标的平移无关。

**6. 各向同性假设**

假设物体内任一点处的材料性质沿各个方向都相同。因此，坐标系的转动不会改变应力应变线性关系中的系数的大小。如木材等不是各向同性的，这种材料称为各向异性材料。晶体也是各向异性的。如钢材等是多晶金属材料，由大量晶体杂乱无章排列组成，所以，钢材等多晶金属在宏观上是各向同性的。

仅根据上述假设来研究物体中的应力、位移、应变的弹性力学称为数学弹性力学。如果在上述假设之外，再引进有关应力分布和变形的补充假设，则相应的弹性力学称为应用弹性力学。如薄板壳理论就属于应用弹性力学的内容。

# 2 张量基础知识

物理规律可用不同的数学方法描述。用张量表示物理量及其满足的基本方程具有形式简洁和统一、物理意义明确的特点，更重要的是还能清楚地反映出物理规律的客观性，即和坐标系的选择无关。因此，张量已成为研究理论物理和连续介质力学的重要工具。

本章将简单介绍三维空间中的张量，并且只使用直角坐标系。假定读者已熟悉矢量的有关运算。

## 2.1 坐标系和矢量

在空间中取一个直角坐标系 $Oxyz$，如无特别说明，总是假定为右手系。为简单起见，用 $x_1$，$x_2$ 和 $x_3$ 分别代替 $x$，$y$ 和 $z$，如图 2.1 所示。任一坐标用 $x_i(i=1,2,3)$来表示。对三维问题，下标用拉丁字母表示，其取值范围为 1，2 和 3。对二维问题，下标用希腊字母表示，其取值范围为 1 和 2。空间中 $P$ 点的坐标为$(x,y,z)$，现在可记成$(x_1,x_2,x_3)$，或简单地就说 $P$ 点的坐标为 $x_i$。

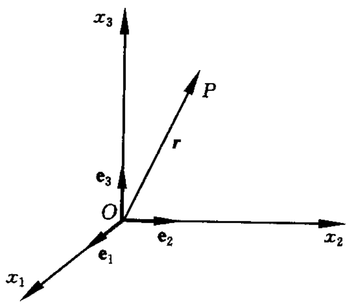

图 2.1

沿坐标轴 $x_i$ 的正方向取单位基矢量 $\mathbf{e}_i$，则任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 可表示成

$$\boldsymbol{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3=u_i\mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

式(2.1)中用了爱因斯坦(Einstein)求和约定：同一项中如有两个相同的字母下标，则这一对下标被称为哑标，表示该项要对哑标在取值范围内求和。在哑标求和时，要特别注意拉丁字母下标和希腊字母下标的取值范围是不同的。

从原点 $O$ 到 $P$ 点的矢量$\overrightarrow{OP}$称为 $P$ 点的矢径，用 $\boldsymbol{r}$ 表示。若 $P$ 点的坐标为 $x_i$，则

$$\boldsymbol{r}=x_i\mathbf{e}_i \tag{2.2}$$

由于 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 是三个相互正交的单位矢量，根据两个矢量标量积(即点积)的定义可知

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ i=j;\\ 0, & 当\ i\neq j。\end{cases} \tag{2.3}$$

其中，$\delta_{ij}$ 称为 Kronecker delta 符号。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积可用分量表示成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\mathbf{e}_i\cdot b_j\mathbf{e}_j=a_ib_j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i \tag{2.4}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模(大小)为 $a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_ia_i}$。

定义置换符号(permutation symbol)如下

$$e_{ijk}=\begin{cases}1, & 当\ i,j,k\ 为顺序排列;\\ -1, & 当\ i,j,k\ 为逆序排列;\\ 0, & 当指标中有两个相等。\end{cases} \tag{2.5}$$

如 $e_{123}=e_{312}=e_{231}=1,e_{213}=e_{321}=e_{132}=-1,e_{112}=e_{111}=0$ 等。

根据叉积(矢积)的定义,得

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=e_{ijk}\mathbf{e}_k \tag{2.6}$$

$$e_{ijk}=e_{ijl}\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_k=(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{e}_k=(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j=(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{e}_i \tag{2.7}$$

任意两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积为

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

$$=(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{e}_1+(u_3v_1-u_1v_3)\mathbf{e}_2+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{e}_3 \tag{2.8a}$$

式(2.8a)也可以写成

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=u_i\mathbf{e}_i\times v_j\mathbf{e}_j=u_iv_j\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=u_iv_je_{ijk}\mathbf{e}_k \tag{2.8b}$$

应该注意的是,叉积运算不满足交换律,事实上

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$$

三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的混合积是

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_ib_jc_ke_{ijk}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{2.9}$$

三个矢量混合积的大小等于以这三个矢量为共点棱的平行六面体的体积。若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成右手系,则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$为正,否则为负。

下面讨论 $e_{ijk}$ 和 $\delta_{ij}$ 之间的关系。首先来证明

$$e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix} \tag{2.10}$$

若 $i,j,k$ 三个指标中有两个相等，则显然式(2.10)两边都为零；$l,m,n$ 中有两个相等时，式(2.10)两边也都为零。故在这两种情况式(2.10)都成立。下面假定 $i,j,k$ 是三个两两互不相等的指标，$l,m,n$ 也是三个两两互不相等的指标。式(2.10)右边的行列式可看成是由下面的行列式通过交换行的次序和交换列的次序得到的：

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=1=e_{123}e_{123} \tag{a}$$

我们知道，交换行列式中某两行的位置，行列式的大小不变，但改变符号，这与交换 $e_{123}$ 的某两个指标时的性质一致。故从式(a)可得到

$$\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}=e_{ijk}e_{123} \tag{b}$$

同样，交换行列式中某两列的位置和交换 $e_{123}$ 的某两个指标时的符号改变一致。故从式(b)可得式(2.10)。

从式(2.10)得

$$e_{ijk}e_{rsk}=\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{ik}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jk}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kk}\end{vmatrix}=\delta_{ik}\begin{vmatrix}\delta_{jr} & \delta_{js}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks}\end{vmatrix}-\delta_{jk}\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks}\end{vmatrix}+\delta_{kk}\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{jr} & \delta_{js}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{jr} & \delta_{js}\\ \delta_{ir} & \delta_{is}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{jr} & \delta_{js}\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{jr} & \delta_{js}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{jr} & \delta_{js}\end{vmatrix}=\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}$$

即

$$e_{ijk}e_{rsk}=\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr} \tag{2.11}$$

式(2.11)在矢量运算中是非常有用的，所以，很容易得到

$$e_{ijk}e_{rjk}=\delta_{ir}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jr}=3\delta_{ir}-\delta_{ir}=2\delta_{ir} \tag{2.12}$$

$$e_{ijk}e_{ijk}=2\delta_{ii}=6 \tag{2.13}$$

现在，利用式(2.11)来讨论二重矢积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=a_i\mathbf{e}_i\times(b_j\mathbf{e}_j\times c_k\mathbf{e}_k)=a_i\mathbf{e}_i\times b_jc_ke_{jkt}\mathbf{e}_t\\ &=a_ib_jc_ke_{jkt}e_{its}\mathbf{e}_s=-a_ib_jc_ke_{jkt}e_{ist}\mathbf{e}_s=-a_ib_jc_k(\delta_{ji}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{ki})\mathbf{e}_s\\ &=a_ic_ib_s\mathbf{e}_s-a_ib_ic_s\mathbf{e}_s=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{2.14}$$

下面考虑坐标变换问题。固定原点 $O$，把原坐标系转动到新的位置，得一新的直角坐标系 $Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$，其对应的单位基矢量为 $\mathbf{e}_{i'}$，如图 2.2 所示。新的基矢量 $\mathbf{e}_{i'}$ 可用老的基矢量 $\mathbf{e}_i$ 表示，老的基矢量 $\mathbf{e}_i$ 也可用新的基矢量 $\mathbf{e}_{i'}$ 表示，即

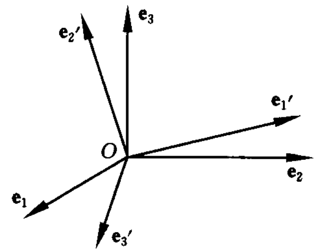

图 2.2

$$\mathbf{e}_{i'}=\beta_{i'k}\mathbf{e}_k,\quad \mathbf{e}_i=\beta_{j'i}\mathbf{e}_{j'} \tag{2.15}$$

用 $\mathbf{e}_j$ 点积上面第一式的两边，得

$$\beta_{i'j}=\mathbf{e}_{i'}\cdot\mathbf{e}_j \tag{2.16}$$

由于 $\mathbf{e}_{i'}$ 和 $\mathbf{e}_j$ 都是单位矢量，所以，$\beta_{i'j}$ 是 $\mathbf{e}_{i'}$ 和 $\mathbf{e}_j$ 之间夹角的余弦。称 $\beta_{i'j}$ 为变换系数。当然，也可从式(2.15)中的第二式导出式(2.16)。

由于 $\mathbf{e}_{i'}$ 是单位正交基，$\mathbf{e}_i$ 也是单位正交基，故有

$$\delta_{i'j'}=\mathbf{e}_{i'}\cdot\mathbf{e}_{j'}=\beta_{i'k}\mathbf{e}_k\cdot\beta_{j't}\mathbf{e}_t=\beta_{i'k}\beta_{j'k}$$

$$\delta_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\beta_{k'i}\mathbf{e}_{k'}\cdot\beta_{t'j}\mathbf{e}_{t'}=\beta_{k'i}\beta_{k'j}$$

即

$$\beta_{i'k}\beta_{j'k}=\delta_{i'j'},\quad \beta_{k'i}\beta_{k'j}=\delta_{ij} \tag{2.17}$$

任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 既可用旧坐标系中的分量表示，也可用新坐标系中的分量表示，即

$$\boldsymbol{u}=u_i\mathbf{e}_i=u_{i'}\mathbf{e}_{i'}$$

利用式(2.15)，从上式可得

$$u_i\mathbf{e}_i=u_i\beta_{j'i}\mathbf{e}_{j'}=u_{j'}\mathbf{e}_{j'},\quad u_{i'}\mathbf{e}_{i'}=u_{i'}\beta_{i'j}\mathbf{e}_j=u_j\mathbf{e}_j$$

即

$$u_{j'}=\beta_{j'i}u_i,\quad u_j=\beta_{i'j}u_{i'} \tag{2.18}$$

当坐标系选定之后，一个矢量 $\mathbf{e}$ 完全由它的三个分量 $u_i$ 确定，当坐标系变换时，这些分量必须按式(2.18)变换。因此，可以给出矢量的新定义：在给定的坐标系中，有三个数 $u_i(i=1,2,3)$，在坐标变换时，按式(2.18)中的第一式变换成新的三个数，则这三个数作为一个有序整体称为一个矢量。有时常简单地把 $u_i$ 叫做矢量。

最后需强调的是，矢量的分量 $u_i$ 随坐标系而变，但矢量 $\boldsymbol{u}$ 本身与坐标系无关。

## 2.2 张量的定义

本节将推广矢量的概念，给出张量的定义。

如果在空间任一组基 $\mathbf{e}_i$ 下，有用 $n$ 个指标编号的 $3^n$ 个数 $T_{i_1i_2\cdots i_n}$，当基矢量按 $\mathbf{e}_{i'}$

$=\beta_{i'i}\mathbf{e}_i$ 变换成 $\mathbf{e}_{i'}$ 时，$3^n$ 个数 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 按如下规律变换：

$$T_{i'_1 i'_2 \cdots i'_n}=\beta_{i'_1 i_1}\beta_{i'_2 i_2}\cdots\beta_{i'_n i_n}T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \tag{2.19}$$

那么，就称 $3^n$ 个数 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 的有序集合为一个 $n$ 阶张量。称 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 为对应基下的张量分量，有时也简单地称 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 为 $n$ 阶张量。

按上述张量的定义，显然，零阶张量就是标量，标量是一个不随坐标变换而变的不变量；一阶张量就是矢量。一个矢量的某一分量不是标量，因为它会随坐标系的变换而变化。

在 2.1 节里，我们用了三种符号表示矢量。第一种，直接用一个黑体字母表示一个矢量，这种表示法叫做不变性记法（或叫抽象记法、直接记法），它的特点是与坐标系无关；第二种，用基矢量的线性组合来表示矢量（如式(2.1)）；第三种，用矢量的三个分量表示矢量。对一般的张量，我们也可用这三种表示方法。分量记法已经在定义中叙述过了。用一个黑体字母（如 $\boldsymbol{T}$）表示一个张量就是直接记法。最后，一种表示方法叫做并矢记法，一个 $n$ 阶张量可表示成

$$\boldsymbol{T}=T_{i_1 i_2 \cdots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n} \tag{2.20}$$

其中，$\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n}$ 表示把 $n$ 个基矢量并写在一起，称之为基张量，这种基张量共有 $3^n$ 个。一个二阶张量可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=T_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\\&=T_{11}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+T_{12}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+T_{13}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3\\&\quad+T_{21}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1+T_{22}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+T_{23}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3\\&\quad+T_{31}\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1+T_{32}\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2+T_{33}\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

二阶的基张量有九个。需要指出的是，若 $i\neq j$，则 $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\neq\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i$。

现在，给出张量的另一个定义。在某一坐标系中，某一个量 $\boldsymbol{T}$ 可表示成式(2.20)的形式，则就称 $\boldsymbol{T}$ 是一个 $n$ 阶张量。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=T_{i_1 i_2 \cdots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n}\\&=T_{i_1 i_2 \cdots i_n}\beta_{i'_1 i_1}\mathbf{e}_{i'_1}\otimes\cdots\beta_{i'_2 i_2}\mathbf{e}_{i'_2}\otimes\cdots\otimes\beta_{i'_n i_n}\mathbf{e}_{i'_n}\\&=\beta_{i'_1 i_1}\beta_{i'_2 i_2}\cdots\beta_{i'_n i_n}T_{i_1 i_2 \cdots i_n}\mathbf{e}_{i'_1}\otimes\mathbf{e}_{i'_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i'_n}\\&=T_{i'_2 i'_2 \cdots i'_n}\mathbf{e}_{i'_1}\otimes\mathbf{e}_{i'_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i'_n}\end{aligned}$$

比较上式中最后一个等号的两边，就可得到式(2.19)。由此可见，两个定义是等价的。从上式也可看出，与分量记法相比，并矢记法能更清楚地反映出张量的客观性。虽然一个张量的分量随坐标系的变化而变化，但是，张量本身是不随坐标系变

化的。

若在一个坐标系中，某一张量的所有分量都为零，则由式(2.19)可知，在其他任何坐标系中，这一张量的所有分量也为零，这种张量称为零张量，用 **0** 表示。

**例 1** 证明 $e_{ijk}$ 是一个三阶张量(称此张量为置换张量)。

**证**：根据式(2.7)，有

$$e_{i'j'k'} = \mathbf{e}_{i'} \cdot (\mathbf{e}_{j'} \times \mathbf{e}_{k'}) = \beta_{i'i}\mathbf{e}_i \cdot (\beta_{j'j}\mathbf{e}_j \times \beta_{k'k}\mathbf{e}_k)$$

$$= \beta_{i'i}\beta_{j'j}\beta_{k'k}\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \beta_{i'i}\beta_{j'j}\beta_{k'k}e_{ijk}$$

满足变换规律式(2.19)，即 $e_{ijk}$ 是一个三阶张量。

**例 2** $a_i$ 和 $b_i$ 是两个任意矢量，$\phi = \varphi_{ij}a_ib_j$ 是标量。证明 $\varphi_{ij}$ 是一个二阶张量。

**证**：由于 $\phi$ 是一个标量，即坐标变换时的不变量，故

$$\phi = \varphi_{ij}a_ib_j = \varphi_{ij}(\beta_{i'i}a_{i'})(\beta_{j'j}b_{j'}) = \beta_{i'i}\beta_{j'j}\varphi_{ij}a_{i'}b_{j'} = \varphi_{i'j'}a_{i'}b_{j'}$$

又因为 $a_i$ 和 $b_i$ 是任意的，从上式可得

$$\varphi_{i'j'} = \beta_{i'i}\beta_{j'j}\varphi_{ij}$$

所以，$\varphi_{ij}$ 是一个二阶张量。

## 2.3 张量代数

### 1. 张量的线性组合

同阶的张量可以进行线性组合运算，其结果仍为同阶张量。例如，$A_{ij}$ 和 $B_{ij}$ 为两个二阶张量，$\alpha$ 和 $\beta$ 为两个标量，则

$$C_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta B_{ij} \tag{2.21}$$

为一个二阶张量。事实上

$$C_{i'j'} = \alpha A_{i'j'} + \beta B_{i'j'} = \alpha\beta_{i'i}\beta_{j'j}A_{ij} + \beta\beta_{i'i}\beta_{j'j}B_{ij}$$

$$= \beta_{i'i}\beta_{j'j}(\alpha A_{ij} + \beta B_{ij}) = \beta_{i'i}\beta_{j'j}C_{ij}$$

式(2.21)也可以写成 $\boldsymbol{C} = C_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B} = (\alpha A_{ij} + \beta B_{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$。

张量的线性组合满足加法交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，数乘分配律 $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$，$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$，结合律 $(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\alpha(\beta\boldsymbol{A})$。

### 2. 缩并

在张量的并矢记法中，对某两个基矢量进行点积，则原张量降低两阶成为一个新的张量。如 $\boldsymbol{A} = A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$，对指标 $j$ 和 $l$ 缩并(即对 $\mathbf{e}_j$ 和 $\mathbf{e}_l$ 进行点积)后得

$$A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l = A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k\delta_{jl} = A_{ijkj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \tag{2.22}$$