高等工程數學

Advanced Engineering Mathematics

（第二版）

（中册）

原著者： Peter V. O'Neil
譯述者：徐澧貽　劉柏宏

科技圖書股份有限公司

高等工程數學

（中 册）

（向量、向量分析等篇）

Advanced Engineering Mathematics

原著者：Peter V. O'Neil

譯述者：徐濃豐　劉伯宏

科技圖書股份有限公司

行政院新聞局登記證　局版台業字第 1123 號

高等工程數學

（中冊）

原著者：Peter V. O'Neil
譯述者：徐灃豐　劉伯宏
發行人：趙國華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段 49 號四樓之 1
電　話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號 0015697-3

七十八年三月二版　　特價新台幣 180 元

原　　序

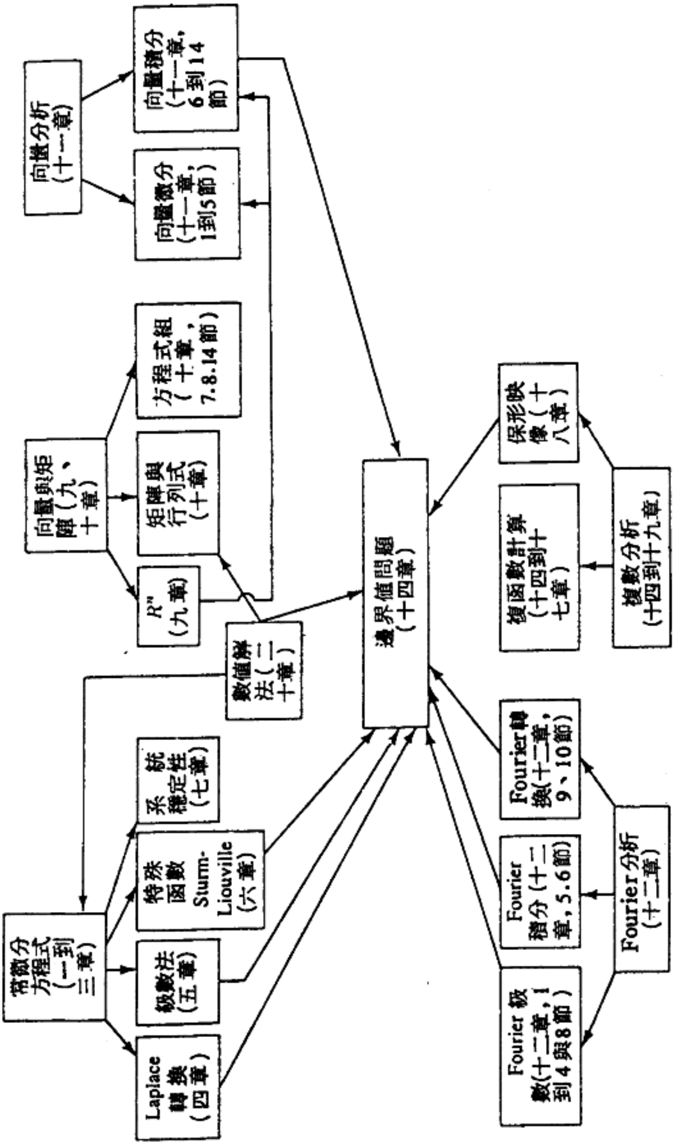
本書包括已習過微積分後的理工或應用數學科系學生用的近代數學課程。用圖示來說明所涵蓋部分及其間相關項目如下。其基本預習課程計有標準的初等微積分、冪級數、函數的無限級數、（指Fourier級數）、廣義積分、偏微分與重積分等。有關線與面積分，通常不包含在基本微積分中，在此也隨手列入。（見下頁列表）

本書共分六篇，可依講師講授工程數學順序所需講解其所需的那篇，而不需顧到已講過的另一篇。在編寫本書時，曾嘗試循著下列的方針進行：

1. 所有題材與其順序或表達，均依已建立的工程數學課程爲準，以及審查者的意見。
2. 每一新觀念下，必列有一個或幾個例題。
3. 多數節末附有大量習題，分別爲正常的計算題，一直到較具挑戰性的。
4. 內附有大量的應用題，常具有設置習題時的背景與構成數學模式的討論，以及運用數學求解模式方程式的解。
5. 各主要節後，均附列些簡單歷史。

這第二版本雖仍具第一版的一般外表，其中列有若干重大改變。茲分別說明如下：

1. 至少習題組與若干例題，均已重寫過。曾花費在細心編組習題不少功夫，其中先列若干較易求解與直接了當的，續漸進入更複雜的。
2. 適宜的特性由審查者與使用者的推薦均分別加入。例如，討論解


向量分析（十一章）
向量積分（十一章，6到14節）
向量微分（十一章，1到5節）
向量與矩陣（九、十章）
方程式組（十章，7.8.14節）
矩陣與行列式（十章）
R^n（九章）
數值解法（二十章）
邊界值問題（十四章）
保形映像（十八章）
複函數計算（十四到十七章）
複數分析（十四到十九章）
常微分方程式（一到三章）
系統穩定性（七章）
特殊函數 Sturm-Liouville（六章）
級數法（五章）
Laplace 轉換（四章）
Fourier轉換（十二章，9、10節）
Fourier 積分（十二章，5.6節）
Fourier 級數（十二章，1到4與8節）
Fourier 分析（十二章）

一階齊次微分方程式時，常引用兩種積分法，現已加在每節之末以供參考。同樣，一種簡短積分表包含 sines 與 cosines 的，放在學生學習計算某種 Fourier 級數之前。

3. 各種轉換法均分別補充加增。
4. 後依使用第一版者的建議，若干新材料亦予加入。例如，在求解含特徵值爲複數的微分方程式組的矩陣解法，以及矩陣中不含 n 個線性獨立特徵值時的解法。此後一情況包含一些指數矩陣的討論。
5. 若干節已分別重寫，以增進簡明或加強某些項目的內容。
6. 最後，將第一版中所出現的誤差全部清理改正。

謝 辭

就印製方面我對 Wadsworth 與 Greg Hubit 公司的書籍出版處的 Jim Harrison 先生。California 工技大學 Tom O'Neil 。提供非常多的新習題與誤值處，並建議若干改善辦法。Alabama 大學的 Jeanne Hutchison 與 Arthur Segal 教授分別提出習題與解法的有價值建議。

本書第一版的審查者名單列下：

(1) 有關數學方面：

Stuart Black
California State University
Long Beach

J. Michael Bossert
California State University
Sacramento

Jerald P. Dauer
University of Nebraska

Robert Fennel
Clemson University

Charles N. Friedman
University of Texas

Michael Gregory
University of North Dakota

Euel Kennedy
California State Polytechnic
University

Myren Krom
California State University
Sacramento

Doug Moore
University of California
Santa Barbara

Thomas O'Neil
California State Polytechnic
University

Raymond D. Terry
California State Polytechnic
University

Joseph Verdina
California State University
Long Beach

Michael Williams
Virginia Polytechnic Institute
and State University

(2) 有關電機工程方面：

Arwin A. Dougal
University of Texas

Charles P. Newman
Carnegie-Mellon University

(3) 有關機械工程方面：

Kenneth Krieger
University of New Orleans

J. P. Vanyo
University of California
Santa Barbara

又第二版的審查者計包括：

David Ellis
San Francisco State University

Howard Goldlick
University of Hartford

Robert W. Hunt
Humboldt State University

Ramakant G. Khazanie
Humboldt State University

Istvan Kovacs
University of South Alabama

James Powell
Western Michigan University

最後，吾願對各位熱心提供上版中所發現的誤差以及提供改進的建議的各位，在此附筆感謝。爲數頗多的建議均已分別更正，反應在第二版中。

高等工程數學（中册）

目　錄

第貳篇　向量與矩陣

第九章　向量與向量空間

第十章　矩陣與行列式

第叁篇 向量分析

第十一章 向量分析

第肆篇 Fourier 分析與邊界值問題

第十二章 Fourier 級數、積分與變換

附 錄

第貳篇　向量與矩陣

第九章　向量與向量空間

9.0 導　言

工程與科學中常遭遇許多量值。爲要作完整的描述，需要兩項資料。例如：力、速度、與加速度，均需用到大小與方向兩種資料。此種量值，稱爲向量（vector）。這是一種有別於諸如質量、溫度等僅以單一數值便可完全給出指定的概念。本章將發展實際問題中出現的向量代數與幾何，並將其歸納成向量空間觀念。此種觀念對發展次一章的論題，矩陣中甚多的材料，頗爲有用。

9.1 向量代數與幾何

向量體系中，習慣上將實數歸屬於純量（scalar）一類。如：π、2與$\sqrt{41}$ 均爲純量。諸如質量、溫度、與密度等，均可用單一的實數加以量度，故統稱爲純量值（scalar quatity）。

在相對的一面，對向量必需指定方向與大小兩種情形。例如：假如推動一物體，不但是力的“大小”，而且力的方向，均能對物體發生影響。

將方向與大小兩種情形連結一起，構成一種概念的途徑之一是：取三個實數或純量，依序排列，形成一種有序三元組（ordered triple）(a, b, c)，用以確定一向量（3維空間）。如圖102所示，已知一直角座標系統，得用兩種可相互交換的不同方式，來想像有序

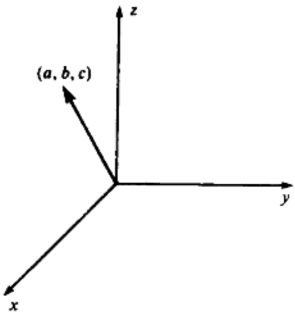


圖 102　作爲幾何中的點，與作爲向量的（a，b，c）

三元組（a，b，c）的情形：(1)作爲一點的座標值，與(2)作爲自原點到點（a，b，c）的箭矢。

在第二種構想中，具有一個方向〔位於原點處，自（0，0，0）到（a，b，c）的方向〕，與一個大小量值〔箭矢的長度，或相當於自（0，0，0）到（a，b，c）的距離，即 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 〕。

當將（a，b，c）想像成一向量時，則分別稱 a，b 與 c 爲第一，，第二與第三分量（component）。當兩向量的各分量分別相等時，則兩向量正好相等。

本節將發展一種特殊符號，用來幫助吾人區分並強調（a，b，c）作爲是幾何中的一點，或作爲一向量的不同情形。同時，爲要區分純量與向量，乃將純量用普通希臘字母或羅馬字母表示（α，β，a，b，A，W，……），以黑體希臘字母或羅馬字母表示向量（$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{W}$，……）。向量 $\mathbf{F}$ 的大小量值，以 $\|\mathbf{F}\|$ 表示。如此，假如 $\mathbf{F}=$（a，b，c），則 $\|\mathbf{F}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 。

圖 103 所示，爲向量（1，−1，2）與（−3，2，4）。茲再重複一句，例如認識（1，−1，2）是 3 維空間中的一點，同時，也是一個自（0，0，0）到（1，−1，2）的箭矢用符號，此兩種情形均甚重要。此箭矢代表箭矢具有的方向，大小等於箭矢長度（此處爲 $\sqrt{6}$）的向量。

實際上，具有正確的長度與方向的箭矢照樣可代表一向量。如此

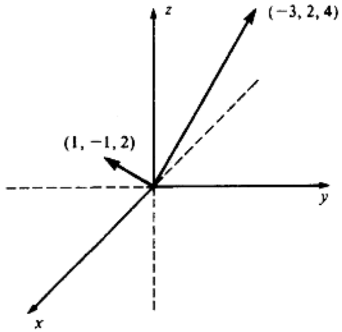


圖 103

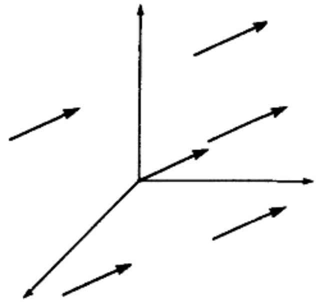


圖 104　同長的平行箭矢代表相同的向量

，圖 104 中所示的所有各箭矢均具相同的長度與方向，因而代表同一向量。在許多應用中，以不是自原點繪得的箭矢來代表向量頗多方便。後文中將會再回到此種觀念。

向量，有兩種基本代數運算，設

$$\mathbf{F} = (a_1, b_1, c_1) \text{ 與 } \mathbf{G} = (a_2, b_2, c_2)$$

F 與 G 的向量和（vector sum）被定義如下

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

因此，向量相加，便是將各分量分別相加。例如

$$(-1, 3, \pi) + (\sqrt{2}, 1, 6) = (-1 + \sqrt{2}, 4, \pi + 6)$$

其次，向量（a，b，c）與純量 α 相乘的純量積（scalar product）係以 α 乘（a，b，c）的各分量得以確定，此即

$$\alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

例如

$$\sqrt{3}(0, 1, -2) = (0, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

以下爲此等運算的基本特性

(1) $\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{G}+\mathbf{F}$ 稱爲交換律（commutative law）。

(2) $(\mathbf{F}+\mathbf{G})+\mathbf{H}=\mathbf{F}+(\mathbf{G}+\mathbf{H})$ 稱爲結合律（associative law）。

(3) $\mathbf{F}+(0,0,0)=\mathbf{F}$ 因此稱 $(0,0,0)$ 爲零向量（zero vector），並以 $\mathbf{0}$ 表示。這是唯一的不能用箭矢表示的向量，因其大小量值（長度）爲零。

(4) 假如 $\mathbf{F}=(a,b,c)$，則向量 $(-a,-b,-c)$ 用 $-\mathbf{F}$ 表示。並稱 $-\mathbf{F}$ 爲 $\mathbf{F}$ 的負值（negative），同時，對任何 $\mathbf{G}$ 而言，寫得 $\mathbf{G}+(-\mathbf{F})$ 亦即 $\mathbf{G}-\mathbf{F}$。假如 $\mathbf{F}=(a_1,b_1,c_1)$ 與 $\mathbf{G}=(a_2,b_2,c_2)$，則得

$$\mathbf{G}-\mathbf{F}=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$$

(5) $\alpha(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\alpha\mathbf{F}+\alpha\mathbf{G}$

(6) $(\alpha\beta)\mathbf{F}=\alpha(\beta\mathbf{F})$

(7) $(\alpha+\beta)\mathbf{F}=\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{F}$

特性(4)所使用的符號特多；其它特性均很容易證明。茲證明特性(5)作爲一例。

特性(5)的證明： 置

$$\mathbf{F}=(a_1,b_1,c_1) \quad \text{與} \quad \mathbf{G}=(a_2,b_2,c_2)$$

則

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{F}+\mathbf{G})&=\alpha[(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)]\\&=\alpha(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)\\&=(\alpha(a_1+a_2),\alpha(b_1+b_2),\alpha(c_1+c_2))\\&=(\alpha a_1+\alpha a_2,\alpha b_1+\alpha b_2,\alpha c_1+\alpha c_2)\\&=(\alpha a_1,\alpha b_1,\alpha c_1)+(\alpha a_2,\alpha b_2,\alpha c_2)\\&=\alpha(a_1,b_1,c_1)+\alpha(a_2,b_2,c_2)\\&=\alpha\mathbf{F}+\alpha\mathbf{G}\end{aligned}$$

除上述的諸特性外，尚有關於純量乘向量的大小量值的下列情形

(8)　$\|\alpha\mathbf{F}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{F}\|$。對此情形而言，假如 $\mathbf{F}=(a,b,c)$，則 $\alpha\mathbf{F}=(\alpha a,\alpha b,\alpha c)$，並得

$$\begin{aligned}\|\alpha\mathbf{F}\| &= \sqrt{(\alpha a)^2+(\alpha b)^2+(\alpha c)^2}\\ &= \sqrt{\alpha^2(a^2+b^2+c^2)}\\ &= |\alpha|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ &= |\alpha|\,\|\mathbf{F}\|\end{aligned}$$

因 (a,b,c) 既爲幾何上的一點，又是一向量，故對向量相加與純量積，自然會尋求其幾何上的意義。對向量加法而言，此種解釋係採取平行四邊形定律（parallelogram law），其陳述如下

加法用的平行四邊形定律（parallelogram law for addition）

$\mathbf{F}+\mathbf{G}$ 代表以 $\mathbf{F}$ 與 $\mathbf{G}$ 爲邊的平行四邊形的對角線。

此情形如圖 105 所示，可用兩種方式加以審查：其一，可自同一點繪得 F 與 G；第二，其中任一向量，可用自另一向量的末端繪得的平行箭矢代表。在閱讀向量圖時，常採用後一觀點。

當 F 與 G 位在 xy 平面中，並能計算各座標軸上的座標值時，也許最容易看出平行四邊形定律。圖 106 所示即其一例。其中，(2，2，

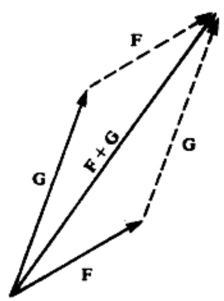


圖 105　向量加法用的平行四邊形定律

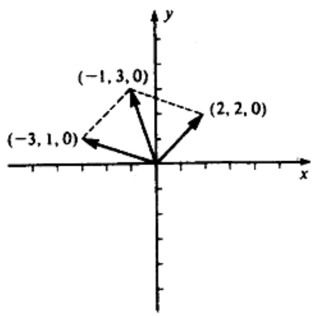


圖 106　根據平行四邊形定律，得 $(2,2,0)+(-3,1,0)=(-1,3,0)$