



面向 21 世纪 课 程 教 材  
TEXTBOOK SERIES FOR 21ST CENTURY

工  
程  
力  
学  
教  
程  
之  
五

DYNAMICS OF STRUCTURES

# 结 构 动 力 学

张子明 杜成斌 江 泉 编著

河 海 大 学 出 版 社

面向 21 世纪课程教材

工程力学教程之五

# 结构动力学

张子明 杜成斌 江 泉 编著

河海大学出版社

## 内 容 提 要

本教材系高等工科学学校土木、水利类专业学生学完结构力学课程后,进一步学习结构动力学知识而编写的。教材全面、深入、系统地介绍了结构动力分析的基本理论和计算方法。教材共分7章,即:结构动力学概论,单自由度系统的振动,多自由度系统的振动,无限自由度系统的振动,自振频率和振型的实用计算,结构抗震计算,结构振动实验基础等。各章后附有习题,部分习题附参考答案,便于读者自学查阅。

本教材可作为高等工科学学校土木、水利类专业本科高年级学生、研究生的教材或教学参考书,也可供有关工程技术人员学习参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/张子明等主编. —3版. —南京:河海大学出版社,2009.2

ISBN 978-7-5630-1673-0

I. 结… II. 张… III. 结构动力学—高等学校—教材  
IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 015888 号

书 名 / 结构动力学  
书 号 / ISBN 978-7-5630-1673-0/O·111  
责任编辑 / 施 萍  
出 版 / 河海大学出版社  
地 址 / 南京市西康路1号(邮编:210098)  
电 话 / (025) 83737852(总编室)  
(025) 83722833(发行部)  
经 销 / 江苏省新华发行集团有限公司  
刷 印 / 丹阳市教育印刷厂  
开 本 / 787毫米×960毫米 1/16  
印 张 / 15  
字 数 / 300千字  
版 次 / 2009年2月第3版  
印 次 / 2009年2月第1次印刷  
定 价 / 28.00元

## 前 言

本书为河海大学面向 21 世纪力学系列课程教材之一,是按河海大学“面向 21 世纪力学系列课程改革小组”和河海大学“国家工科基础课程(力学)教学基地”审定的“《结构动力学》编写大纲”编写的校内教材的基础上修改、补充而成的。该校内教材已经专家评审,并在校内正式试用了四轮。这次编写充分考虑和采纳了专家和校内师生的意见和建议,河海大学施善云高级工程师参与了“结构振动实验基础”这一章的规划与讨论。在此特向他们致谢。

按照我校面向 21 世纪力学系列课程改革的总体思路,本书着重教学内容和课程体系的改革。在教学内容的选择上,一方面对传统的经典内容加以精选,以减少原来理论力学和材料力学两门课程中振动基础理论的重叠及每门课程内的罗列现象。这不仅有利于减少学时,提高教学效率,而且有利于读者寻找事物的内在联系。因此,本书体现了:刚体与变形体的贯通(广义单自由度系统);平衡方法的贯通(达朗贝尔原理——直接平衡法和虚位移原理)。另一方面,书中反映了新的科技成果和对经典内容加以创新处理。本书和目前结构动力学课程基本内容相比,主要特点是:既有线性系统的计算,又有非线性系统的计算;阻尼理论既有粘性阻尼计算又有滞变阻尼、摩擦阻尼的计算;对土建、水利工程结构最为突出的地震响应,书中专门列章,较为全面地介绍了在各种情况下的分析计算方法;为了拓宽学生的知识面,同时也为了给学生积极思维创造必要条件,增设了“结构振动实验基础”一章。为了体现因材施教,书中带 \* 号的章节可为学有余力的同学作为补充内容学习。

本书的编写,主要取材于我校编写的《结构动力学》(赵光恒、张子明合编,中国水利水电出版社,1996 年 5 月),同时参阅了国内外一些结构动力学教材和大纲,吸收了它们的许多长处。由于我们水平有限,书中难免存在欠缺和不妥之处,希望读者给予批评指正。

编 者

2001 年 9 月

# 目 录

## 第 1 章 结构动力学概论

|       |                 |        |
|-------|-----------------|--------|
| § 1-1 | 基本概念            | ( 1 )  |
| § 1-2 | 弹性系统的动力自由度      | ( 3 )  |
| § 1-3 | 结构振动中的能量耗散——阻尼力 | ( 6 )  |
| § 1-4 | 运动方程式的建立        | ( 7 )  |
| 思考题   |                 | ( 12 ) |
| 习 题   |                 | ( 12 ) |

## 第 2 章 单自由度系统的振动

|         |                    |        |
|---------|--------------------|--------|
| § 2-1   | 单自由度系统的无阻尼自由振动     | ( 14 ) |
| § 2-2   | 单自由度系统的有阻尼自由振动     | ( 20 ) |
| § 2-3   | 单自由度系统简谐荷载作用下的受迫振动 | ( 25 ) |
| § 2-4   | 减振与隔振              | ( 35 ) |
| § 2-5   | 一般荷载作用下的响应         | ( 38 ) |
| * § 2-6 | 非线性系统的动力响应         | ( 45 ) |
| 思考题     |                    | ( 49 ) |
| 习 题     |                    | ( 49 ) |

## 第 3 章 多自由度系统的振动

|       |             |        |
|-------|-------------|--------|
| § 3-1 | 运动微分方程的建立   | ( 52 ) |
| § 3-2 | 多自由度系统的自由振动 | ( 53 ) |
| § 3-3 | 多自由度系统的动力响应 | ( 68 ) |
| 思考题   |             | ( 86 ) |
| 习 题   |             | ( 86 ) |

## 第 4 章 无限自由度系统的振动

|         |                  |         |
|---------|------------------|---------|
| § 4-1   | 直梁弯曲振动的基本方程      | ( 88 )  |
| § 4-2   | 直梁弯曲的无阻尼自由振动     | ( 90 )  |
| * § 4-3 | 简谐荷载下直梁弯曲无阻尼受迫振动 | ( 100 ) |
| 思考题     |                  | ( 105 ) |
| 习 题     |                  | ( 105 ) |

## 第 5 章 自振频率和振型的实用计算

|       |          |         |
|-------|----------|---------|
| § 5-1 | 能量法求自振频率 | ( 107 ) |
|-------|----------|---------|

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 5-2 幂法计算自振频率和振型          | (118) |
| * § 5-3 子空间迭代法             | (127) |
| 思考题                        | (137) |
| 习 题                        | (137) |
| <b>第 6 章 结构抗震计算</b>        |       |
| § 6-1 概 述                  | (140) |
| § 6-2 单自由度系统的地震响应与反应谱      | (141) |
| § 6-3 多自由度系统的地震响应          | (151) |
| 思考题                        | (156) |
| 习 题                        | (157) |
| <b>第 7 章 结构振动实验基础</b>      |       |
| § 7-1 概 述                  | (158) |
| § 7-2 结构振动实验常用设备           | (160) |
| § 7-3 振动特性参数的常用测量方法        | (166) |
| § 7-4 实验模态分析与参数识别          | (170) |
| 思考题                        | (175) |
| 结构振动实验                     | (176) |
| 附录 A 克雷洛夫函数数值表             | (178) |
| 附录 B 平面杆系结构自振特性和动力响应计算程序简介 | (182) |
| 习题参考答案                     | (222) |
| 参考文献                       | (224) |

# 结构动力学概论

本章首先介绍结构动力计算的特点,动荷载与静荷载作用的区别,常见动力荷载的分类和结构动力学的研究目的、研究方法和任务。然后分别对考虑动力系统惯性力的动力自由度和阻尼力的形式进行讨论;最后介绍建立运动方程式的常用方法,即基于达朗贝尔原理的直接平衡法和基于虚位移原理的虚功法并对轴向力的影响进行简单讨论。

## § 1-1 基本概念

### 一、动力计算的特点

结构动力学研究结构在动力荷载作用下的位移和内力(统称响应)的分析原理和计算方法。所谓动力荷载,是指荷载的大小、方向和作用位置随时间而变的荷载。如果单纯从荷载本身性质来看,严格说来,绝大多数实际荷载都应属于动荷载。但是,如果从荷载对结构所产生的影响来看,一种是荷载虽然随时间在变,但是变得很慢,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚微。这种荷载作用下的结构计算问题实际上仍属于静荷载作用下的结构计算问题。另一种是荷载不仅随时间在变,而且变得较快,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚大。这种荷载作用下的结构计算问题属于动力计算问题。

这里荷载变化的快与慢是与结构的固有周期相比较的,换句话讲,确定一种随时间改变的荷载是否为动荷载,须将其本身的特征与结构的动力特性结合起来考虑,才能决定。

在结构动力计算中,由于荷载是时间的函数,结构的响应也是时间的函数。

另外,结构中的内力不仅要平衡动力荷载,而且要平衡由于结构的变形加速度所引起的惯性力。结构的运动方程中除了动力荷载(dynamic load) $F(t)$ 和弹簧力(spring force) $F_s(t)$ 之外,还要引入因其质量产生的惯性力(inertia force) $F_i(t)$ 和耗散能量的阻尼力(damping force) $F_d(t)$ 。而且,对于结构除了需要知道其质量分布、几何形态外,还应该知道反映其动力性能的参数,如动弹性模量 $E$ 、动切变模量 $G$ 等。

## 二、动力荷载的分类

动力荷载按其是否具有随机性可分为确定性和非确定性两类。确定性动力荷载系指当时间给定后其量值是唯一确定的,故亦称数定的动力荷载。常见的确定性动力荷载其方向、作用点位置不变,而其大小则随时间变化。例如:周期荷载,其中以简谐荷载最为常见;集度大,短暂时间作用的冲击荷载;持续时间长的非周期一般荷载。非确定性动力荷载的量值随时间的变化规律不是唯一确定的,而是一个随机过程,故亦称随机荷载,或称非数定的动力荷载。虽然非确定动力荷载不能用时间 $t$ 的确定性函数来描述,但它受概率统计规律所制约。地震荷载、海浪荷载和风荷载都可视为具有随机性质的非确定性动力荷载。

## 三、动力分析的目的、方法和任务

结构动力分析的目的是确定结构在动力荷载作用下的响应,为结构设计、保证结构的经济与安全提供科学依据。研究结构的受迫振动是结构动力分析的基本任务。

动力分析的研究方法有:理论计算法、试验量测法和计算-试验混合法三种。随着计算技术的发展,结构动力系统的数值模拟显得越来越重要,尤其是复杂结构如水坝、地基和水库系统的三维动力分析、核电站结构系统的地震响应和振动控制研究等。结构试验是检验数学模型的正确性,为理论计算提供确切数据的重要途径。试验量测的方法已由最初的机测和电测发展到光测,大大提高了试验量测的范围和精度。重要结构的动力研究常常需要将数值计算和试验结合起来,一方面利用数值计算为结构试验提供依据,另一方面,根据试验结果,不断修正模型,以使数学模型能更好地反映实际情况。

在图 1-1 中,若已知结构系统的性态和动力荷载,则可用计算或试验的方法求得结构的响应,这是结构动力学的正分析问题。若已知动力荷载,并试验测得了结构的响应,要反求结构的性态;或者已知结构性态,并测得了结构的响应,要推求动力荷载,则为结构动力学的反分析问题,或称识别问题。前者称为系统识别,后者称为荷载识别。

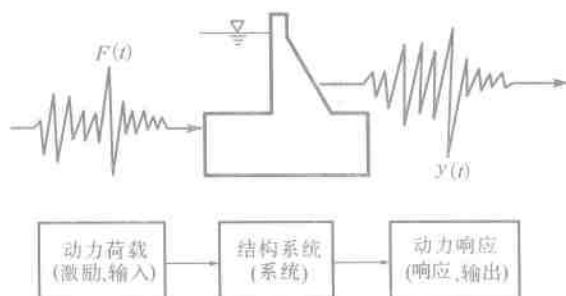


图 1-1 结构动力分析框图

动力荷载作用下结构的响应计算一般都和结构本身固有的自振特性密切相关。例如,在简谐动力荷载  $F(t) = F \sin \omega t$  作用下,若结构自振频率  $\omega$  和荷载频率  $\omega$  很接近,即使荷载幅值  $F$  很小,结构的响应也会很大;反之,若结构的自振频率  $\omega$  大于荷载频率  $\omega$  五倍以上(即  $\omega > 5\omega$ ),则结构的响应和将动力荷载幅值  $F$  作为静力荷载作用所得的响应差不多。由此可见,求解结构的自振特性问题,往往就成为受迫振动计算的先导。

限于篇幅,本书只讲述确定性荷载作用下结构动力响应的计算和结构振动实验的一些基础知识。关于随机荷载作用下结构的随机振动问题及有关结构系统的反分析问题,可参考其他有关专著。

## § 1-2 弹性系统的动力自由度

结构系统的动力计算和静力计算一样也需要选择计算简图。因为要考虑质量的惯性力,所以必须明确结构的质量分布情况,并分析质量可能产生的位移。在结构系统运动的任一时刻,确定其全部质量位置所需的独立几何参变量的个数,称为系统的动力自由度(dynamic freedom)。

实际结构的质量都是连续分布的,因此,它们都是无限自由度系统。对于无限自由度系统的动力计算,只有一些很简单的情況能给出解答,而且计算复杂。通常为了简化计算,采用下列方法把实际结构简化为有限个自由度系统。

### 一、集中质体法

将连续分布的质量采用向两端集中的办法,把连续分布质量系统离散成为无重弹性杆系上附以有限个质体的情况。如图 1-2(a)中无限自由度系统就被简化成如图 1-2(b)所示的有限个自由度系统。

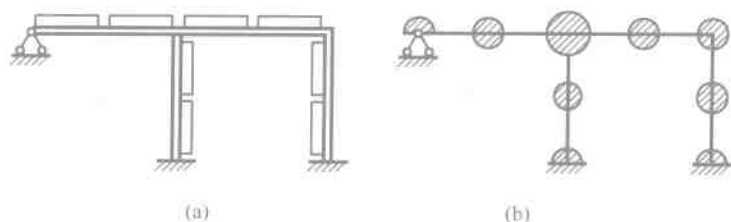


图 1-2 分布质量刚架系统简化

对平面结构而言,每一个质体运动时具有三个独立的参数,即两个线位移和一个角位移,也就是说有三个自由度。通常计算中往往略去角位移的影响,并且在梁和刚架结构的计算中,还略去杆件轴向变形所引起质体的位移。

图 1-3(a)所示高架水塔,其顶部水池的质量较大,相对而言高架部分质量较小,可将水池的质量和部分高架的质量集中于顶部,简化为带一个质体的悬臂梁,如图 1-3(b)所示,确定质体位置只需一个独立参数  $x$ ,故它属于单自由度系统。

图 1-3(c)所示简支梁,梁上固定着两个质量较大的设备,若将梁的分布质量的一部分也集中在设备处,则计算简图如图 1-3(d)所示,确定质体位置需用两个独立参数  $y_1$  和  $y_2$ ,故为两个自由度系统。

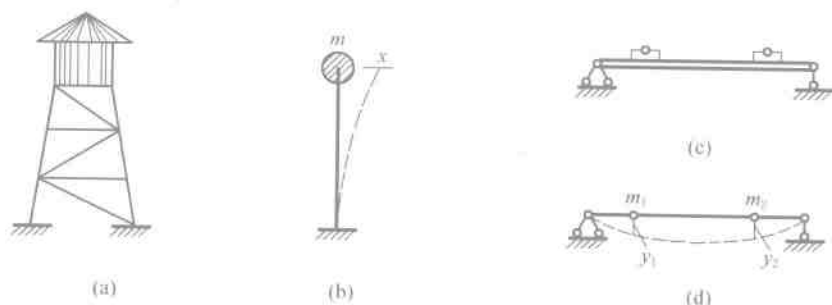


图 1-3 水塔及带重梁的计算简图

下图 1-4(a)所示的高 310.10 m 的南京电视塔,在动力分析中对塔身采取分段集中质量的方法,简化为带有 16 个质体的悬臂梁结构,如图 1-4(b)所示。

从上述举例看出,系统的自由度数目与该系统是否超静定,或者超静定次数的多少都没有关系。此外,系统的自由度数目也不一定和质体的数目相同,如图 1-5(a)所示的系统虽然只有一个质体  $m$ ,但它却具有两个自由度,因为确定该质体位置需要  $x$  和  $y$  两个独立参数。图 1-5(b)系统虽然有三个质体,但它只有两个自由度,同学试分析之。

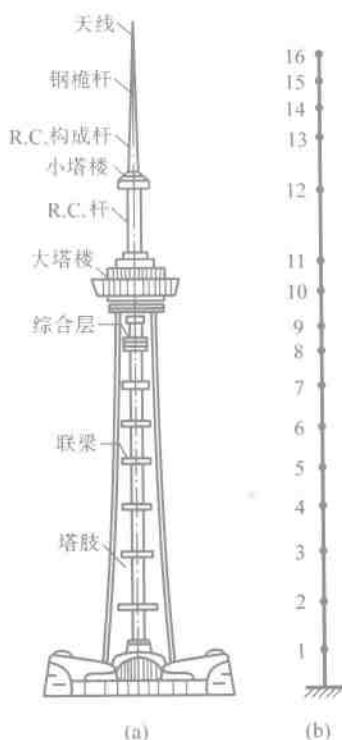


图 1-4 南京电视塔计算简图

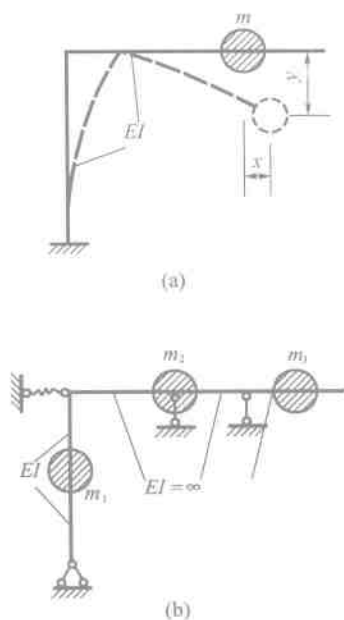


图 1-5 刚架系统动力自由度的确定

## 二、广义位移法

对于具有连续分布质量,且比较简单的结构可采用广义位移法。如图 1-6(a)所示简支梁,设在  $t$  时刻  $x$  点的位移为  $y(x, t)$ ,将它用一族位移函数的线性和表示

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (1-1)$$

式中,  $\sin \frac{i\pi x}{l}$  为满足位移边界条件的位移函数;  
 $q_i(t)$  为待定参数,亦称广义坐标 (generalized coordinates)。若给定各个广义坐标  $q_i(t)$ , 则  $y(x, t)$  即可确定。即结构无限个自由度可以用无限个广义坐标  $q_i(t)$  表示。在一般情况下,只需要采用前面有限项叠加就有足够的精度,如取前三

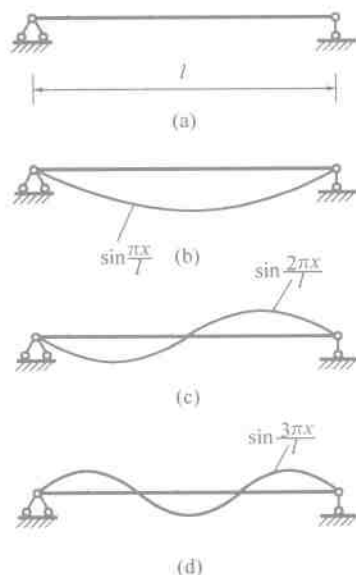


图 1-6 简支梁的广义位移

项叠加,即

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (1-2)$$

这样就将无限自由度系统简化为三个自由度的系统。

### 三、有限单元法

将实际结构用有限个在结点处相互连接的单元所组成的离散系统代替,对每个单元给定其插值函数,然后叠加单元在各个相应结点的贡献建立系统的求解方程。

有限单元法根据基本未知量选取的不同可分为,位移有限元法、应力有限元法和兼有应力、位移未知量的混合有限元法。其中,以位移有限元法应用最为广泛。位移有限元法又可分为刚性有限元法和变形有限元法两种,它们各自适用于不同的工程问题。

上述三种结构的简化方法以集中质体法较为简便实用,广义位移法需要选择满足位移边界条件的函数族,故它仅适用于简单结构。综合集中质体法和广义位移法两种方法特点的有限单元法,它适用于各种复杂结构,因而,在求解工程结构动力问题中应用广泛。

## § 1-3 结构振动中的能量耗散——阻尼力

从微观上看,结构振动时材料分子间相对运动产生的热效应是不可逆的。同时,由于材料的不均匀性也将产生局部非弹性变形。这些都导致结构在振动过程中材料耗散能量。结构的结点和支座联结处,往往由于相对运动产生摩擦而消耗能量,结构周围的介质阻止结构振动,也将耗散振动的能量。再者,结构振动能量传递至地基、地基土壤等介质的内摩擦也会耗散能量。通常将各种能量耗散的因素总称为阻尼(damping)。在动力计算中,引入一个反映能量耗散的力称之为阻尼力。

关于阻尼力,根据不同的耗能机理提出的阻尼理论有不同的阻尼力假设,通常应用的三种阻尼理论和阻尼力如下。

### 一、粘性阻尼(viscous damping)

亦称粘滞阻尼。当系统在粘滞性液体中以不大的速度运动时,它所受到的阻尼力大小与速度成正比,而方向和速度的方向相反。即

$$F_{vd}(t) = -c \dot{y}(t) \quad (1-3)$$

式中,  $F_{vd}(t)$  为粘性阻尼力;  $c$  为阻尼系数;  $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$  为位移速度; 式中的负号表示阻尼力的方向恒与速度  $\dot{y}(t)$  的方向相反。根据这一理论建立的运动方程易于求解, 所以目前动力分析中广泛采用这样的阻尼假定。

## 二、滞变阻尼(hysteretic damping)

亦称结构阻尼。滞变阻尼能较好地反映材料内摩擦的耗能机理, 故亦称材料阻尼(material damping), 又因阻尼力可表示为复数形式, 又称复阻尼。

滞变阻尼认为: 在简谐振动中, 阻尼力与位移  $y$  成正比, 但其相位与速度  $\dot{y}$  相同, 即相位比位移超前  $90^\circ$  (或时间超前  $\frac{1}{4}$  周期), 滞变阻尼力可表示为

$$F_{hd}(t) = -\zeta k y \left( t + \frac{T}{4} \right) \quad (1-4)$$

式中,  $\zeta$  为滞变阻尼系数;  $k$  为劲度系数;  $T$  为周期。考虑到弹簧力  $F_s(t) = -k y(t)$  及  $F_s \left( t + \frac{T}{4} \right) = F_s(t) e^{i\frac{\pi}{2}}$ , 则上式可写为

$$F_{hd}(t) = \zeta F_s \left( t + \frac{T}{4} \right) = \zeta F_s(t) \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i \zeta F_s(t)$$

## 三、摩擦阻尼(frictional damping)

亦称干摩擦阻尼。摩擦阻尼的阻尼力表示为

$$F_{fd}(t) = -fF \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \quad (1-5)$$

式中,  $f$  为动摩擦系数;  $F$  为摩擦接触面间的正压力;  $\dot{y}$  为速度;  $|\dot{y}|$  为速度的绝对值; 负号表示  $F_{fd}(t)$  的方向和  $\dot{y}$  的方向相反。在振动过程中, 一般认为摩擦力  $F_{fd}(t)$  的大小不变, 但其方向始终与速度的方向相反。

# § 1-4 运动方程式的建立

## 一、应用的原理和方法

建立运动方程式应用的原理和方法有多种, 这里主要介绍以下两种。

## 1. 达朗贝尔原理——直接平衡法

应用达朗贝尔原理,引入惯性力,便可以在形式上与静力平衡计算一样,列出运动方程。图 1-7(a)所示系统受动力荷载  $F(t)$  作用,设在某一时刻  $t$ ,质体的总位移为  $y'$  (包括质体重力所产生的静位移  $y_{st}$  和动位移  $y$ ,  $y' = y_{st} + y$ ), 并以向下为正,因此,速度和加速度也以向下为正。作用于质体上的力如图 1-7(b)所示计有:

(1) 重力  $W = mg$ 。

(2) 动力荷载  $F(t)$ 。

(3) 弹簧对质体的作用力,它的方向与位移的方向相反。它具有使质体返回原处的作用,因此通常又称为弹性恢复力,大小与位移  $y'$  成正比,其表达式为

$$F_s(t) = -k y'(t)$$

(4) 阻尼力  $F_d(t)$  按照粘滞阻尼理论,有

$$F_d(t) = -c \dot{y}(t)$$

负号表示阻尼力方向与速度方向相反。

(5) 惯性力  $F_i(t)$  根据达朗贝尔原理,有

$$F_i(t) = -m \ddot{y}(t)$$

负号表示惯性力方向与加速度方向相反。

以上各力直接由平衡条件可得运动方程

$$W + F_i(t) + F_s(t) + F_d(t) + F(t) = 0$$

$$\text{即} \quad m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k[y(t) + y_{st}] = W + F(t) \quad (1-6)$$

注意到质体重量所产生的静位移  $y_{st}$  与质体重量  $W$  之间的关系:  $ky_{st} = W$ , 则式 (1-6) 成为

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (1-7)$$

式 (1-7) 表明:若建立系统运动方程时以静平衡位置作为计算位移的起点,则关于动位移的微分方程与重力无关。下面所讨论的位移一般均指动位移,如果欲求总位移,则须与静位移叠加。

## 2. 虚位移原理

当结构比较复杂时,系统的各种力可以方便地用位移自由度来表示,而它们的

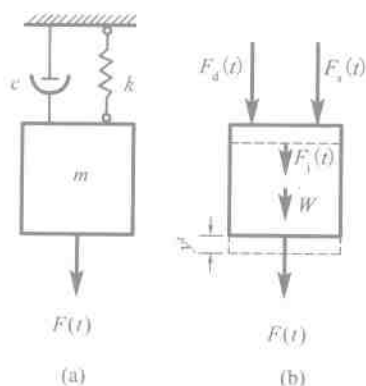


图 1-7 单自由度系统

平衡规律可能不清楚或很复杂,此时,运用基于虚位移原理的虚功法来建立方程就较方便。

具体求法是:在结构系统中引入惯性力,然后给系统以约束所容许的微小的虚位移,再令系统上各个力经相应虚位移所做总虚功等于零,便可得出运动方程。如图1-7(b)所示系统,令各力经竖向虚位移 $\delta y$ 所做总虚功为零,考虑 $\delta y$ 的任意性,并代入各力的表达式,便可得出式(1-7)。

以上两种方法中,直接平衡法应用最为广泛,因为它物理概念清楚,而且简便,只要熟悉静力计算中建立方程的方法就不难写出运动方程。虚位移原理本身等价于力的平衡条件,这在静力计算中已为大家所熟悉,所不同的是要引入惯性力和阻尼力。

## 二、广义单自由度系统

有两种广义单自由度系统,即刚体集合系统和分布质量系统。这里主要介绍刚体集合系统。

图1-8(a)所示系统,AB梁为刚性无质量梁,CD梁亦为刚性,其总质量为 $m$ ;  $k_1$ 、 $k_2$ 分别为两个弹簧的劲度; $c$ 为粘性阻尼系数。此系统虽然看起来颇复杂,但实际为单自由度系统。

在图1-8(b)中取C点向下的位移为 $Y$ ,可作出两个梁的示力图,其中 $y_1$ 为中间变量, $k_1$ 弹簧的力为 $k_1(\frac{2}{3}Y - y_1)$ ,而 $m\frac{\ddot{Y}}{2}$ 和 $J\frac{\ddot{Y}}{3l}$ 分别为CD梁的惯性力和惯性矩, $J$ 为CD梁对形心的转动惯量。

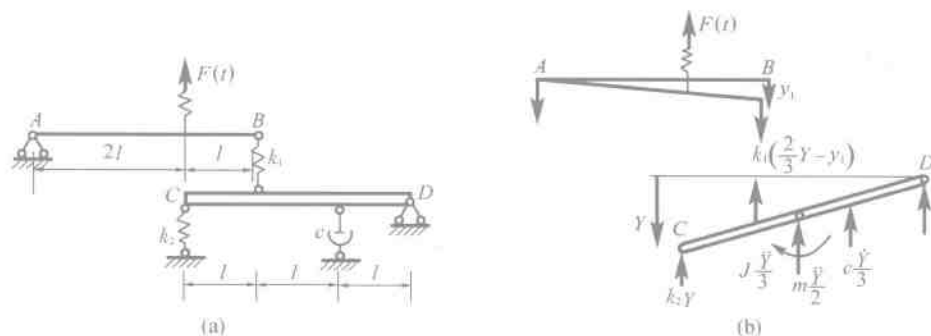


图1-8 刚体集合的广义单自由度系统

分别写出AB梁的 $\sum M_A = 0$ 和CD梁的 $\sum M_D = 0$ 得

$$k_1 \left( \frac{2}{3} Y - y_1 \right) 3l = 2l F(t)$$

$$\frac{J}{3l} \ddot{Y} + \frac{3}{4} m l \ddot{Y} + \frac{l}{3} c \dot{Y} + k_1 \left( \frac{2}{3} Y - y_1 \right) 2l + 3 l k_2 Y = 0$$

由上两式消去  $y_1$  可得

$$\left( \frac{J}{3l^2} + \frac{3}{4} m \right) \ddot{Y}(t) + \frac{c}{3} \dot{Y}(t) + 3k_2 Y(t) = -\frac{4}{3} F(t)$$

$$\text{改写为} \quad m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = F^*(t) \quad (1-8)$$

式中,  $m^*$  为广义质量,  $m^* = \frac{J}{3l^2} + \frac{3}{4} m$ ;  $c^*$  为广义阻尼系数,  $c^* = \frac{c}{3}$ ;  $k^*$  为广义劲度,  $k^* = 3k_2$ ;  $F^*(t)$  为广义荷载,  $F^*(t) = -\frac{4}{3} F(t)$ 。

**例 1-1** 图 1-9(a) 所示系统,  $AB$  杆为刚性, 其单位长度质量为  $\bar{m}$ ,  $AB$  梁对形心的转动惯量为  $J$ ,  $BC$  杆亦为刚性, 其上附有集中质量  $m$ , 两杆用  $B$  铰联接, 弹簧阻尼器的参数及安置位置如图 1-9(a) 所示。此系统为一广义单自由度系统, 试求其广义质量  $m^*$ 、广义阻尼  $c^*$ 、广义劲度  $k^*$  和广义荷载  $F^*(t)$ 。又若  $C$  端沿杆轴作用常量为  $F_N$  的轴向力时将有何影响?

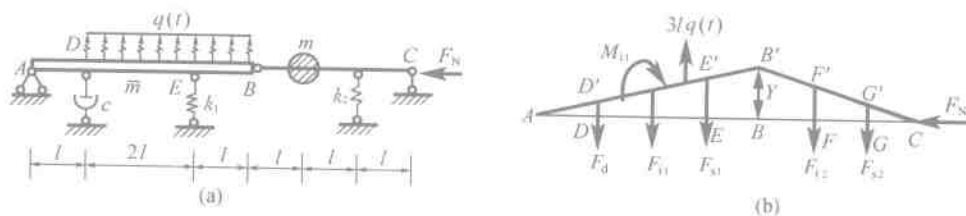


图 1-9 有轴向荷载作用的刚体集合广义单自由度系统

**解** 取  $B$  铰竖向位移  $Y$  为基本未知量, 则其他各个力处相应的位移均可用  $Y$  表示, 各个力亦可用  $Y$  及其导数表示, 见图 1-9(b)。各力的表达式为

$$F_d = c \left( \frac{d}{dt} DD' \right) = \frac{1}{4} c \dot{Y}(t)$$

$$F_{k1} = k_1 (EE') = \frac{3}{4} k_1 Y(t)$$

$$F_{k2} = k_2 (GG') = \frac{1}{3} k_2 Y(t)$$

$$F_{i2} = \frac{2}{3} m \ddot{Y}(t)$$

$$M_{i1} = J \frac{1}{4l} \ddot{Y}(t) = \frac{\bar{m}(4l)}{4l} \frac{(4l)^2}{12} \ddot{Y}(t) = \frac{4}{3} l^2 \bar{m} \ddot{Y}(t)$$

$$F_{i1} = m_1 \frac{1}{2} \ddot{Y}(t) = \bar{m}(4l) \frac{1}{2} \ddot{Y}(t) = 2l \bar{m} \ddot{Y}(t)$$

应用虚位移原理,设  $B$  铰产生竖向虚位移  $\delta Y$ ,令系统上各个力经此虚位移相应的位移所做的总虚功  $\delta W$  等于零,得

$$\delta W = -\frac{3}{4}k_1 Y(t) \frac{3}{4}\delta Y - \frac{1}{3}k_2 Y(t) \frac{\delta Y}{3} - c \frac{\dot{Y}(t)}{4} \frac{\delta Y}{4} - 2l\bar{m} \ddot{Y}(t) \frac{\delta Y}{2} - \frac{4}{3}l^2\bar{m} \ddot{Y}(t) \frac{\delta Y}{4l} - m \frac{2\dot{Y}(t)}{3} \frac{2}{3}\delta Y + 3lq(t) \frac{5}{8}\delta Y = 0$$

考虑到  $\delta Y$  的任意性,上式可简化写成

$$m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = F^*(t)$$

其中  $m^* = \frac{4}{3}\bar{m}l + \frac{4}{9}m$ ;  $c^* = \frac{c}{16}$ ;  $k^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}$ ;  $F^*(t) = \frac{15}{8}lq(t)$ 。

若  $C$  端沿杆轴作用常量轴向压力  $F_N$ ,则在虚功方程中应计及  $F_N$  力所做的虚功。 $B$  铰产生虚位移  $\delta Y$  时,由于  $AB$  杆转动产生水平向虚位移  $(\frac{Y}{4l})\delta Y$ ,由于  $BC$  杆转动产生水平向虚位移  $(\frac{Y}{3l})\delta Y$ ,因此  $F_N$  力所做的虚功  $\delta W_n$  为

$$\delta W_n = F_N \left( \frac{Y}{4l} + \frac{Y}{3l} \right) \delta Y = \frac{7}{12} \frac{F_N Y}{l} \delta Y = k_G^* Y \delta Y$$

式中,  $k_G^*$  称为广义几何刚度,  $k_G^* = \frac{7}{12} \frac{F_N}{l}$ 。代入上述虚功方程可以看出,计及轴向压力  $F_N$  作用后,仅对运动方程的广义刚度项有影响。考虑系统轴向力时的广义刚度称为组合广义刚度  $\bar{k}^*$ 。

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9} - \frac{7}{12} \frac{F_N}{l}$$

由此可见,轴向压力  $F_N$  减小了系统的刚度。

顺便指出:组合广义刚度为零的条件,就是确定系统屈曲的欧拉临界力的条件,由  $\bar{k}^* = 0$  可得出此系统的临界压力为

$$F_{N_{cr}} = \left( \frac{27}{28}k_1 + \frac{4}{21}k_2 \right) l$$