

巢纪平 著

热带大气和 海洋动力学

 气象出版社
China Meteorological Press

“十一五”国家重点图书

巢纪平 著

热带大气和海洋动力学

图书在版编目 (CIP) 数据

热带大气和海洋动力学/巢纪平著. —北京:气象出版社, 2009. 8

ISBN 978-7-5029-4724-8

I. 热… II. 巢… III. ①热带-气象学②热带-海洋动力学 IV. P444 P731.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 031675 号

热带大气和海洋动力学

Redai Daqi he Haiyang Donglixue

出版发行: 气象出版社

地 址: 北京市海淀区中关村南大街 46 号

邮 编: 100081

网 址: <http://www.cmp.cma.gov.cn>

E-mail: qxcbs@263.net

电 话: 总编室 010-68407112 发行部 010-68409198

责任编辑: 郭彩丽 张 斌

终 审: 黄润恒

封面设计: 王 伟

责任技编: 刘祥玉

责任校对: 时 人

印 刷 者: 北京中新伟业印刷有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 29

字 数: 620 千字

版 次: 2009 年 8 月第 1 版

印 次: 2009 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 100.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等, 请与本社发行部联系调换

内容简介

本书对近代热带大尺度大气和海洋动力学研究作了较为系统的总结，为深入研究厄尔尼诺-南方涛动（ENSO）动力学提供了深层次的基础知识。

第1章是赤道运动的动力学基础，着重介绍两个方面的基本问题。一方面从斜压三维赤道 β 平面方程入手，以更普遍的方法引出赤道运动中最重要运动形式之一——松野（Matsuno）波系，并给出各个波分量的控制方程。这是研究赤道运动最重要的基础知识。另一方面是主要针对大气运动的，从尺度分析入手建立各种时间和空间尺度运动的控制方程，讨论了在不同条件下的准平衡态动力学。

第2章讨论热带运动的半地转适应和发展过程理论，这是对经典中纬度地转适应和发展过程理论的拓展。纬圈半地转平衡的建立，实际上为熟知的吉尔（Gill）长波近似提供了理论基础。低频近似是新内容。

第3章对赤道洋流系统中各支洋流的形成理论作了总结，它概括了近年来一些新的结果。跨赤道流多平衡态理论是一个很有意思的工作。

第4章讨论在加热作用下热带大气运动的特征。它主要由两部分工作组成。一是对吉尔简单解的发展，主要讨论热带运动的水平结构。另一部分是近代对转动球壳轴对称环流查尼（Charney）问题的发展，这一问题的实质是讨论经圈环流——哈得来（Hadley）环流——的形成，它包括了一些经典结果，也提供了最新的结论，如非静力平衡条件下哈得来环流形成的惯性解，提出了赤道动力边界层的概念。

第5章是讨论赤道波在垂直切变流和水平切变流中的行为。讨论了赤道波在不均匀背景流中的不稳定性，提出了赤道波在水平不均匀背景流中波与波相互作用后的耦合不稳定结果。

第6章是用新的分析方法——海温距平最大值曲面分析方法——分析了热带太平洋的厄尔尼诺（El Niño）现象和印度洋的偶极子现象

以及两者之间可能的联系，在资料分析的基础上，对某些现象作了理论分析。

第7章的遥相关动力学，不仅像过去那样讨论了大气运动，也不仅仅讨论了热带过程如何影响副热带，同时还讨论了副热带海洋的运动是如何影响赤道大气和海洋的。

本书基本上是在解析理论的基础上写的，个别地方配合使用了数值模拟结果。

序

旋转地球上的热带是一个特殊的区域。

在这个区域，从热力学方面看，太阳短波辐射到达下垫面的通量比其他纬度多，而下垫面主要是海洋，向上和向下的长波辐射和反照率都有它不同于其他纬度的特点，从而使这里的辐射平衡独具特色。海洋上海水的蒸发及来自大气的降水所造成的水分收支，通过潜热融合到辐射平衡中构成这里独特的热量平衡。在热量平衡下，平均来说，热带特别是赤道附近是热源，由此而驱动形成大气中的热力环流，在气候状态下即平均经圈环流——哈得来（Hadley）环流，它的上升支在赤道附近，把暖湿空气带上高空然后向极地方向运动，并在副热带下沉，下沉的干冷空气又在低空流向赤道，这样，热带环流和副热带环流就联系在了一起。当然这只是以热力学观点在一个非常局部的方面看热带在全球大气环流中的重要性。

从动力学方面看，旋转地球上作用于流体运动的一个最基本的力称为科里奥利（Coriolis）力。但由于科里奥利参数（ $f = 2\Omega \sin \varphi$ ， Ω 为地球自转角速度， φ 为纬度）在赤道附近很小，在热带地区要在两个水平方向同时建立地转平衡而形成像中纬度那样建立准地转运动是很难的，运动的非地转性十分明显。但科里奥利参数的导数 $\beta = (2\Omega/a) \cos \varphi$ （ a 为地球半径）在赤道最大，从而使热带运动在动力学上具有自身的特点，例如，即使在线性条件下热带波动也具有独特的性质。热带地区的运动在经圈方向的罗斯贝（Rossby）变形半径很小，运动——特别是海洋的运动——在靠近赤道地区的一个狭窄的范围内呈现出质的多样性。

因此，把热带大气和海洋的运动独立出来进行研究是十分有意义的。在早期佩德罗斯奇（J. Pedlosky）著的《地球物理流体动力学》[*Geophysical Fluid Dynamics*，德国施普林格出版社（Springer-Verlag）出版，1979]和吉尔（A. E. Gill）著的《大气-海洋动力学》[*Atmosphere-Ocean Dynamics*，美国学术出版社（Academic Press）出版，

1982] 这两本重要的参考书中，虽然涉及热带运动，但篇幅不多，特别是近年来，在厄尔尼诺-南方涛动（El Niño/ Southern Oscillation, ENSO）研究的推动下，有关热带运动——无论是对大气的还是对海洋的——的研究论文都大大增加。在这种形势下，把热带动力学的研究综合一下，对有兴趣从事和学习热带大气和海洋运动的博士生及年轻学者，看来有一定的帮助。这是作者撰写本书的初衷。

我在十年前开始动手写这本书，但愈往下写愈感觉困难。热带运动无论是在空间尺度上还是在时间尺度上，涉及的范围都太大，因此，把这本书的落脚点放在哪里，是一个非常困难的选择。最后我决定把时间尺度限定在季节和年际变化上，同时把气候状态也包括进去；而在空间尺度上则把注意力放在大尺度运动上——在这些运动上，科里奥利力应该是起作用的。因此，本书也可称为赤道地球物理流体力学。

本书中的许多内容是我我和我的学生们所做的研究工作。第1章中关于热带运动的尺度分析是提得比较早的；第2章的半地转适应和发展运动，是作者近年来独立完成的；第3章中跨赤道流的多平衡理论、第4章中哈得来环流的惯性解以及第7章中三维波动的射线理论应该说有一定创新；第6章关于太平洋的 ENSO 现象和印度洋的偶极子现象，从分析到理论都是按照我们自己的见解而撰写的，虽然一些分析研究还很初步，但自成系统。虽然我相信不少人不一定认可我们这种非传统的写法，但在学术上有一点“百家争鸣”总是可以的吧！

就个人体会而言，要写好甚至编好一本书并不容易，有很多去粗存精的工作要做，至少要使读者读起来方便和流畅些。

当把这本约 60 万字的书稿交给气象出版社时，有如释重负之感，因十年前我和该社签了写这本书的合同，原说好一两年交稿，结果拖了十年，真要感谢本书责任编辑的耐心等待和在本书出版过程中认真细致的工作。

感谢这十年中为本书增添新内容而和我共同工作的同事和学生们，他们的名字在此不一一列举了，在书中的引文中都可查到。

特别要说明的一点是，各章是在不同年代写的，同时也考虑到各章可以独立地阅读，因此，有些基本公式在有关章节中有重复。

是为序。

巢纪平

2007 年 10 月 19 日

目 录

第 1 章 赤道运动的基本方程和运动的基本特征	1
1.1 运动方程和热力学关系	1
1.2 布西内斯克流体	4
1.3 正压模式和垂直本征值模式	5
1.4 三维斜压运动方程	8
1.5 赤道波系	10
1.6 各波分量的控制方程	11
1.7 热带运动的尺度分析	13
1.8 纬圈地转近似的准平衡动力学	18
1.9 弱温度梯度近似的准平衡动力学	23
1.10 多尺度热带模式的统一分析	25
参考文献	29
第 2 章 热带运动的适应过程和发展过程	30
2.1 问题的提出	30
2.2 热带运动的平衡态	30
2.3 非平衡态的时间演变方程	31
2.4 泰勒-普罗德曼定理	33
2.5 重力惯性波的频散和地转平衡态的建立	34
2.6 位势涡度的时间不变式	37
2.7 半地转适应和发展运动	37
2.8 低频近似	43
参考文献	46
第 3 章 赤道洋流动力学	47
3.1 热带海洋运动方程	47
3.2 无黏性海洋的线性非定常响应	48
3.3 黏性均质海洋的线性和非线性响应	53
3.4 层结海洋中赤道潜流的发展	63
3.5 赤道潜流形成的惯性理论	69

3.6	赤道潜流的水源和经圈环流	78
3.7	斜压非静力平衡海洋赤道潜流和平均经圈环流的惯性理论	83
3.8	次表层回流动力学	91
3.9	跨赤道急流的惯性理论	105
3.10	跨赤道惯性急流的多平衡态	107
	参考文献	113
第 4 章	热带大气对加热的响应	115
4.1	吉尔模式	115
4.2	吉尔模式的简单解	117
4.3	非长波近似模式	123
4.4	热带大气环流的吉尔解模拟	126
4.5	积云加热和三维环流结构——沃克环流	131
4.6	转动球壳轴对称环流的查尼问题	137
4.7	层结流体的查尼问题	141
4.8	查尼问题的发展	146
4.9	线性和非线性轴对称环流的比较	150
4.10	拟无黏性极限下的对称经圈环流	156
4.11	加热位置和强度对经圈环流的影响	162
4.12	哈得来环流和赤道辐合带	165
4.13	大气对副热带加热的响应	180
4.14	非静力平衡下经圈环流的惯性理论	184
4.15	纬圈海温驱动下的经圈环流	193
	参考文献	201
第 5 章	基本流对赤道波动的影响	203
5.1	临界层在波动发展中的重要性	203
5.2	垂直切变流中的赤道内波-数值方法	204
5.3	垂直切变流中的赤道内波-WKB 方法	213
5.4	大气纬向切变风中的赤道内波-层结模式	219
5.5	大气纬向切变风中的赤道内波-浅水模式	230
5.6	赤道潜流的影响	246
5.7	对称扰动的惯性不稳定	256
5.8	水平切变流中赤道重力波的不稳定性	258
5.9	罗斯贝波的超反射和切变不稳定	259
5.10	赤道波的耦合不稳定	266

5.11 经圈流中赤道波的行为	275
参考文献	280
第 6 章 ENSO-偶极子的观测和理论	283
6.1 热带大气和海洋的基本状态与 ENSO	283
6.2 海洋资料分析的新方法——最大海温距平曲面	290
6.3 热带太平洋的海气相互作用——ENSO	294
6.4 热带印度洋的海气相互作用——偶极子	296
6.5 ENSO 事件和偶极子事件的联系	300
6.6 赤道不同海域对信风张弛的响应	303
6.7 热带两层海洋对风应力的响应	317
6.8 西边界信号从副热带传向赤道的一种过程	327
6.9 次表层海温距平在 10°N 附近向西传播的机理	333
6.10 经圈边界风生流的不稳定性	339
6.11 纬向切变流中赤道波的不稳定性	347
6.12 热带大气季节内振荡	364
6.13 海气耦合系统中的振荡和 ITCZ	368
6.14 简单的海气耦合波	375
6.15 长波近似下的海气耦合波	378
参考文献	382
第 7 章 遥相关动力学	385
7.1 观测事实	385
7.2 罗斯贝波在经圈方向远程响应中的条件	385
7.3 纬圈均匀风场中罗斯贝波对加热的定常响应	389
7.4 罗斯贝波的斜压定常响应	395
7.5 响应的季节性	397
7.6 罗斯贝波定常响应的射线理论	400
7.7 大圆理论	404
7.8 斜压大气中的三维射线理论	407
7.9 陆架波在海洋信号传播中的作用	414
7.10 海洋信号从副热带向热带的传播	418
参考文献	428
索引	430

第 1 章 赤道运动的基本方程 和运动的基本特征

1.1 运动方程和热力学关系

赤道地球物理流体在这里指的是发生在旋转地球上重力场中的海洋和大气在邻近赤道的热带区域中的运动,因此在本书中,赤道运动和热带运动在动力学上基本上是同义的.一般来讲,在这里研究的流体密度(或温度)的垂直分布是层结的,并且是理想流体.

由动量守恒得到的矢量运动方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

式中 $\mathbf{V}$ 为流体质点的速度矢量, $\boldsymbol{\Omega}$ 为地球自转角速度, $\mathbf{g}$ 为重力加速度, p 和 ρ 分别为流体的压强和密度. 算子

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla).$$

由质量守恒得到流体的连续性方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1.2)$$

如果流体是不可压缩的,即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (1.3)$$

则有

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.4)$$

即不可压缩流体的运动是三维无辐散的.

如取温度 T 和压力 p 为流体的热力学状态函数,则状态方程的一般形式为

$$\rho = \rho(T, p), \quad (1.5)$$

对理想气体有

$$p = \rho RT, \quad (1.6)$$

式中 R 为气体常数.

单位质量热力学的吉布斯(Gibbs)函数为

$$G = I + \frac{1}{\rho}p - TE, \quad (1.7)$$

式中 I 为内能, E 为熵. 热力学第二定律可以写成

$$dI = TdE - pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (1.8)$$

由此有

$$dG = -EdT + \frac{1}{\rho}dp \quad (1.9)$$

并有关系式

$$E = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial G}{\partial p}. \quad (1.10)$$

由此可写出熵的变化为

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T dp, \quad (1.11)$$

或者写成

$$dE = \frac{c_p}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dp, \quad (1.12)$$

式中

$$c_p = T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p, \quad (1.13)$$

定义为流体的比定压热容, 而

$$c_v = T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\rho, \quad (1.14)$$

为流体的比定容热容, 一般可写成

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (1.15)$$

在另一方面, 考虑到

$$\frac{\partial E}{\partial p} = -\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T},$$

由此可见, 方程(1.12)中

$$\alpha = -\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (1.16)$$

称流体的热膨胀系数. 对理想气体考虑到方程(1.6)后, 有

$$\alpha = \frac{1}{T}. \quad (1.17)$$

由方程(1.5)给出

$$d\rho = -\alpha\rho dT + \lambda\rho dp, \quad (1.18)$$

式中

$$\lambda = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \quad (1.19)$$

称为流体的压缩性系数. 对理想气体有

$$\lambda = \frac{1}{p}. \quad (1.20)$$

另外, 定义

$$C = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_E \right]^{1/2}, \quad (1.21)$$

为绝热声速, 容易求得

$$C^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_E = \frac{\kappa}{\lambda \rho}. \quad (1.22)$$

不难算出, 在一般情况下, 有

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{T \alpha^2}{\lambda \rho}, \quad c_v = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{T \alpha^2}{\lambda \rho}, \quad (1.23)$$

由此

$$c_p - c_v = \frac{T \alpha^2}{\lambda \rho}. \quad (1.24)$$

对理想气体有

$$c_p - c_v = R. \quad (1.25)$$

对于等熵过程或可逆绝热过程, 有

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (1.26)$$

或由方程(1.12)给出

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha T}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (1.27)$$

由方程(1.16)给出

$$dT = \frac{1}{\alpha \rho} (\lambda \rho dp - d\rho), \quad (1.28)$$

由此有

$$\frac{dp}{dt} = C^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.29)$$

这是绝热过程的另一种表达式. 再一种表达式为

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (1.30)$$

式中

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\gamma, \quad (1.31)$$

称为位温, 其中 $\gamma = \frac{\alpha p}{c_p \rho}$, 对理想气体 $\gamma = \frac{R}{c_p}$.

这样, 对于绝热过程, 方程(1.1), (1.2), (1.5)和(1.30)组成了对变量 $\mathbf{V}, p, \rho, T$ 的闭合方程组.

1.2 布西内斯克(Boussinesq)流体

严格来讲, 空气和海水都是可压缩的. 但平均来讲, 根据观测, 海水的密度变化约为 5%. 空气的可压缩性虽然比海水大, 但密度变化所产生的动力学效应也只需在某些场合考虑. 例如, 当空气微团的密度(或比容)由于某种原因发生变化, 使其不同于它所在周围环境的密度(或比容)时, 则在重力场中这一密度(或比容)差将造成阿基米德(Archimedes)浮力, 使空气微团发生对流.

当流体的密度变化不大时, 可将其值在平衡状态 ρ_0 附近展开, 即

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p', \quad (1.32)$$

式中带撇号的量表示对平衡值的偏差. 由此有

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\alpha T' + \lambda p', \quad (1.33)$$

方程右端分别是热膨胀和压缩性对密度变化的作用.

如令 $p = p_0 + p'$, 设压力的平衡场是处在静力平衡下, 即

$$\nabla p_0 = g \rho_0, \quad (1.34)$$

于是方程(1.1)右端可写成

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} = -\mathbf{g} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho'} - 1 \right) - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla p' \approx -\frac{1}{\rho_0} (\nabla p' - g \rho'), \quad (1.35)$$

右端第二项为阿基米德浮力.

考虑到方程(1.33)后, 方程(1.35)右端的垂直分量为

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g \alpha T' - g \lambda p', \quad (1.36)$$

对于海洋, 垂直尺度 H 的量级为 $O(10^0)$ km, 式(1.36)第一项的量级为 $\frac{|p'|}{\rho_0 H}$, 海

水的标高 $H_s = \frac{1}{g \lambda \rho_0}$, 海水的等温压缩系数 λ 约为 $4.5 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$, 算得标高

$H_s \approx 200 \text{ km}$, 故上式第三项的量级为 $\frac{|p'|}{\rho_0 H_s}$, 第三项和第一项量级之比为 $\frac{H}{H_s} \ll 1$.

这表明,对于海洋来说,可压缩性对密度变化的影响可以忽略,由此有

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\alpha T'. \quad (1.37)$$

对于大气,其标高 $H_s = \frac{C^2}{g}$, 约 10 km, 与特征高度 H 同量级, 所以一般情况下, 有

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{T'}{T_0} + \frac{p'}{p_0}, \quad (1.38)$$

但对 $H \ll H_s$ 的浅层运动, 压缩性对密度变化的效应并不重要, 而有

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{T'}{T_0}. \quad (1.39)$$

在另一方面, 连续性方程(1.2)可以写成

$$\frac{d\rho'}{dt} + (\rho_0 + \rho')\nabla \cdot \mathbf{V} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0. \quad (1.40)$$

考虑到由压缩性引起的压力变化为 $\delta p' \sim C^2 \delta \rho'$, 而由运动引起的压力(动压力)变化为 $\delta p' \sim \rho_0 V^2$, 这里 V 为速度的特征值, 如取运动的特征时间为 $\tau \sim \frac{L}{V}$, 其中 L 为运动的空间特征尺度, 则方程(1.40)第一项的量级为 $\frac{V}{L} \left(\frac{\rho_0 V^2}{C^2} \right)$, 取 $\nabla \cdot \mathbf{V} \sim \frac{V}{L}$, 得到第一项和第二项量级之比为

$$O\left(\frac{d\rho'}{dt}\right) / O(\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}) \sim \frac{V^2}{C^2},$$

由于所研究的运动速度远小于声速, 所以连续性方程简化成

$$\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{V} = 0, \quad (1.41)$$

如果平衡场的密度是均匀的, 或认为在垂直方向的不均匀性很小, 则进而简化成

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1.42)$$

一种流体, 如果在质量守恒方程中可以忽略密度的个别变化, 而在动量守恒方程中只在与重力相联系的项中才保留密度变化的动力效应, 这样的流体称为准不可压缩流体(巢纪平 1962). 如果在动量守恒方程中, 与重力相联系的密度变化只考虑热膨胀效应, 这样的流体称布西内斯克流体.

1.3 正压模式和垂直本征值模式

如果运动与垂直方向无关, 只是水平的, 或者说, 运动场的结构在垂直方向都是一样的, 这样的运动称为正压运动; 描写正压运动的模式称为正压模式. 在赤道 β 平面上, 即 $f = \beta y$ 的平面上, 线性化的正压模式方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.45)$$

式中 $p = gh$, h 为流体的扰动厚度; 科里奥利 (Coriolis) 参数 $f = \beta y$, $\beta = \frac{2\Omega}{a}$, a 为地球半径; 另外

$$C = (gD)^{1/2} \quad (1.46)$$

为重力波波速, D 为流体的未扰厚度.

对于斜压流体运动, 任一垂直本征模的水平结构方程和上述正压运动方程在形式上是一样的. 事实上, 取水平尺度、垂直尺度、运动速度和时间的特征量分别为 $L, D, V, \beta L$, 引进量纲为 1 的量

$$(x, y) = L(\dot{x}, \dot{y}),$$

$$z = D \dot{z},$$

$$t = \frac{1}{\beta L} \dot{t},$$

$$(u, v) = V(\dot{u}, \dot{v}),$$

$$w = \frac{D}{L} \dot{w},$$

以及扣除平衡场的物理量设成

$$p = p_0 + p_0(\beta L^2 V) \dot{p}'(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}), \quad (1.47a)$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_0 \left(\frac{\beta L^2 V}{gD} \right) \dot{\theta}'(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}), \quad (1.47b)$$

于是, 对布西内斯克流体以及在静力平衡条件下, 有以下方程组(略去“ $\cdot$ ”号和“ $'$ ”号):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) = 0, \quad (1.50)$$

以及静力平衡方程

$$\theta = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.51)$$

在这里, 扰动温度已用扰动位温代替, 而扰动位温变化方程为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w \left(\frac{gD}{\beta^2 L^4 \theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{DN^2}{\beta^2 L^4} = 0, \quad (1.52)$$

式中

$$N = \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.53)$$

称为布伦特-维赛拉(Brunt-Väisälä)频率(B-V 频率). 当基本场的位温随高度有变化时, 可设

$$N^2 = N_0^2 S(z), \quad (1.54)$$

并定义一个特征尺度, 称罗斯贝(Rossby)变形半径, 为

$$L_R = \left(\frac{N_0 D}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.55)$$

取 $L = L_R$, 则方程(1.52)变成

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + S(z) \frac{w}{D} = 0. \quad (1.56)$$

取方程(1.48)—(1.51)及(1.56)的解的形式为

$$(u, v, p) = G(z) [U(x, y, t), V(x, y, t), P(x, y, t)], \quad (1.57)$$

$$\theta = P(x, y, t) \frac{dG}{dz}, \quad (1.58)$$

$$w = P(x, y, t) \frac{1}{S(z)} \frac{dG}{dz} = 0, \quad (1.59)$$

代入连续性方程(1.50), 给出

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) G + \frac{P}{\rho_0} \left[\frac{\rho_0(z)}{S(z)} \frac{dG}{dz} \right] = 0. \quad (1.60)$$

为了能使变量分离, G 需满足

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_0}{S} \frac{dG}{dz} \right) = -C_m^{-2} G. \quad (1.61)$$

可见 G 为对应于本征值 C_m 的本征函数, 它就是运动场的垂直结构函数.

于是, 对应于任一个本征值 C_m 的水平结构, 运动方程组为

$$\frac{\partial U}{\partial t} - yV = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + yU = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.64)$$

这组方程在形式上同上面正压运动方程, 但它是对任一个斜压本征模 C_m 写出的, 在物理上是不同的. 可见, 在这里, 本征值 C_m 相当于重力波波速, 或相当于某一个无量纲的特征厚度 h_m . 自然, 对应于不同斜压模 m , C_m 或 h_m 是不一样的. 这个