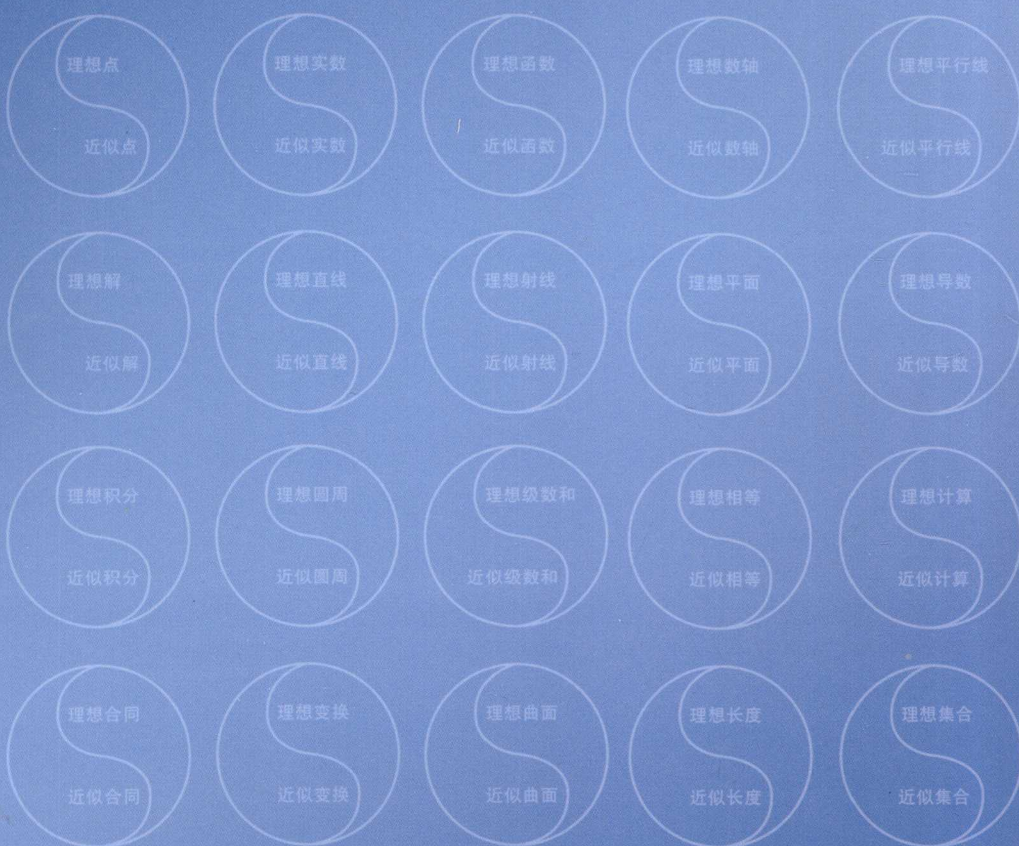
全能近似分析数学理论基础及其应用

Theoretical Basis of Math Based on Omnipotent Approximation Analysis and Its Applications

曹俊云　杨健辉　合著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

全能近似分析数学理论基础及其应用

Theoretical Basis of Math Based on Omnipotent Approximation Analysis and Its Applications

曹俊云　杨健辉　合著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是关于三次数学危机、平行线公理争论及许多悖论彻底解决方法的理论体系，并协调了数学理论及其在物理学、数理方程和相对论等中的应用．根据连续性现实数量测不准的事实，提出了测不准原则是普遍遵循的原则，并认为实践是数学的最终基础；据此对时空无限可分性等基本概念提出了理想、近似、全能近似三种名词术语，并用理想与近似相互依赖的对立统一法则进行了阐述及其相应表达，从而使许多难以解释的问题得到了有效解决．

本书可供从事数学和工程技术研究人员以及大学和中小学理工科教师、研究生和本科生作为参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

全能近似分析数学理论基础及其应用/曹俊云，杨健辉著．—北京：中国水利水电出版社，2009．12

ISBN 978-7-5084-7090-0

Ⅰ．①全…　Ⅱ．①曹…②杨…　Ⅲ．①数学理论-研究　Ⅳ．①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 232973 号

书　名	**全能近似分析数学理论基础及其应用**
作　者	曹俊云　杨健辉　合著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658(营销中心)
经　售	北京科水图书销售中心(零售) 电话：(010)88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国人民大学出版社印刷厂
印　刷	北京海洋印刷厂
规　格	184mm×260mm　16 开本　9.75 印张　231 千字
版　次	2009 年 12 月第 1 版　2009 年 12 月第 1 次印刷
印　数	001—500 册
定　价	**37.00** 元

自　序

本书从现行的数学理论中所存在的一些问题出发，以理论联系实践的方法，探讨了数学的基本概念，提出了全能近似分析的基本思想，构建了全能近似分析的数学理论框架．本书的主要特点在于：

(1) 本书恰当地使用了极限方法．例如，在诸如线段长度、实数、点、平行线的概念阐述中，都使用了从实践中的近似情况出发而取极限的方法．这种方法不仅使数学理论具有紧密联系实践的性质，而且也为彻底解决三分律反例、平行线争论、飞矢不动悖论、分球奇论等问题奠定了基础．

(2) 本书坚持了无穷是“无有穷尽”、“无有终了”的事实，并将“无穷大”区分为变量性无穷大与常量性无穷大(也叫理想无穷大)两个概念，并提出了“无穷数列、无穷集合等被看作是只有构造法则而不能构造完毕(或完成)的数列或集合”的观点，从而认为无穷集合不是“元素个数为常数的正常集合”，并且也认为不能提出“无穷序数与无穷基数”，这样就为消除连续统假设问题奠定了基础．在这种无穷的观点下，提出了“无尽小数的真实意义就是无穷数列，是变数而不是常数”的符合实践的论述．

(3) 本书依据“连续性现实数量的测不准事实”，提出了测不准原则，因而将相应的物理量与基本数学概念区分为理想、近似和全能近似相互依赖的三个层次；并提出了度量假设，以及“线段理想长度(真值)是近似值(测量值)的误差界趋向于0时的极限”的观点．这样，就可以合理地阐述时空无限可分性与数轴上的点与实数的一一对应关系．

(4) 本书所提出的全能近似分析方法，对物理学和数学物理方程中所存在的一些难于解释和证明的问题，进行了很好的推导与证明．

总之，本书依据唯物辩证法的哲学观点，提出了较为系统的全能近似分析理论体系，解释了许多疑难与困惑问题，希望能为其他相关研究与应用提供有益的参考．

曹俊云　杨健辉

2009 年 10 月 30 日

前　言

在数学理论的建立过程中，从古至今，始终存在着无法解说或称悖论、矛盾的阐述．

就点的概念来讲，在希尔伯特的《几何基础》中讲到："对点、直线、平面不作任何几何形象的描述"．但根据任何线段中都有无穷多个点的事实，在测度理论中，必须提出点的测度（即点的大小）为0的理论；而在《非标准分析》出现之后，为了解释"实无穷小数"的意义，在H. Jerome Keisler的《Elementary Calculus》中又提出了使用显微镜把点放大为线段的论述．这种放大，就意味着点有大小，这就与测度论中点的测度为0的说法相矛盾．

对于数的概念，现行教科书中存在着等式 $1/3=0.333\cdots$．但在深入研究"无尽小数 $0.333\cdots$ 是什么"的问题时，就涉及到了数学界中尚争论着的、无穷的概念问题．为了解释这个自古就有的等式，存在着"无穷是完成的、存在着的整体"的"实无穷"说法，但这个说法又带来了实数三分律的反例与第三次数学危机．

此外，在数学与物理学研究中还存在着"平行线公理的争论"、"选择公理的争论"、"连续统的大难题"、"排中律与反证法应用有没有条件"、"海涅定理成立与否"、"物理与工程技术问题中的 δ-函数与发散积分如何解决的问题"、"相对论中的时钟佯谬问题"等困惑问题．

作者通过对这些问题进行深入研究之后，发现了纯形式公理方法，并无法建立无矛盾的形式化数学体系；数学理论必须以实践为最终基础，并使用对立统一法则去阐述数学理论中的基本概念．

例如，对线段长度，必须提出理想长度（真值）与近似长度（测定值）的、相互依赖的对立统一概念；对"点"则必须提出：没有大小的理想点与有大小的近似点的相互依赖的概念．而对自然数则必须知道：①自然数是为了表达"个数"、"尺数"等而提出的一种符号；②"个数"与"尺数"是在忽略了诸如"这一个鸡蛋与另一个鸡蛋大小差别"、"这里的一尺与那里的一尺的差别"的近似方法下，所得到的抽象概念．而关于数轴上的点集与实数集一一对应的概念，也必须在实际测量的基础上，通过误差界趋向于0的极限方法去说明它．同样，"无穷大"也需要有近似无穷大与理想无穷大两个层次的概念．

简单地说，本书提供了一种全新的视角，去重新审视、改革现有的数学理论，从而消除了许多矛盾与困惑，并为相关的理论研究与应用奠定了基础．但限于作者的学术水平，其中必有许多不足甚至谬误，恳请读者不吝批评指正。

本书的出版，得到了河南理工大学博士基金（6482-24）和河南理工大学重点学科固体力学学科（509902）的资助，在此，谨向他们表示真诚的衷心感谢。

著者　曹俊云　杨健辉

2009年10月28日

于河南理工大学

定义、公理、定理、法则与性质等索引表

表 0.1　定义索引表

编号	定义名称	章	节	编号	定义名称	章	节
0.1	全能近似长度序列/全能近似长度	引论	3.1	1.8	全能近似实数/近似实数	第1章	2.4
0.2	连续性现实数量	引论	3.2	1.9	全能近似相等关系	第1章	2.4
0.3	康托尔基本数列	简介	2	1.10	康托尔基本数列的极限/无理数	第1章	2.4
0.4	全能近似相等关系/等价关系	简介	2	1.11	无理数的本源极限表达式	第1章	2.4
0.5	无理数/全能近似实数/近似实数/近似值	简介	2	1.12	区间套	第1章	3
0.6	理想点/近似点/全能近似点	简介	3.1	1.13	上/下确界	第1章	3
0.7	近似现实数轴/近似数轴	简介	3.2	1.14	全能近似足够小	第1章	4.1
0.8	全能近似数轴	简介	3.2	1.15	全能足够大数列	第1章	4.1
0.9	理想数轴	简介	3.2	1.16	有穷集合	第1章	4.2
0.10	近似实数集/全能近似实数集	简介	3.3	1.17	无穷集合/理想无穷大	第1章	4.2
0.11	全能足够小/无穷小变数/无穷小量/无穷小	简介	4.1	1.18	非正常集合的一种类型	第1章	4.2
0.12	右(左)全能近似导数/右(左)理想导数	简介	4.1	1.19	近似正整数的平方数集合	第1章	4.3
0.13	函数的右、左函数微分	简介	4.3	1.20	能行可判断性	第1章	8
0.14	全能近似定积分	简介	4.4	2.1	理想点/近似点/全能近似点	第2章	1
0.15	全能近似函数/近似函数	简介	5	2.2	近似直线段/近似直线/全能近似直线段/全能近似直线	第2章	2
1.1	自然数的标准序列	第1章	1.2	2.3	线段的近似合同	第2章	4
1.2	近似自然数集合/全能近似自然数集合序列	第1章	1.2	2.4	理想线段的理想合同	第2章	4
1.3	自然数的加法运算	第1章	1.2	2.5	近似长度/正实数	第2章	4
1.4	自然数函数的无穷数列	第1章	2	2.6	理想长度/正实数	第2章	4
1.5	数列的收敛性	第1章	2	2.7	近似数轴	第2章	5
1.6	康托尔基本数列	第1章	2.2	2.8	全能近似数轴	第2章	5
1.7	等价的康托尔基本数列	第1章	2.2	2.9	理想曲面/近似曲面	第2章	6

续表

编号	定义名称	章	节	编号	定义名称	章	节
2.10	两点间的距离	第 2 章	6	3.3	好函数	第 3 章	1
2.11	点到直线和曲面的距离	第 2 章	6	3.4	全能近似函数	第 3 章	1
2.12	点重合	第 2 章	6	3.5	最大值与最小值	第 3 章	2
2.13	点与面的属于关系	第 2 章	6	3.6	自变数的微分	第 3 章	3.2
2.14	近似平面/全能近似平面序列	第 2 章	6	3.7	理想导数/全能近似导数/近似导数	第 3 章	3.3
2.15	近似射线/全能近似射线序列	第 2 章	7	3.8	函数微分	第 3 章	4.1
2.16	角	第 2 章	7	3.9	全能近似定积分	第 3 章	5
2.17	图形的近似合同	第 2 章	7	3.10	可求长曲线	第 3 章	7.2
2.18	角的理想合同	第 2 章	7	3.11	曲线	第 3 章	7.2
2.19	近似圆周	第 2 章	8.2	4.1	物体的固有时间、空间间隔不变性的标量性定义	第 4 章	4.2
2.20	点的介于概念	第 2 章	9	4.2	跟随坐标系运动的物体固有速度	第 4 章	4.3
2.21	近似平行线	第 2 章	10	4.3	光速	第 4 章	4.3
2.22	临界近似平行线/超近似平行线/临界平行角/平行距	第 2 章	10	4.4	闵可夫斯基世界	第 4 章	4.5
2.23	近似射线	第 2 章	10	4.5	原本时空坐标/派生坐标系	第 4 章	4.11.1
2.24	理想平行线/欧几里得平行线	第 2 章	10	5.1	全能近似函数	第 5 章	3
3.1	理想函数	第 3 章	1	5.2	一维波动方程混合问题的全能近似解	第 5 章	3
3.2	连续函数	第 3 章	1	5.3	全能近似傅里叶积分变换	第 5 章	6.2

表 0.2　公理索引表

编号	公理名称	章	节	编号	公理名称	章	节
0.1	理想长度/真值	引论	3.1	1.8	实数公理	第 1 章	2.3
0.2	康托尔基本数列与极限关系	简介	2	1.9	理想无穷大	第 1 章	4.1
0.3	理想点	简介	3.1	1.10	正常集合的一个性质	第 1 章	4.2
0.4	理想实数集	简介	3.3	1.11	理想正整数的平方数集合	第 1 章	4.2
1.1	初始自然数公理	第 1 章	1.2	1.12	正有理数集合	第 1 章	4.2
1.2	继数存在公理	第 1 章	1.2	1.13	理想实数集合	第 1 章	4.2
1.3	继数第一性质公理	第 1 章	1.2	2.1	理想点	第 2 章	1
1.4	继数第二性质公理	第 1 章	1.2	2.2	理想直线段	第 2 章	2
1.5	归纳公理	第 1 章	1.2	2.3	理想数轴	第 2 章	5
1.6	理想自然数集合	第 1 章	1.2	2.4	理想数轴的完备性公理	第 2 章	5
1.7	无穷自然数不存在公理	第 1 章	1.2	2.5	现实空间的二维性	第 2 章	6

续表

编号	公理名称	章	节	编号	公理名称	章	节
2.6	理想平面	第2章	6	2.10	理想圆周	第2章	8.2
2.7	两面相交	第2章	6	2.11	近似现实平行线	第2章	10
2.8	现实空间的三维性	第2章	6	2.12	巴士公理	第2章	9
2.9	理想射线	第2章	7	3.1	事件发生的概率	第3章	7.6

表 0.3 定理索引表

编号	定理名称	章	节	编号	定理名称	章	节
0.1	无尽循环小数的极限	简介	2	2.7	全能近似数轴与理想实数的对应关系	第2章	5
0.2	导函数的极值定理	简介	4.1	2.8	线段与点的对应关系	第2章	5
0.3	函数增量与微分的全能近似相等关系	简介	4.3	2.9	理想数轴	第2章	5
1.1	自然数集合的一个性质	第1章	1.2	2.10	点与面的关系	第2章	6
1.2	自然数加法的唯一性	第1章	1.2	2.11	全等三角形	第2章	7
1.3	无尽循环小数的极限	第1章	2.1	2.12	理想圆周	第2章	8.2
1.4	定理1.2的逆定理	第1章	2.1	2.13	圆的内接、外切正多边形	第2章	8.2
1.5	理想实数的三分律定理	第1章	2.4	2.14	阿基米德公理	第2章	9
1.6	康托尔基本数列的收敛性	第1章	2.4	2.15	康托尔公理	第2章	9
1.7	柯西收敛原理与理想实数的完备性	第1章	3	2.16	近似平行线的存在定理	第2章	10
1.8	区间套定理	第1章	3	2.17	欧氏几何中平行线公理的依据	第2章	10
1.9	迫敛性定理/夹逼准则	第1章	3	2.18	欧几里德平行线的存在性	第2章	10
1.10	单调有界数列收敛定理	第1章	3	2.19	欧几里德平行线的充要条件	第2章	10
1.11	确界存在定理	第1章	3	2.20	第五公设	第2章	10
1.12	海涅-波莱尔(Heine-Borel)有限覆盖定理	第1章	3	3.0	预备定理/局部保号性定理	第3章	2
1.13	魏尔斯特思(Weierstrass)定理	第1章	3	3.1	最大值与最小值定理	第3章	2
1.14	自然数的正常集合	第1章	4.2	3.2	极值定理	第3章	3.4
1.15	自然数的非正常集合	第1章	4.2	3.3	函数增量与微分的等价关系	第3章	4.1
1.16	有穷自然数的二进位表示	第1章	5.2	3.4	可求长曲线定理	第3章	7.2
1.17	正无穷大的二进位表示	第1章	5.2	3.5	弱海涅定理	第3章	7.5
2.1	理想点	第2章	1	4.1	物体的固有时间、空间间隔不变性定理	第4章	4.2
2.2	过两点的理想直线唯一性	第2章	2	5.1	δ-函数的摘值性公式	第5章	2.2
2.3	过两点的理想直线段的唯一性	第2章	2	5.2	定义5.2的依赖定理	第5章	3
2.4	理想直线与其上点的多少关系	第2章	2	5.3	连续函数的第一种全能近似表达式	第5章	4
2.5	理想合同	第2章	4	5.4	连续函数的第二种全能近似表达式	第5章	4
2.6	理想合同线段的理想长度相等	第2章	4				

法则索引

0.1/1.1 康托尔基本数列的极限是否为有理数或无理数判定法则　简介§2/第 1 章§2.4

0.2/1.2 康托尔基本数列的四运算法则　简介§2/第 1 章§2.4

1.3 正常与非正常集合的判定法则　第 1 章§4.1

假设与假设推论索引

0.1 度量假设　引论§3.1

0.1 度量假设的推论　引论§3.1

性质索引

性质 2.1 线段近似合同的可判定性　第 2 章§4

性质 2.2 线段近似合同的有限次传递性　第 2 章§4

性质 2.3 线段近似合同的有限次可加性　第 2 章§4

推论索引

推论 2.1 理想数轴是一条理想直线第 2 章§5

推论 2.2 理想数轴上存在着与理想实数集中一一对应的理想点　第 2 章§5

推论 2.3 理想数轴上,除了这些理想点外没有任何其他理想点　第 2 章§5

推论 2.4 三角形的内角和等于 180°　第 2 章§10

推论 3.1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的理想导数存在,则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大(小)的必要条件是这个理想导数为 0　第 3 章§3.4

集合构造表索引

表 1.1 正有理数的集合构造表　第 1 章§4.3

表 1.2 实数的集合构造表　第 1 章§4.3

表 1.3[1,2)可列性构造表　第 1 章§4.4.1

表 1.4[1,2)可列性构造表的编号表　第 1 章§4.4.1

表 1.5 自然数集的可构成子集构造表　第 1 章§4.4.3

表 1.6 自然数集的可构成子集编号表　第 1 章§4.4.3

目　录

自序

前言

定义、公理、定理、法则与性质等索引表

引论 …… 1

一、问题的提出 …… 1

1　数学理论中的一些困惑问题 …… 1

2　释疑解惑的思路 …… 2

3　全能近似分析释义举例 …… 2

3.1　测不准原则与直线长度极限性的公理性定义 …… 2

3.2　时空无限可分性 …… 4

4　全能近似分析的主要特点 …… 5

4.1　全能近似分析体系的哲学依据与阐述基本数学概念的模式 …… 5

4.2　如何对待无穷的概念与极限问题 …… 5

4.3　如何对待形式逻辑与辩证逻辑的问题 …… 5

4.4　数学的本质与基础问题 …… 6

4.5　纯粹数学与应用数学的问题 …… 6

4.6　排中律与反证法的应用问题 …… 7

参考文献 …… 7

二、快速阅读本书●全能近似分析简介 …… 8

1　全能近似分析的基本思想 …… 8

2　全能近似分析中的实数理论简介 …… 8

3　几何基础中的一些问题与全能近似数轴的概念 …… 10

3.1　几何基础中的一些问题 …… 10

3.2　全能近似数轴概念 …… 10

3.3　实数集与线段的构成理论及其初步应用 …… 11

3.4　飞矢不动问题的解释 …… 12

4　全能近似导数、微分与积分 …… 12

4.1　全能近似导数的概念与极值定理 …… 13

4.2　瞬时速度的真正含义 …… 14

4.3　全能近似微分的定义及其应用 …… 14

4.4　全能近似定积分的定义及其应用 …… 15

5　全能近似函数及其应用基础 …… 15

6 小结 …… 17
参考文献 …… 18
第 1 章 全能近似分析中的代数基础 …… 19
1 自然数、自然数集合理论中的问题与革新 …… 19
1.1 自然数、自然数集合理论中的问题 …… 19
1.2 自然数理论的改进 …… 20
2 实数理论的问题与革新 …… 22
2.1 无尽循环小数的真实意义及其与分数、整数的真实关系 …… 22
2.2 现行实数理论的不当之处 …… 24
2.3 无理数与无尽不循环小数的关系与变革 …… 26
2.4 实数理论革新的要点 …… 27
3 全能近似分析实数理论在极限理论中的重要应用 …… 30
4 无穷大、无穷小与无穷集合的基本概念 …… 34
4.1 无穷小与无穷大的基本概念 …… 34
4.2 无穷集合的基本概念 …… 35
4.3 其他几个重要的无穷集合的构造方法 …… 36
4.4 无穷集合可列性问题的讨论 …… 38
5 无穷基数与连续统假设问题 …… 42
5.1 无穷基数问题 …… 42
5.2 连续统假设问题 …… 42
6 伽利略困惑的解决方法 …… 44
6.1 伽利略困惑与张锦文的见解 …… 44
6.2 现行集合论中的问题 …… 44
6.3 我们的解决方法 …… 45
7 罗素悖论问题 …… 46
7.1 罗素悖论的原意 …… 46
7.2 罗素悖论性质的新悖论及其消除方法 …… 47
7.3 罗素悖论的彻底消除方法 …… 48
8 不可判断问题的概念与对待方法 …… 49
参考文献 …… 50
第 2 章 全能近似分析中的几何构建基础 …… 51
现行几何基础中的根本问题与解决问题的基本思想 …… 51
1 点的辩证概念 …… 51
2 线段与直线的辩证概念 …… 52
3 点、线段概念在解释两个悖时的应用 …… 53
3.1 关于飞矢不动问题的解释 …… 53
3.2 关于瞬时速度的解释 …… 53
4 线段的近似合同与理想合同 …… 54

5 全能近似数轴 …… 55
6 面和属于的概念及其相应的结合公理 …… 57
7 射线、角的辩证概念与角的合同 …… 58
8 圆与圆周长的定义与计算问题 …… 60
8.1 圆和圆周长定义问题的提出 …… 60
8.2 理想圆周的定义与圆周长的计算问题 …… 61
9 理想直线上点的介于概念、顺序定理与度量定量 …… 62
10 平行线问题 …… 63
11 几何理论应用中的“否定之否定式”过程 …… 65
12 全能近似分析中几何理论的应用 …… 66
12.1 勾股定理的内涵与第一次数学危机的解决 …… 66
12.2 时空无限可分性的解释 …… 67
12.3 关于阿基里斯追不上乌龟的芝诺悖论解释 …… 67
12.4 关于第二次数学危机的解释 …… 69
12.5 多维抽象空间的问题 …… 69
参考文献 …… 70
第3章 全能近似分析中的函数基础与微积分 …… 71
1 理想函数与全能近似函数 …… 71
2 最大值、最小值定理证明的改进 …… 72
3 微分与导数定义的改进 …… 73
3.1 现行微积分学中所存在的问题 …… 73
3.2 全能自变数的微分定义 …… 74
3.3 理想导数与全能近似导数的定义 …… 74
3.4 充要条件的极值定理及其应用 …… 75
4 函数微分的概念及其在函数增量、间接误差估计中的应用 …… 77
4.1 函数微分的概念及其与函数增量的关系 …… 77
4.2 间接测量误差界的计算 …… 79
5 全能近似定积分 …… 79
6 采用理想定积分求解应用问题时的一个值得注意的条件 …… 80
7 全能近似函数分析的应用 …… 81
7.1 现行函数理论在一些问题解释上所存在的缺陷 …… 81
7.2 关于可求长曲线的讨论 …… 82
7.3 康托尔分布函数的分布密度问题 …… 82
7.4 关于常、偏微分方程求解中所存在的一些问题的讨论 …… 84
7.5 关于海涅定理证明的讨论 …… 85
7.6 关于概率论基础问题的讨论 …… 85
8 建立数学理论的两种模式与检验标准 …… 87
参考文献 …… 87

第 4 章　全能近似分析在物理学中的应用 ………………………………………… 88
1　物理定律的近似性……………………………………………………………… 88
2　点电荷势函数表达式的改革与一个发散积分的消除……………………… 88
3　电场强度与势能计算公式的证明及其适用范围…………………………… 89
4　全能近似分析在狭义相对论中的应用……………………………………… 94
4.1　狭义相对论中的基本问题……………………………………………… 94
4.2　时间间隔、空间间隔的不变性标量定义 ……………………………… 95
4.3　不变性光速的定义……………………………………………………… 96
4.4　引力场中的光速测定…………………………………………………… 96
4.5　以光源为坐标原点的四轴正交系……………………………………… 97
4.6　光速与观测者的运动速度关系………………………………………… 98
4.7　关于光行差问题的讨论………………………………………………… 98
4.8　关于火车问题的讨论…………………………………………………… 99
4.9　关于双星观测与迈克耳逊—莫雷实验问题的讨论 ………………… 101
4.10　时空不变标量性与局域性的闵可夫斯基世界的坐标变换………… 101
4.11　时空间隔的实测、时钟校对、时钟快慢与时钟佯谬问题………… 103
参考文献…………………………………………………………………………… 105
第 5 章　全能近似分析在数学物理方程中的应用……………………………… 106
1　数学物理方程中的近似性 …………………………………………………… 106
1.1　数学物理方程中定解问题的提出与表达 …………………………… 106
1.2　数学物理方程中的积分变换 ………………………………………… 106
1.3　涉及 δ-函数定解条件的建立问题 …………………………………… 106
2　δ-函数的全能近似表达式的多样性与摘值公式 ………………………… 107
2.1　第一类对称型 δ-函数的全能近似表达式 …………………………… 107
2.2　摘值公式及其证明 …………………………………………………… 108
2.3　第二类对称型 δ-函数的全能近似表达式 …………………………… 110
2.4　第一类非对称型 δ-函数全能近似表达式 …………………………… 111
3　波动方程混合问题的全能近似解 …………………………………………… 112
4　连续函数的杜阿迈(Duhumel)叠加积分 …………………………………… 114
5　非齐次弦振动问题的冲量原理法 …………………………………………… 116
6　全能近似傅里叶积分变换 …………………………………………………… 118
6.1　问题的提出 …………………………………………………………… 118
6.2　全能近似傅里叶积分变换的概念及应用 …………………………… 119
6.3　发散于无穷大的傅里叶积分变换 …………………………………… 123
参考文献…………………………………………………………………………… 126
附录Ⅰ　无理数的本源性极限表达式与一个新实数的研究…………………… 127
附录Ⅱ　三分律的反例与数学基础……………………………………………… 137
附录Ⅲ　无理数与有理数的判别与不可测集合的存在问题…………………… 142

引　　论

一、问题的提出

1　数学理论中的一些困惑问题

(1) 线段的长度是实数吗？它会不会是超实数？时空是不是连续的，即是不是无限可分的？

(2) 0.3 能不能等于 1/3？$\sqrt{2}-2/3$ 等于什么？$e^{\sqrt{2}}$等于什么？π 究竟等于什么？

(3) 什么是无穷？无穷有没有终了？无穷大是变数还是定数？无穷小究竟又是什么呢？

(4) 点有没有大小？没有大小的点又是如何构成有长度的线段呢？打靶时击中靶心的概率是多大？物体按照瞬时速度运动的时段又是多长？

(5) 平行线的真实意义是什么？欧几里德平行线公理能不能作为定理？欧氏几何与非欧几何的实践意义与应用场合又有什么不同？

(6) δ-函数要不要有函数值？不可求长的曲线存在吗？圆周长是如何定义的？又如何进行计算？

(7) 数学的基础到底是什么？什么又是无穷集合？集合论或数理逻辑是数学的基础吗？

(8) 数轴是怎样构成的？实数集的基数到底是什么？伽利略的集合论困惑又该如何解决？

(9) 两个实数 α、β 之间，$\alpha=\beta$、$\alpha<\beta$、$\alpha>\beta$ 这三种关系中，是不是有且只有一个成立？布劳维尔(Brouwer)反例又该作如何解释？

(10) 维尔斯特拉斯(Weierstrass)定理的证明中排中律能不能应用？反证法的使用又有没有什么准则呢？

(11) 海涅(Heine)定理的反例该如何消除？这个定理到底能否成立？又如何成立？

(12) 选择公理的争论如何解决？巴拿赫-塔斯基(Banach-Tarski)分球奇论如何解决？

(13) 导数为什么要用极限方法计算？不用这种方法行不行？非标准分析能不能代替现行数学分析？

(14) $\dfrac{1}{|t|}$的傅里叶积分变换究竟是什么？

(15) 电学理论中发散积分该如何消除？

(16) 在运动中时钟是不是会变慢？

(17) 数学理论中形式公理系统的无矛盾性又该如何解决？

2 释疑解惑的思路

曹俊云从 1962 年就开始对“连续型随机变量的基本事件发生的可能性是否为 0”、“没有大小的点是如何构成有长度的线段”和“物体按照它的某一个瞬时速度运动的时段长是否为 0”这三个类似的问题进行探讨. 为了解决这三类问题，作者曾把康托尔的超限数扩充为可以进行加、减、乘、除运算的扩充实数域. 其中，在这种数域中包含着“大于 0 而又小于一切正实数的实无穷小数”，其结构实质与 A. 鲁宾逊的“非标准分析数域”或称“超实数域”相类似. 但在使用这种数域解释上述三个问题时，又遇到了新的问题. 这个问题是：虽然根据这种数域可以说点的大小是正的实无穷小，但这时原来的点中又有更小的点，那么这些更小的点的大小又是什么呢？

就点的概念来讲，应区分为没有大小的理想点与有大小但其大小又足够小的近似点两类，并用对立统一法则去描述这二者之间的关系. 使用这种对立统一法则不仅可以解释上述三个问题，而且还可解释两千多年前芝诺所提出的“飞矢不动”等问题. 这种观点的实质是：采用了理想与现实、精确与近似之间的对立统一关系.

其次，数学上的“无穷”含义是什么？从芝诺(Zeno)到现在，始终存在着实无穷与潜无穷这两种观点的争论. 若否定实无穷观点，并肯定“无穷是无有穷尽”之意，那么即可把无穷大、无穷集合、无穷大平面、无穷长直线等都视作为人们无法构成的理想事物. 在研究这些理想事物时，又必须使用无穷依赖于有穷的思想方法，这样便可顺理成章地解释“三分律反例”问题、“平行线公理的争论”问题与“集合论中的悖论”等问题.

第三，测不准原则是讨论直线段长度时所必须尊重的原则. 根据这个原则，重新对实数理论、数轴概念、初等几何、微积分学、数学物理方程、积分变换等问题进行审视，其结论就是数学、物理理论等都是人们对现实世界的观测及其为了解决物理量的表达方法，其实质就是理论与实践的对立统一. 因而可将物理量区分为理想、近似、全能近似三个层次；其中，把理想性物理量定义为误差界趋向于 0 时的极限. 因而，满足误差界的足够准近似方法就是理论与实践相结合的根本方法；数学理论则是根据近似方法从实践中抽象出来，而又以近似方法为手段应用于生产实践的. 这正是本书的基本思想.

3 全能近似分析释义举例

全能近似分析是以实践为基础的分析，它与现行数学分析有着基础性差别，而与非标准分析则有对立性质的差别. 本书具有数学基础的意义，也具有揭示数学理论的真谛与应用方法的特征. 下面仅以两个例子先加以说明.

3.1 测不准原则与直线长度极限性的公理性定义

对于线段长度，人们并无法得到“真值”的绝对准确地测定方法，这是必须尊重的事实，也是一个原则，并称“尊重这个事实的原则”为**测不准原则**. 根据这个原则，我们应当知道：任何线段都有一个真值为其理想长度，但是，我们却没有表示线段长度真值的绝对准测量方

法. 这一原则可以作为建立数学理论的**第一公理**. 根据这一公理，对线段就需要区分为理想长度(即真值)、近似长度(测定值应当看作是具有一定误差界的近似长度)两个层次. **理想长度与近似长度之间有着相互依赖的对立统一关系**. 若没有理想长度，那么近似长度就失去了与之近似的对象；反之，没有近似长度，理想长度的数字表示就无法得到.

根据测不准原则，我们必须知道**有理数的两种含义**，一是有理数可以绝对准地表示线段的长度，二是可以在满足某个误差界的要求下近似表示线段的长度. 其中，第一种情形是有理数算术运算结果成立的情形；而第二种情况则可以是不成立的；并认为第一种情况是很好的情况. 然而，在使用有理数表示线段的长度时，我们并无法判定它就一定是第一种情况，所以，算术运算结果能成立的第一种情况只是一种理想情况. 为此，我们提出以下直线段长度的度量假设与极限性的公理性定义.

首先，由实践可知：随着测量工具、测量方法的改进，测量精度可以不断提高. 因此，我们可以提出如下假设.

假设 0.1(度量假设)　随着度量工具、度量方法的改进，对于以 0 为极限的误差界序列 $\left\{\varepsilon_n=\frac{1}{10^n}\right\}$ 中的任意小误差界 ε_n，都可以在适当的测量工作之后，得到满足这个误差界要求的、线段长度的近似表达数字 q_n.

比如，尺子的刻度可以准确到 $1/10$、$1/10^2$ 或准确到对任意自然数 n 的 $1/10^n$，但却不能准确到无限多位，所以这些 q_n 都是有尽小数；而有尽小数都是分数(即有理数). 根据测不准原则，这些 q_n 只能是线段长度的测定值、线段理想长度的近似值.

度量假设的推论 0.1　设 q_n 是度量假设 0.1 中的有理数，则由 q_n 所构成的无穷数列 $\{q_n\}$，是以有理数为项的康托尔基本数列.

公理 0.1　当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，线段长度的测定值序列 $\{q_n\}$ 的极限，叫做线段长度的真值(即理想长度).

定义 0.1　对于线段长度的度量来讲，称**度量假设的推论** 0.1 中无穷数列 $\{q_n\}$，为线段的全能近似长度序列(**或简称为全能近似长度**). 这个序列中的每一项都是满足一定误差界要求的线段近似长度.

公理 0.1 给出了线段长度的理想长度(即真值)的定义. 那么公理 0.1 中的理想长度是不是实数呢？为此，我们可以想到：如果针对所给出的误差界序列且每次都取"十进位小数"形式的不足近似值，可以得到 0.3, 0.33, 0.333, …，或 1.4, 1.41, 1.414, …，这样的序列可简写为 0.333..., 1.414…，这就是无尽循环与无尽不循环小数. **按照现行教科书中的定义，它们就是实数**. 但是，根据测不准性质，这个数列是写不到底的，所以这种数列的极限(即真值)具有理想性. 与此相对应，将在第 1 章关于实数理论的改革中，我们称这种具有极限性质的理想长度(真值)是**理想实数**.

由此可以看出，**线段的真值**只能用具有理想性的、但实际上达不到的**理想实数**表示. 这是一种在尊重直线段长度测不准的情况下，"既有理想又有实践依据"的说法. 事实上，在通常的数学、物理等教科书中，当说到线段长度时，通常是认为"每一条线段的长度都是一个实数". 而在《非标准分析》中，线段长度又可以是包含实无穷小与实无穷大的超实数. 这就说明了现行数学理论并没有把这个问题讲清楚. **而这里的叙述则是充分尊重测不准性质的、有根**

据的，其依据就是上述度量假设 0.1 与公理 0.1. 此外，从我们的分析可以看出：在表示线段长度时，超实数是不需要的，因为实数已经是具有理想性的事物了（关于实数与超实数的问题，将在第 2 章数轴概念中作进一步地讨论）.

最后还需要指出：①虽然理想长度是精确的表示，但理想长度是在对近似长度序列取极限的结果，而**“极限值”又具有不能达到的性质，这是事实.** 若不尊重这个事实，即认为极限能达到、理想长度一定能得到的想法，则是行不通的、缺乏实践依据的想法. 事实上，桌子、椅子、宇宙飞船等许多问题都是在使用“满足误差界的足够准近似长度”的情况下制造出来的，这也就是说，对于线段的理想长度，并不能过分追求. 理想长度只是在暂时脱离生产实际的纯数学理论研究阶段中，才可以临时性地被看作“误差界趋向于 0 时近似长度的极限”的理想事物，也就是说：理想事物只是在暂时脱离生产实际的纯数学理论研究中是必不可少的. ②与现行测度论所给出的线段长度理论不同，这儿从公理 0.1 出发的线段长度理论，是从线段长度测量的实际测量情况出发的、密切联系实践的长度，并不存在“不可测集”与“较难的测度问题”.

3.2 时空无限可分性

根据线段长度的测不准性质，将线段长度等分为二、三、四、五、…的工作，只能在近似意义下进行. 这是因为在测不准原则下，足够小的线段长度已无法测定，所以在《庄子》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的工作，是不能无限地进行下去的. 只有在测量误差可以无限减小而且可以趋向于 0 的理想情况下，才可以说“日取其半”的工作可以无限地进行下去. 因此可以说**无限可分性是一种理想性质.** 与线段的理想长度类似，这种理想的无限可分性也是误差界趋向于 0 时的、近似可分性的极限. 根据这个性质，可以提出如下定义 0.2.

定义 0.2 具有无限可分性的现实数量叫做**连续性现实数量.**

虽然根据这个定义 0.2，我们可以说时段、线段的长度、物体的重量、空气的湿度等都是具有连续性的现实数量. 但根据**“无限可分性是一种理想性质”的事实，还应当说，时空具有连续性（即具有无限可分性）的说法只是一种理想.**

那么这种认识对于现实的时间、空间理论相容吗？为此，就需要研究一下现实的时空是不是无限可分的问题. 对于这个问题的讨论，可以说从芝诺到现在，一直是个争论着的问题. 虽然从现行数学理论上来讲，近代的极限理论、实数理论就是建立在时空无限可分性之上的理论. 但另一方面，爱因斯坦等物理学家又提出了修改这个经典时空观的意见. 这个意见认为：“应当存在着某种所谓细胞——空间与时间量子”. 而且这种量子“简直太小了，任何计时器也不可能测出那样的时间，如一亿亿亿分之一秒. 对长度来说也是如此，一厘米的一亿亿亿分之一也是测不出来的”.

从量子力学观点来看[1]，“时空的测不准原理”确实是需要的. 若从测量工作的实际情况来看，“时段、线段长度”的绝对准实测方法也确实是不存在的，而只能是在满足一定误差界下的近似. 因而可以说，我们的线段长度概念与时空无限可分性理论，与量子时空观成立与否都不矛盾. 这是因为“极限”都是不能达到的理想事物，在宏观上，即在忽略测量误差的情况下，时空就可以是无限可分的；但在微观上，即在测量误差不能忽略的情况下，又可以说微小粒子是不能再分的，即时空不是无限可分的.