现代数学基础丛书 130

自相似集的结构

——Hausdorff 测度与上凸密度

（第二版）

周作领 瞿成勤 朱智伟 著

科学出版社
www.sciencep.com

57

现代数学基础丛书 130

自相似集的结构

——Hausdorff 测度与上凸密度

(第二版)

周作领 瞿成勤 朱智伟 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书主要研究满足开集条件的自相似集，从Hausdorff测度和上凸密度的计算与估计到其内部结构的理论研究，都有比较全面的阐述. 全书共分四章和两个附录. 第 1 章介绍基本定义、符号和基本命题；第 2 章讨论自相似集；第3章讨论上凸密度；第4章讨论自相似集的结构和相关问题；附录A介绍必要的集合论和点集拓扑的基础知识；附录B介绍必要的测度论基础知识. 第二版在第一版的基础上对第 3 章和第 4 章及两个附录做了比较大的修改和补充.

本书可作为高等院校分形几何方向研究生、教师的教学用书，亦可供相关方向研究人员和技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

自相似集的结构：Hausdorff 测度与上凸密度/周作领，瞿成勤，朱智伟著. —2版. —北京：科学出版社，2010

(现代数学基础丛书；130)

ISBN 978-7-03-026284-4

Ⅰ.自… Ⅱ. ①周… ②瞿… ③朱… Ⅲ.几何测度论 Ⅳ. O174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 237783 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：郑金红

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 1 月第 二 版 印张: 13

2010 年 1 月第二次印刷 字数: 234 000

印数: 3 001—5 500

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

符 号 表

$A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$ 或 $A_n \to_{\mathcal{H}} A$	紧致集合序列在 Hausdorff 度量意义下的收敛
$B(x,r)$	x 的半径为 r 球形 (开) 邻域或 r 邻域
$B(E,r)$	集合 E 的半径为 r 的球形 (开) 邻域
$\mathfrak{B}(X)$	空间 X 的 Borel σ 代数
C	中间三分 Cantor 集
$\mathcal{C}$	空间的紧致集合族
$\overline{D}_c^s(E,x)$	集合 E 在点 x 处的上凸密度
$\dim_B$	盒维数
$\underline{\dim}_B$	下盒维数
$\overline{\dim}_B$	上盒维数
$\dim_{\mathcal{H}}$	Hausdorff 维数
$\dim_p$	填充 (packing) 维数
$\mathrm{ent}(f)$	紧致系统 (X,f) 的拓扑熵
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
2^X	集合 X 所有非空子集的集合
E^0	E 的内集
E_1	E 中上凸密度为 1 的集合
$\|E\|$	集合 E 的直径
$E(X,f)$	紧致系统 (X,f) 的遍历测度的集合
$F(f)$	紧致系统 (X,f) 的不动点集
$F(E)$	E 的所有相似压缩函数系的相似压缩的不动点的集合
$h_m(f)$	保测映射 f 的测度熵
$\mathrm{int}(E)$	集合 E 的内集
$I_1 :\sim_1$	E 中点按微结构的分类
$I_2 :\sim_2$	E 中点按上凸密度的分类
$\mathcal{H}^s(E)$	集合 E 的 s 维 Hausdorff 测度
$L^n(E)$	集合 E 的 n 维 Lebesgue 测度 (体积)
$M(X)$	紧致度量空间上全体概率测度的空间
$M(X,f)$	紧致系统 (X,f) 的不变测度的集合
M_x	紧致系统 (X,f) 沿点 x 轨道生成的不变测度的集合
N 或 Z_+	全体自然数或正整数
$\mathcal{P}^s(E)$	集合 E 的 s 维填充测度

$P(f)$	紧致系统 (X,f) 的周期点集
Q	有理数集合
$R(f)$	紧致系统 (X,f) 的回复点集
S_m	测度 m 的支撑
(X,f)	紧致空间上连续自映射构成的紧致系统
Σ_k	k 符号空间
$\sigma:\Sigma_k\to\Sigma_k$	k 符号空间上的转移自映射
$\Omega(f)$	紧致系统 (X,f) 的 Ω 极限集
∂E	E 的边界集
$\aleph_0$	有理数的基数
$\aleph$	无理数的基数

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书第一版出版于 2008 年 7 月, 至今不过一年有余. 第二版不仅纠正了第一版中的差错, 更重要的是补充了作者一年多来新的研究成果.

满足开集条件的自相似集是最简单的一类分形. 这类分形集有两大特点, 即有较好的 "精细" 结构或称 "无穷嵌套的自相似结构" 和它们的 $\mathcal{H}$ 维数被完全确定, 这为系统研究其 $\mathcal{H}$ 测度的理论和计算提供了最基本的条件. 比满足开集条件更大的分形族, 如自仿集族、Moran 集族、s 集族等, 或是因为 $\mathcal{H}$ 维数目前还不能完全确定, 或是 "精细" 结构不充分, 都无法作系统的 $\mathcal{H}$ 测度理论和计算研究.

人们虽然很早就知道 $\mathcal{H}$ 测度的计算是非常困难的, 但究竟困难到何种程度, 症结何在, 人们是远不清楚的, 以至于这项研究长期停滞不前, 甚至看不到任何希望. Falconer 引进的上凸密度概念 (连同他证明的重要定理) 是 $\mathcal{H}$ 测度理论和计算研究的转折点, 是这项研究的第一道曙光. 这个概念事实上孕育了一个新的研究领域 —— 自相似集的内部结构. 一个时期以来, 人们把自相似集的内部当成铁板一块, 似乎无结构可言, 至少无人触及这个问题. 自相似集的内部有结构吗? 当然有! 而且其复杂程度可以与天体的 "黑洞" 相比, 其中蕴涵了 $\mathcal{H}$ 测度计算困难的症结和研究出路. Falconer 引进的那道曙光洞穿了这个 "黑洞" 的一角, 使得人们有可能得窥其中的奥妙.

上凸密度是本书的概念源头. 作者引进和证明的 "部分估计原理"、"最好覆盖"、"最好形状" 等结果和概念都与上凸密度有关, 它们把原本不相干的问题联系起来, 使一系列新问题浮出水面, 使研究顿时活络起来. 每一个测度都对应有一个密度. 仔细研究可以发现, 上凸密度正是 $\mathcal{H}$ 测度所对应的密度. 发现这种对应并不重要, 重要的是随着上凸密度的引入, 由 Falconer 证明的那个定理 (即上凸密度为 1 的点集合可测且与原集合有相同的 $\mathcal{H}$ 测度) 揭示了两者间深刻的内在联系. 不同的点可以有不同的上凸密度. 为了刻画这个问题, 作者引进 "微结构" 的概念, 它是由上凸密度直接引申出来的. 所谓一个点的微结构, 就是指该点的一个开邻域在自相似集中的 "微环境". 概括而言, 自相似集 (极限集) 最后是由可数个包含整个自相似集的递减紧致集合序列的可数交生成的. 归纳地, 每多交一次, 多余的点就被多剥离一些, 可数交之后留下的点就构成自相似集本身. 在这个过程中, 每一个点都形成自己的 "微环境"(事实上, 即该点的一个开邻域与自相似集本身的交). 如果对具体的分形, 例如 Sierpinski 垫片或 Koch 曲线等进行考察, 这个过程是非常清楚的. 不同的点一般有不同的 "微环境", 正是点的 "微环境" 决定了该点基本性质,

包括该点的上凸密度，这种“微环境”就称之为“微结构”．从定义不难看出，有几何相似的微结构的点有相同的上凸密度，但反过来却一般不成立．有些问题看起来不会太困难，却一直无法解决，其原因往往都与微结构有关，例如，生成 Sierpinski 垫片的正三角形的边上的中点有不小于其顶点的上凸密度是明显的，但究竟是大于还是等于，这个问题不应该太困难，但至今确定不了．再如，Koch 曲线上面那个顶点有不小于其端点的上凸密度也是明显的，但究竟是大于还是等于，很长一段时间也确定不了．类似的例子还有很多，表面上看起来很简单的问题，却往往使人有无从下手之感而长期悬而不决．

从上面描述中可以看出，微结构一般是非常复杂的，甚至有些“难以捉摸”，计算 $\mathcal{H}$ 测度等所遭遇到的困难都与它有关．看起来，深入研究自相似集理论非得从微结构这个棘手的概念入手不可．

$\mathcal{H}$ 测度的计算是基础数学而非计算数学．本书从否定 Marion 的两个猜测开始．为了否定 Marion 的猜测，我们估计了 Sierpinski 垫片和 Koch 曲线的 $\mathcal{H}$ 测度的上限，这事实上开启了计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度的先河，但它只是起了把我们的研究引向深入的作用，而不是我们考虑的重点．从基础数学观点，计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度是“标”，而探讨自相似集的内部结构才是“本”，“本”不明而“标”焉能清？正是基于这种观点，我们对本书第一版的修改补充集中在第 3, 4 两章，其中包括一些新结果和提出的一些新问题，而更重要的是一些新的思考．另外，对两个附录也作一些补充．

维数和测度是分形几何两大支柱性概念，计算和估计分形的维数和测度是分形几何最基本的课题．维数的计算和估计研究已有多年历史并取得很多重要成果，例如，近年来动力系统与分形几何相结合，有人开始研究不变测度的维数问题，出现的一系列新问题对揭示动力系统的深入性质有着重要作用 [3,23]．但对测度而言情况却远非如此，可以说至今仍是一片空白．对最简单的满足开集条件的自相似集尚且如此，遑论其他．一般分形 (包括不满足开集条件的自相似集以及自仿集、Moran 集、s 集等) 的测度计算和估计应该说还没有提到日程上来，至多有些零星结果，远没有形成理论．本书专门讨论满足开集条件的自相似集，希望从这种最简单的情形入手，敲开测度理论研究和计算与估计的大门．自相似集结构的内容丰富繁杂，我们只不过刚刚开了一个头而已，希望能收抛砖引玉之效．限于作者水平，错误和纰漏在所难免，敬希读者不吝批评教正．

在撰写本书的过程中，作者得到了尹建东博士、李浩博士和陈仁莲博士的帮助，在此表示诚挚的感谢．本书的出版得到国家自然科学基金项目 (10971236) 的资助．

周作领

2009 年 7 月 22 日

第一版前言

分形几何是 20 世纪下半叶形成的几何学的一个新的分支, 研究的对象是不规则的几何图形. 经典几何的研究对象是规则几何图形: 线、面、体乃至流形, 它们之外的图形可统称为不规则图形或分形 (fractal), 特点是大都显得 "杂乱无章" 或涉及无限的生成过程. 早在分形几何形成之前, 自然界和科学研究中的这类不规则图形就大量存在, 诸如山峰的轮廓、海岸线、疲劳金属的断裂线或面以及 Cantor 集等. 过去人们对这类图形或回避或浅尝辄止, 这样做对当时的生产和科学研究影响不大, 因为较低的精确度就够了. 随着生产和科学的发展, 情况在改变, 对分形的处理和深入研究已是不可避免的了. 例如, 分形概念的提出和集大成者 Mandelbrot 曾提出这样的问题: "英国海岸线有多长?" [16,17], 这个看似简单的问题, 若给出严格的科学回答并非易事. 但正是这样的一类简单问题和其他发现, 孕育了一个专门以分形为研究对象的几何学新分支 —— 分形几何学. 如上所说, 分形或 "杂乱无章" 或涉及无限生成过程. 对于前者, 真正杂乱无章的图形人们还是无法处理的, 它们多少要有些规律: 某种精细结构. 而在数学上出现的分形大都属于后者, 如前面提到的 Cantor 集, 这样的集合往往具有某些怪异性.

Cantor 集是不可数的但有零长度. 另外的例子是 Koch 曲线或雪花曲线, 有零面积和无限长度. 出现这种 "体积" 或零或无限大的情况都是不便处理的, 它表明人们所使用的测量方式有欠缺. 能否通过适当改变测量方式避免这种情况发生? 单纯改变测量尺度 (单位) 是无法达到我们的目的的, 必须改变测量方式. 大约一百年前, Hausdorff 引进现在以他的名字命名的新的维数和测度: Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度 (以后简称 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度), 为人们提供了一种合适的测量方式. 这里的 $\mathcal{H}$ 维数一般不再是整数, 甚至不是分数, 而是非负实数. 每一个分形都有确定的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度, 正和经典几何中每一个 "图形" 都有确定的维数和 "体积" 一样, 它们是分形最基本的属性. 唯其如此, 计算或估计分形的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度就成了分形几何的最基本的课题, 是一切理论研究和实际应用的出发点. 但是, 这个课题太复杂也太困难了, 其中尤以计算和估计 $\mathcal{H}$ 测度为更困难. 如上所述, 分形多少要有些精细结构才便于研究. 一类最简单的分形是所谓满足开集条件的自相似集, 它们是一个区域由一组相似压缩函数经无限迭代压缩过程加上适当限制而最终生成的图形, 具有所谓 "无穷嵌套的自相似结构", 即每次压缩像都与原图形相似, 这种生成机制应该说是简单的和明了的, 对于这类分形, 其 $\mathcal{H}$ 维数的计算问题已被完满解决 (分形几何发展数十年来, 这是迄今为止最完美最漂亮的结果之一), 但其

$\mathcal{H}$ 测度情况却远非如此. 大体上说, 目前人们只知道它们是正的有限数, 如何计算甚至估计都是一片空白, 特别, 当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时更是如此. 关于 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度的结果有如此大的反差, 是令人惊异的, 也是对人们探求欲望的极大诱惑: 为什么生成机制如此简单明了的分形, 其 $\mathcal{H}$ 测度的计算竟如此困难? $\mathcal{H}$ 测度计算的困难已是共识, 例如, 文献 [34] 的一位审稿人指出 "Hausdorff measure is an important notion in the study of fractals. However, there are few concrete results about computation of Hausdorff measure even for some simple fractals. Part of reason is the difficulty of the problem." 但是, 人们对 $\mathcal{H}$ 测度计算的困难的认识是知其然而不知其所以然. 当 $\mathcal{H}$ 维数不大于 1 时, $\mathcal{H}$ 测度计算尚有些零星结果, 如经典的 Cantor 集, 而当 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 时, 至今没有任何具体结果. 有些学者认为, $\mathcal{H}$ 测度的计算可在有限步实现, 情况当然绝非如此.

本书的源头是国外一位学者提出的两个猜测. 1987 年, 加拿大学者 Marion 对两个经典的满足开集条件的自相似集: Sierpinski 垫片和 Koch 曲线 (均有 $\mathcal{H}$ 维数非整数大于 1) 的 $\mathcal{H}$ 测度的准确值提出猜测. 据作者所知, 这是对 $\mathcal{H}$ 维数大于 1(非整数) 的分形的 $\mathcal{H}$ 测度计算的首次探索和尝试, 但十余年内毫无进展, 既不能否定也不能证明. 这引起作者的兴趣并从此进入这一领域, 我们先后否定了这两个猜测, 得到一系列估计结果, 并进而发现, $\mathcal{H}$ 测度计算与上凸密度计算密切相关且在一定条件下两者等价. 上凸密度是一个被文献遗忘了的重要概念, 它首先出现在文献 [5] 中, 此后便在文献中消失. 本书的概念源头就是上凸密度这个概念, 从直觉上, 我们感觉到它似乎是开启进一步研究的钥匙. 正是这个概念导致我们更深一层的思考, 提出研究 "自相似集的结构" 的新领域, 并得出结论: $\mathcal{H}$ 测度计算困难的症结在于人们对自相似集内部结构一无所知. 我们曾把 "自相似集内部结构" 比作天体的 "黑洞", 而上凸密度是从这个 "黑洞" 里透露出的第一缕曙光, 它向人们揭示, 自相似集的内部不是铁板一块, 而是具有丰富的结构. 我们最后的结论是: $\mathcal{H}$ 测度的计算是基础数学而非计算数学, 好的计算方法只能改善精确度, 只有正确的计算模型才能导致准确的结果, 而正确计算模型的建立只能依赖人们对其内部结构的深入了解, "上凸密度" 正是开启自相似集内部结构研究的钥匙. 这条路我们已经走了近十年, 提出一些新方法和新概念, 如 "部分估计原理"、"最好覆盖" 、"几乎处处最好覆盖"、"最好形状", "微结构" 等, 也提出一些问题、猜测和新的研究课题, 得到一系列计算和估计结果, 我们的终极目标是建立与 $\mathcal{H}$ 维数的结果相适应的 $\mathcal{H}$ 测度计算的统一公式. 在理论上, 我们的目标已经达到, 即这样的统一公式已经建立. 在实际计算上, 我们的统一公式还不能应用, 因为它涉及一个更基本的领域: 凸集理论, 其中一个著名问题是优化问题, 即给定一个长度, 平面上以这个长度为直径的什么凸集包围的面积最大 (在高维空间可以提出类似问题)? 这个问题 (我们称为 "绝对优化问题") 在凸集理论中已获解决, 可我们更需要的是 "相对优化问题" 或 "带约

束条件的优化问题”. 而据我们所知, 这样的问题的研究在凸集理论中尚付阙如. 以平面为例, 我们的问题是这样的：给定一个长度和一点出发的两条射线, 问什么凸集包围的面积最大? 要求其以给定长度为直径且过该角的顶点并夹在该角的两边之间. 问题似乎很简单甚至初等, 可谓雅俗共赏了, 但至今没有答案! 更何况, 我们还要在分形上讨论凸集, 其难度更可想而知. 不管怎么样, 我们已经揭开了“自相似集结构”这个“黑洞”面纱的一角, 坚持下去会把我们引向深入. 2004 年, 我们在 *Nonlinearity* 上发表一篇综述文章[35], 总结了我们阶段性的研究成果, 提出 12 个开问题和一组猜测, 据了解, 至 2007 年底, 它已被下载 459 次, 是该杂志被下载次数最多的文章之一.

作者写作本书的动机是试图揭示 $\mathcal{H}$ 测度计算困难的“所以然”, 总结我们十年来的研究成果, 给出从 $\mathcal{H}$ 测度计算、上凸密度计算到自相似集结构研究的一个较全面系统的阐述, 主要是我们自己的研究成果的阐述. 本书可以说是自相似集的专门研究, 所以在取材上不求全面, 只以本书主题需要为限, 因而很多重要的内容将不包括. 在参考文献的选取上亦不追求全面, 如国内外学者在自相似集研究上也有不少重要成果, 但凡与本书旨趣不同者均未选入. 另外, 本书将采取边叙边议边提问题的写作方式. 但我们所提问题不是习题, 而是开问题甚至猜测. 我们所提出的问题有点类似拓扑学诞生之前的哥尼斯堡七桥问题, 为了解决这个问题, Euler 创造了被称作“一笔划”的新思想和新方法, 不但解决了哥尼斯堡七桥问题, 事实上孕育了拓扑学的诞生. 我们所提出的问题的解决也需要新思想和新方法.

本书共分四章和两个附录. 第 1 章属预备章节, 介绍基本定义、术语、符号和有关的基本命题; 第 2 章讨论自相似集; 第 3 章讨论上凸密度; 第 4 章讨论自相似集的结构和有关问题. 在附录 A 中简单介绍必需的集合论、点集拓扑基础知识, 而附录 B 则介绍测度论基础知识. 作者将力求封闭性, 但阅读本书还是要有一定基础的, 如符号动力系统和分形的一些基础知识等. 国内外已有不少有关分形的著作出版, 如文献 [4 ~ 7] 等, 读者如能粗读其中的部分内容, 对阅读本书将是大有裨益的.

本书的写作得到了很多人的帮助, 特别是尹建东博士、李浩博士、梁超博士和刘耿博士, 他们在本书排版、制图和校对过程中给了作者极大帮助. 朱智伟博士对本书初稿做了大量校对工作, 纠正了大量排版错误. 此外, 陈仁莲博士、罗俊博士也给作者很大帮助. 我要特别感谢的是文兰教授、苏维宜教授、井竹君教授和吴敏教授, 他们给了作者热情的鼓舞, 并在百忙之中为本书作了热情洋溢的推荐, 使作者有勇气把本书最终完成.

作者自始至终得到国家自然科学基金委员会的大力支持, 这是要特别说明的.

本书的写作始于 2007 年上半年, 至今不到一年, 时间多少有些仓促. 加之作者曾被一位老同学讥为“机盲”, 由 Word 转学 Latex, 耗去大量时间和精力, 写作过程中大部分时间都花在打字、排版、纠错和制图方面, 往往一个符号出错, 会使作

者半天之内焦头烂额、一筹莫展. 正因如此, 在细节斟酌上就显得不够. 加上水平有限, 错误和纰漏一定在所难免. 希望读者不吝赐教.

周作领

2008 年 2 月 29 日

目　录

第 1 章　维数与测度

分形 (fractal, 由拉丁文 fractus 演化而来, 意为“破碎”、“碎片”), 如我们在第一版前言中所说, 或“杂乱无章”或涉及无限生成过程. Mandelbrot 曾给出“试探性”(tentative) 的定义[4]:

(1) $\mathcal{H}$ 维数严格大于拓扑维数的集合 (图形) 称为分形.

但是, Mandelbrot 认为这样的定义并不适宜, 因为按这个定义, 一些高度不规则的对象将被排除在分形之外, 即它们相应的两个维数可能相等. 他后来收回这个定义, 于 1985 年给出另一个定义:

(2) 由部分组成的且每个部分均与整体相似的集合 (图形) 谓之分形.

按这个定义也可能把另外一些不规则的对象排除在外, 也不甚适宜. 到目前为止, 分形的统一定义尚未形成, 一般人们就把诸如“具有非负实维数的集合”、“具有精细结构的集合”以及“不规则的集合”等视为分形[5]. 不管怎样, 都涉及新的维数和相应的测度. 维数和测度有多种, 本书主要讨论 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度, 因此本章主要介绍这种维数和测度.

1.1　分形的例子

例 1.1.1　中间三分 Cantor 集.

这是读者在实变函数课中早已熟悉的内容, 是最简单的分形, 其构造如下: 在直线 R 上取单位线段, 记为 S_0; 把 S_0 三等分后去掉中间一段的内部 (叫做 1 湖), 得到两个长度为 $\frac{1}{3}$ 的线段 (叫做 1 基本线段或 1 岛) 组成的集合, 记为 S_1; 对 S_1 中的每一 1 基本线段重复上述程序, 并称去掉的两个线段的内部为 2 湖, 得到由四个长度为 $\frac{1}{9}$ 的 2 基本线段或 2 岛构成的集合, 记为 S_2. 这样的程序无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots$. 易见, S_i 由 2^i 个长度为 $\frac{1}{3^i}$ 的 2^i 基本线段构成 (各级湖共有 2^i-1 个). 非空集合

$$C=\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

就是中间三分 Cantor 集 (见图 1.1.1).

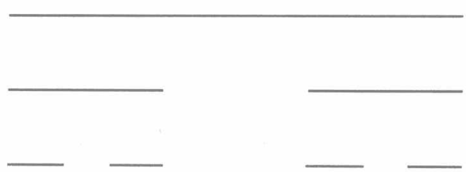


图 1.1.1　Cantor 集

例 1.1.2　Sierpinski 垫片.

在 R^2 上取单位正三角形, 记为 S_0; 分别连 S_0 三边的中点, 得到四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的三角形, 去掉中间一个的内部, 余下集合记为 S_1; 对 S_1 中每个小正三角形重复上述过程, 得到 S_2; 这样的过程无限进行下去, 得到 S_0, S_1, $S_2, \cdots$; 非空集合

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

即是 Sierpinski 垫片 (见图 1.1.2). 容易证明, 这是一个连通甚至弧式连通的集合.

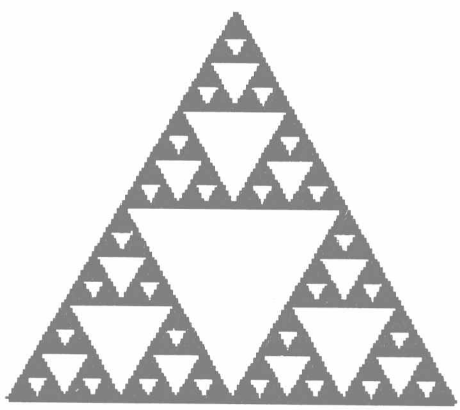


图 1.1.2　Sierpinski 垫片

例 1.1.3　Koch 曲线.

在 R^2 上取单位线段 K_0, 三等分后, 在中间一段上向上作正三角形并去掉底边的内部, 得到由四个长度为 $\frac{1}{3}$ 的线段构成的折线, 记为 K_1; 对 K_1 的每一线段重复上述过程 (作三角形时方向均向上). 这样的过程无限进行下去, 得到 K_0, K_1, $K_2, \cdots$. 易见, 在 Hausdorff 度量下, 存在极限

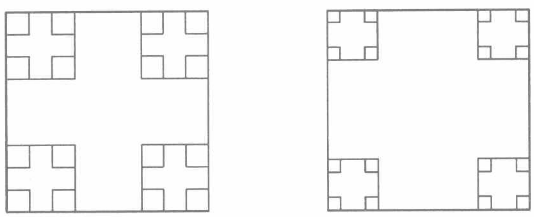
$$K_i \underset{\mathcal{H}}{\rightarrow} K,$$

K 即是 Koch 曲线 (见图 1.1.3). 可以证明, Koch 曲线, 甚至其上任意两点之间均有无限的欧氏长度.

图 1.1.3 Koch 曲线

例 1.1.4 $C\times C$, 亦称 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯, 其中 C 为中间三分 Cantor 集.

$C\times C$ 亦可按下述方式得到. 在 R^2 上取单位正方形 S_0, 每边三等分后, 分别连对边的对应分点, 得到 9 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形, 去掉中间的 5 个小正方形的并的内部后记为 S_1. 对 S_1 的每一个小正方形重复上述过程, 得到 S_2; 这样的过程无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, \cdots$, 非空集合 $S=\bigcap_{i=0}^{\infty}S_i$ 即是 $C\times C$(见图 1.1.4(a)). $C\times C$ 亦称为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$-Sierpinski 地毯.



(a) (b)

图 1.1.4 (a) $C\times C$; (b) $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$-Sierpinski 地毯

例 1.1.5 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$- Sierpinski 地毯.

在 R^2 中, 把单位正方形 S_0 每边四等分, 分别连对边对应分点, 得到 16 个边长为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形, 去掉中间的 12 个的并的内部, 记为 S_1; 对 S_1 的每个小正方形, 重复上述过程, 并无限进行下去, 得到 $S_0, S_1, \cdots$, 非空集合

$$S=\bigcap_{i=0}^{\infty}S_i$$

即是所求 (见图 1.1.4(b)).

还可以举出很多这样的例子. 这些例子具有分形的两个特征, 即具有精细的结构, 也都是涉及无限过程而生成. 它们更深入的性质, 将在以后的章节中陆续展开, 这里不多作讨论. 这些例子还有其他分形将是本书很重要的讨论对象.

1.2 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度

在 $R^n(n>0)$ 上取通常度量 d, $d(x,y)$ 或 $|x-y|$ 表两点的距离, 而集合 $A\subset R^n$