GAODENG SHUXUE JIETI FANGFA YU JIQIAO

# 高等数学解题方法与技巧

陈玲 编著

武汉工业大学出版社

GAODENG SHUXUE JIETI FANGFA YU JIQIAO

# 高等数学解题方法与技巧

陈 玲 编著

武汉工业大学出版社

鄂新登字 13 号

高等数学解题方法与技巧
©陈　玲　编著
*
武汉工业大学出版社出版
(武汉市洪山区珞狮路 14 号,邮政编码 430070)
武汉长江印刷公司印刷
开本:850×1168　1/32　印张:12.25　字数:300 千
1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—5000 册
ISBN 7—5629—0872—9/O·41

## 内 容 提 要

本书是为配合大学生深入学习《高等数学》和研究生入学考试《高等数学》，拓宽思路和提高解题技巧而编写的参考读物和学习指导书。本书共分十二章，与同济大学数学教研室主编的《高等数学》各章的内容同步。本书取材广泛，题型多样，一题多解，着力于解题分析，既有对常见错误解法的剖析，又提供灵活的解题技巧和解题规律的小结等。

本书适用于工科院校各专业的学生，文、理科如经贸、物理、化学等专业的学生。对科技工作者亦有参考价值。

# 序　言

《高等数学》是现代科学技术发展的基础，是各高等院校必修的最重要的基础课之一，它不仅为大学生学习物理、化学等基础课程提供必备的数学基本知识和方法，而且也为大学生学习专业基础课程和专业课程以及现代计算机课程提供所需的数学基本知识和方法，此外，更重要的是，大学生通过《高等数学》学习，可以在数学思维能力方面得到进一步培养，并为今后从事各项工作奠定良好的基础。

学习《高等数学》的行之有效的途径是在掌握它的基本概念和基本理论的基础上，不断提高基本运算能力和解题方法与技巧。大学生通过大量运算和解题，可以进一步拓宽视野，加深对基本概念和基本理论的理解，并提高分析问题和解决问题的能力。本书正是编者为了配合大学生深入学习《高等数学》和研究生入学考试《高等数学》拓宽解题思路和提高解题技巧而编写的参考读物和学习指导书，并取名为《高等数学解题方法与技巧》。

《高等数学解题方法与技巧》的各章内容与《高等数学》教材的内容是完全相呼应和相配合的，它通过精选的典型例题，特别是对于难度较大的例题，提供了详尽的分析方法和解算技巧，有助于大学生和报考硕士研究生在学习和复习《高等数学》课程中掌握重点，开阔解题思路。

《高等数学解题方法与技巧》的主要内容，编者曾在武汉工业大学学生报考 1992 年硕士研究生的《高等数学》讲座中讲述过，还曾在 1992 年湖北省高等院校《高等数学》联考前对武汉工业大学各班选拔的优等生举办的《高等数学》讲座中讲述过，反映效果很好。

编者从事《高等数学》课程教学 40 年，还先后为大学生、硕士研究生以及中青年教师讲授过《线性代数》、《概率论与数理统计》、《积分变换》、《向量分析》、《场论》、《复变函数》、《数学物理方法》、《计算

方法》、《随机过程》等数学课程和讲座，积累了丰富的教学经验和大量的解题资料，现在编者将其奉献出来，撰写成本书，这是十分难能可贵的。相信本书的出版，必将帮助广大读者提高分析问题和解决问题的能力，成为读者的良师益友。

曹钟灵

1993 年 12 月于武汉

# 前　言

《高等数学解题方法与技巧》是为配合大学生深入学习《高等数学》和研究生入学考试《高等数学》，拓宽解题思路和提高解题技巧而编写的参考读物和学习指导书。

本书共分十二章，与高等院校教材《高等数学》(同济大学数学教研室主编)的各章内容相呼应和相配合。

本书最突出的是，通过大量精选的典型范例，抓住了各章内容的主要问题，进行了深入的剖析，既使大学生复习和深化了《高等数学》课程中的难点和重点内容，又使大学生更好地全面地掌握了《高等数学》课程的知识块和基本要求。

本书的主要特点是：(1)大量精选的典型范例，取材广泛，题型多样，一题多解，富有启发，开拓思路；(2)本书着力于解题分析，指明关键所在，对常见的错误解法进行了剖析，并从正反两方面进行了比较，有助于加深大学生对《高等数学》的基本概念和基本理论的理解，提高解题能力；(3)本书提供了灵活的解题技巧，对解题的技巧和规律进行了归纳小结，有助于大学生掌握较系统和完整的解题方法；(4)本书叙述简明易懂，便于自学。

本书可作为高等院校，特别是工科院校大学生深入学习《高等数学》的学习指导书；对报考工科硕士研究生进行复习《高等数学》可作为复习指南；对从事工科院校讲授《高等数学》课程的教师，本书也可用做教学参考书。

鉴于编写时间仓促和限于编者的水平，错误和不当之处在所难免，敬请各位学者、专家和读者批评指正。

编者

1993年12月于武汉

# 目　录

# 第一章　函数与极限

本章分三部分：一、函数；二、极限及其求法；三、函数的连续性。

## 一、函数

函数是高等数学研究的对象，学好高等数学必须掌握好作为它的基础知识的函数。

几点说明：

1. 函数三要素：(1)自变量的变化范围即函数定义域；(2)因变量与自变量的对应关系即对应法则；(3)因变量的取值范围即函数的值域。

2. 直接函数 $y=f(x)$和反函数 $y=\varphi(x)$的图形，在同一坐标平面上关于直线 $y=x$ 是对称的。

3. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，如 $y=\arcsin x$和 $u=\sqrt{2+x^2}$就不能复合成一个复合函数。

4. 求由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，关键是分析清楚中间变量 $u=\varphi(x)$的函数值在 $y=f(u)$的定义域中的分布状况，有时用画 $u=\varphi(x)$的图形的方法，易于达到目的。

5. 周期函数的定义域不一定是无限区间$(-\infty,+\infty)$，如 $y=\sqrt{\sin x}$是周期为 $2\pi$ 的周期函数，其定义域是 $D=[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$。

6. 不能说分段函数一定不是初等函数，如 $f(x)=\sqrt{x^2}$是初等函数，但常写成分段函数的形式：$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0,\\ -x, & 当\ x<0。\end{cases}$

**例 1**　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg \frac{x^2+3x}{4}}$；　(2) $y=\arcsin \frac{3x-8}{5}+\sqrt{\sin x}$。

**解**　(1)须 $\lg \frac{x^2+3x}{4}\geqslant 0$，故须 $\frac{x^2+3x}{4}\geqslant 1$，即 $x^2+3x-4\geqslant 0$，$(x+4)(x-1)\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases}x+4\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+4\leqslant 0\\x-1\leqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geqslant -4\\x\geqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant -4\\x\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -4$，得定义域 $(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$，上述不等式的解亦可列表求得，令 $f(x)=(x+4)(x-1)$，

| $x$ | $(-\infty,-4)$ | $-4$ | $(-4,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

可知 $(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$ 为所求的定义域。

(2)对于 $\arcsin \frac{3x-8}{5}$，须 $-1\leqslant \frac{3x-8}{5}\leqslant 1$，对于 $\sqrt{\sin x}$，须 $\sin x\geqslant 0 \Rightarrow 2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

故 $\begin{cases}-1\leqslant \frac{3x-8}{5}\leqslant 1,\\2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}1\leqslant x\leqslant \frac{13}{3},\\2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$

$\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant \pi$，得定义域 $[1,\pi]$。

**注**　1°求定义域时注意某些运算对函数的限制：在分式中分母不能是零；在根式中负数不能开偶次方；在对数中真数不能为负数或0；在反三角函数中，要符合反三角函数的定义域。

2°求复合函数的定义域须结合1°，由外层依次向内层推算。

**例2**　设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x, x\neq 0,1$，求 $f(x)$。

**解**　令　$t=\frac{x-1}{x}$，故 $x=\frac{1}{1-t}$，得 $f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t}\cdots(1)$，再令 $t=\frac{1}{1-u}$，故 $\frac{1}{1-t}=\frac{u-1}{u}$，由(1)得

$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2u-2}{u}\cdots(2)$，再将(1)、(2)依次改写如下：

$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x}\cdots(3)$，

$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-\frac{2}{x}\cdots(4)$，将原式与(3)相加，再减去(4)得，$f(x)=x+\frac{1}{1-x}-1+\frac{1}{x}$。

**注** 针对性的将原式变形是上述解法的特点。

**例 3** 设 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-\cos x$，将 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ 表示为 $\cos x$ 的函数。

**解** $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1+2\sin^2\frac{x}{2}=3-2\cos^2\frac{x}{2}$，

故 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=3-2\sin^2\frac{x}{2}=3-(1-\cos x)=2+\cos x$。

**另解** 
$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=f\left(\cos\frac{\pi-x}{2}\right)$$
$$=2-\cos(\pi-x)=2+\cos x。$$

**注** 上述两种解法的出发点不一样，其核心仍是“变形”。

**例 4** 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。

**解** $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，要 $\varphi(x)\geqslant0$，必须 $\ln(1-x)\geqslant0$，得 $1-x\geqslant1$ 即 $x\leqslant0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为 $x\leqslant0$。

**例 5** 设 $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\ (0\leqslant x\leqslant2\pi)$，试写出将 $f(x)$ 的定义域扩大到 $(-\infty,+\infty)$，使之成为以 $2\pi$ 为周期的偶函数的表达式。

**解** 因为 $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant2\pi)$，故所求函数的表达式为 $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|\ (-\infty<x<+\infty)$，它是以 $2\pi$ 为周期的偶函数，在 $[0,2\pi]$ 上重合于 $f(x)$。

**例 6** 将复合函数 $y=\left[\frac{1-(1+x^2)^3}{1+(1+x^2)^3}\right]^2$，拆成几个简单函数。

**解** 由函数的结构形式可拆成下面四个简单函数 $y=u^4$，$u=\dfrac{1-v}{1+v}$，$v=w^3$，$w=1+x^2$。

**例 7** 设 $f(x)=\ln|x|$，$(x\neq 0)$，$\varphi(x)=x^2-2$，$(|x|>1)$，求 $f[\varphi(x)]$。

**解法 1** 因为 $\varphi(x)=x^2-2(|x|>1)$，故当 $|x|>1$ 时，$-1<\varphi(x)=x^2-2$，若 $\varphi(x)=0$，则 $x=\pm\sqrt{2}$，根据 $f(x)=\ln|x|(x\neq 0)$，故 $f[\varphi(x)]$的定义域应为 $|x|>1$，且 $x\neq\pm\sqrt{2}$，得

$f[\varphi(x)]=\ln|x^2-2|(|x|>\sqrt{2}$ 或 $1<|x|<\sqrt{2})$。

**注** 求复合函数须要确定其定义域，为此必须弄清中间变量的值域在外层函数定义域中的分布状况。

**解法 2** 作 $u=\varphi(x)$的图形，由图 1-1 易知，$x=\pm\sqrt{2}$ 时，$u=0$，故 $f[\varphi(x)]=\ln|x^2-2|$，其定义域 $D=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。

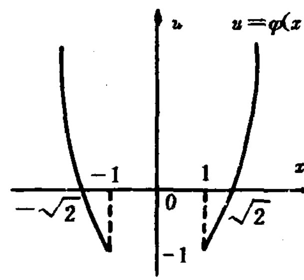

图 1-1

**例 8** 设 $f(x)$的定义域是$(0,1)$，求(1)$f(\sin 2x)$的定义域；(2)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域。

**解** (1)因为 $0<\sin 2x<1$，所以 $2k\pi<2x<(2k+1)\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，故 $k\pi<x<(2k+1)\pi/2$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，所以，$f(\sin 2x)$的定义域 $D=\{x|k\pi<x<(2k+1)\pi/2,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,x\in z\}$。

(2) $$\begin{cases}0<x+a<1\\0<x-a<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a<x<1-a\\a<x<1+a\end{cases}$$

讨论：1°若 $1-a\leqslant a$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，此时函数 $f(x+a)$与 $f(x-a)$的定义域无公共部分，故 $f(x+a)+f(x-a)$非函数，则无定义域。

$2^\circ$若 $1-a>a$，即 $a<\frac{1}{2}$，此时函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域有公共部分 $(a,1-a)$，即为所求函数的定义域。

**例 9** 设 $f(x)=\begin{cases}2x, 0<x\leqslant 1,\\ x^2, 1<x\leqslant 2。\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

**解** 因为当 $0<\ln x\leqslant 1$ 时，$1<x\leqslant e$，当 $1<\ln x\leqslant 2$ 时，$e<x\leqslant e^2$，所以 $f[g(x)]=\begin{cases}2\ln x, 1<x\leqslant e,\\ (\ln x)^2, e<x\leqslant e^2,\end{cases}$ $g[f(x)]=\ln f(x)=\begin{cases}\ln(2x), 0<x\leqslant 1,\\ 2\ln x, 1<x\leqslant 2。\end{cases}$

**例 10** 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, |x|\leqslant 1,\\ 2, \quad |x|>1。\end{cases}$ 求 $\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$。

**分析** 若复合函数是由两个分段函数复合而成的，那么求它的关键在于分清中间变量的值域在外层函数定义域中的分布状况。

**解** 先讨论 $\varphi[\psi(x)]$，由 $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, |x|\leqslant 1,\\ 2, \quad |x|>1\end{cases}$ 知，

(1)当 $|x|\leqslant 1$ 时，$1\leqslant\psi(x)=2-x^2\leqslant 2$，又若 $|x|=1$ 时，$\psi(\pm 1)=1$，故 $\varphi[\psi(\pm 1)]=1$，若 $|x|<1$ 时，$\psi(x)>1$，故 $\varphi[\psi(x)]=0$；

(2)当 $|x|>1$ 时，$\psi(x)=2$，$\varphi[\psi(x)]=0$。

综合(1)与(2)，故 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |x|=1,\\ 0, |x|\neq 1。\end{cases}$

再讨论 $\psi[\varphi(x)]$，由 $\varphi(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1\end{cases}$ 知，当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)=1$，$\psi[\varphi(x)]=\psi(1)=1$；当 $|x|>1$ 时，$\varphi(x)=0$，$\psi[\varphi(x)]=\psi(0)=2$，故 $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 2, |x|>1。\end{cases}$

**另解** 先讨论 $\varphi[\psi(x)]$，记 $\varphi(u)=\begin{cases}1, |u|\leqslant 1,\\ 0, |u|>1,\end{cases}$ $u=\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, |x|\leqslant 1,\\ 2, |x|>1,\end{cases}$ 画 $u=\psi(x)$ 的图形，由图 1-2 得知 $\varphi[\psi(x)]=$

$\begin{cases}1, & |x|=1, \\ 0, & |x|\neq 1。\end{cases}$

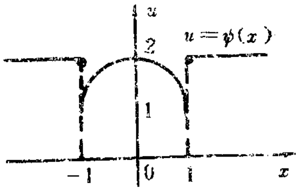


图 1-2

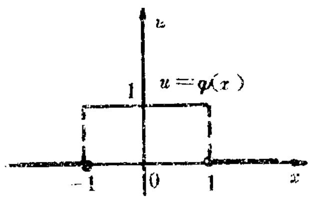


图 1-3

再讨论 $\psi[\varphi(x)]$，记 $\psi(u)=\begin{cases}2-u^2, & |u|\leqslant 1, \\ 2, & |u|>1,\end{cases}$ $u=\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1。\end{cases}$ 画 $u=\varphi(x)$ 的图形由图 1-3 得知 $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1, \\ 2, & |x|>1。\end{cases}$

**例 11** 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}_{n个f}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$。

**解** $f_2(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+x^2)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，今设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则有 $f_{k+1}(x)=\dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\dfrac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+kx^2)}}$ $=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$。故由数学归纳法知，当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ 成立。

**例 12** 设 $G(x)=\begin{cases}0, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0。\end{cases}$ 求 $y=G(x)-G(x-1)$。

**解** 因为 $G(x)=\begin{cases}0, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 故 $G(x-1)=\begin{cases}0, & x<1, \\ 1, & x\geqslant 1。\end{cases}$ (1) 当 $x<0$

时，$G(x)-G(x-1)=0$；(2)当 $0\leqslant x<1$ 时，$G(x)-G(x-1)=1$，(3)当 $x\geqslant 1$ 时，$G(x)-G(x-1)=0$，

得 $y=G(x)-G(x-1)=\begin{cases}0, & <0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1。\end{cases}$

**例 13** 证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和的形式，且这种表示式是唯一的。

**证** $H(x)\xlongequal{\triangle}[f(x)+f(-x)]/2$，$G(x)\xlongequal{\triangle}[f(x)-f(-x)]/2$，因为又 $H(-x)=[f(-x)+f(x)]/2=H(x)$，$G(-x)=[f(-x)-f(x)]/2=-G(x)$，故在 $(-l,l)$ 内，$H(x)$ 为偶函数，$G(x)$ 为奇函数，$f(x)=[f(x)+f(-x)]/2+[f(x)-f(-x)]/2=H(x)+G(x)$，故 $f(x)$ 可在 $(-l,l)$ 内表示成一个偶函数与一个奇函数之和的形式。若还有偶函数 $H_1(x)$，奇函数 $G_1(x)$，使 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$，则有 $H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x)$，以 $-x$ 代入上式，又得 $H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$，故可得 $H(x)=H_1(x)$，$G(x)=G_1(x)$，从而证得这种表达式是唯一的。

**例 14** 证明任何函数 $f(x)$ 都能表示成两个非负函数之差。

**证** 对于任意一个函数 $f(x)$，令 $f_+(x)=(|f(x)|+f(x))/2$，$f_-(x)=(|f(x)|-f(x))/2$，则显然 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$ 都是非负函数，而且 $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$。

**例 15** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$ 且对于任何 $x$ 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$。(1)试用 $a$ 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；(2)问 $a$ 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

**解** 已知 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x+2)-f(x)=f(2)$，$f(1)=a$，所以 $f(-1)=-a$。

(1)当 $x=-1$ 时，$f(1)-f(-1)=f(2)$，故 $f(2)=a-(-a)=2a$；当 $x=3$ 时，$f(5)-f(3)=f(2)$；当 $x=1$ 时，$f(3)-f(1)=f(2)$；上面两式相加得 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$。

(2)当且仅当 $f(2)=0$ 时，$f(x+2)=f(x)$，此时 $a=0$，故 $a=0$