漢譯

范氏大代數

FINE: COLLEGE ALGEBRA.

漢　譯

范氏大代數學

原名：College Algebra by Fine

譯　者

高佩玉　王喬南

王俊奎　李士奇

校　者　王周卿

北平科學社印行

1940

內政部註冊執照警字[illegible]七二七[illegible]號

教育部審定

漢譯范氏大代數學

（原名 FINE: COLLEGE ALGEBRA）

此書有著作權翻印必究

全一冊實價國幣 道林精裝二元六角
報紙精裝[illegible]
報紙平裝一元五角

譯　者　高佩玉　李士奇
王俊奎　王喬南

發行人　高佩玉

印刷者　北平科學社

發行所　北平科學社
北平德勝門內菓子市十號
電報掛號　北平4430號

上海發行所　求益書社
上海[illegible]州[illegible]三七五號

中華民國廿三年八月初版發行
中華民國廿九年二月十一版發行

訂正新版序

本書爲 Henry B. Fine 多年教授經驗之結晶，隨教隨編，經多次修改始成此書；所以次序之嚴整，取材之實用，理論之精細，解法之簡明，實爲他書所不及。譯者講教是書多年，深知其爲高中最完善之教本，遂於民國十八年起開始譯爲中文，至廿三年始行出版。出版之後，風行全國各高中，遂爲奸商所垂涎，篡改翻印者有之，影印翻版者有之。錯誤模糊，有害學子。不得已而訴諸法律，科以罰金，並賠償損害。於是本社益加努力，乃請數學家關景唐，王周卿兩先生本其多年教授之經驗，各詳細校閱一遍，另製新版。譯者復親自校對，仍恐或有不周之處，務祈宏達，隨時指教，致函本社，當致薄酬，並將台銜列爲校者，則學者幸甚，本社幸甚。

北平科學社高佩玉識

目　錄

第一編　數

第二編　代數

范氏大代數

第一編 數

I. 自然數，數法，加法及乘法

物羣及其基數

物羣. 世間萬物，非孑然獨存，蓋常聚合而成羣(*Group*) **1**
或團(*assemblage*).

例如手指，馬隊，多角形之頂均物羣也．設視其一組全體物(非各個)與他組全體物有別，而於其概念中構成一團結之純粹目的物，即能想定某組全體物結合為一羣.

凡組成一羣之諸物，簡稱為該羣之元(*Element*).

等羣．一一對應． 設有字母ABC及DEF二文字羣，可 **2**
以其一羣之各元與他羣之各元，一一配合，即可配合A與D，B與E，及C與F.

設能依此法配合二羣之諸元而無遺，則稱此二羣相等；而諸元之配合處置稱為使二羣成一對一，或一一對應(*one-to-one correspondence*)之關係.

3 **定理.** 設二羣各等於同一第三羣 則彼此相等.

蓋由假定能令其二羣之各元與第三羣之各元成一一對應,設將二羣中與第三羣同元相配合之各二元視爲新偶,則致此二羣成一一對應矣.

4 **基數.** 於所有物羣中,可擇其相等者合爲一類,任二已知羣屬於同類或異類,當視其能否成一一對應而定.

如,二羣字母$ABCD$及$EFGH$屬於同類,而$ABCD$及EFG二羣爲異類.

以一類諸羣所共有之性質,爲與他類諸羣所必無之性質區別羣類稱爲羣中物數,或爲其基數(*Cardinal number*).

換言之,一羣之物數或基數,爲其本羣及能與其成一一對應之各羣之共同性.

亦即謂一羣物體之基數,爲"任意排列羣內之物體,或以他物一一換置而該羣仍保持不變之本性",又可述爲"羣之基數云者,該羣與物體本身特質及排列法無關之性質也".

因將諸物重行排列,或以他物一一換置之,只能變爲另一相等之羣,§2.又當此種變換時,其常有不變之性質,必與物之性質,及排列無關也.

部分　設第一羣之諸元爲第二羣之若干元，而非全部，則稱第一羣爲第二羣之一部分． 5

如，ABC羣爲$ABCD$羣之一部分．

由此定義即得

設三羣中之第一羣爲第二羣之一部分，而第二羣爲第三羣之一部分，則第一羣亦爲第三羣之一部分． 6

有限羣及無限羣　設一羣或團不等於其自身諸部分之一，則稱爲有限羣或有限團；設等於其本羣之某部分，則稱爲無限羣或無限團． 7

如，ABC爲有限羣，因不能令其與BC，或其他任一部分一一對應．

但任何無窮記號或符號串，例如無窮數串 1,2,3,4……，均爲一無限團．

例如，可於全團1,2,3,4,……及其自2起始之部分成一一對應之關係，即於

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\cdots\cdots \qquad (a)$$

及

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\cdots\cdots \qquad (b)$$

間，分配(a)中之1與(b)之2，(a)之2與(b)之3，依此類推——可任擇(a)之各數與(b)之諸數相當．

故集團(a)等於其部分(b)而(a)爲無限羣．

大小基數．　設M及N爲任意兩有限羣，則必合於下式之一． 8

1. M及N相等，

或　2. M等於N之一部分，

或　3. N等於M之一部分．

・無限羣之諸元自然不能一一遍舉；然若能述一定律判定各已知物屬於此羣或否則亦可謂此羣有定義也。

於第一式稱 M 及 N 有同一基數，§4，或稱等基數；於第二式，稱 M 之基數小於 N 之基數；於第三式，稱 M 之基數大於 N 之基數.

設 M 表字母 abc 之羣，及 N 表 $defg$ 羣，則 M 等於 N 之一部．例如，等於 def 之部分.

故 M 之基數爲小於 N 之基數，而 N 之基數爲大於 M 之基數.

9 **註．** 由§7有限羣之定義可知關於"等"，"大"，及"小"之關係如上文所示已無疑義.

可見，定義不能令 M 之基數同時等於及小於 N 之基數，若 M 等於 N 且爲 N 之一部分，§3，則 N 爲無限羣矣§7.

10 **系．** 設三基數之第一基數小於第二基數，第二基數小於第三基數，則第一基數亦小於第三基數.

設 M,N,P 表任意物羣之基數，M 等於 N 之一部分，而 N 等於 P 之一部分；則 M 等於 P 之一部分，§§3,6.

11 **基數法．** 設由含一元之羣自一起始而重復"加"一新物，於是得下面之基數表：

1. 一"羣"之基數，如 I，即含一單元.
2. 一羣之基數，如 II，以一單元加於首類之一羣而得者.
3. 一羣之基數，如 III，以一單元加於第二類之一羣而得者.
4. 由此類推，以至無窮.

玆稱此諸連續基數爲"一"，"二"，"三"，……而以符號 1,2,3,……表之.

基數法之申述　任意有限羣之基數稱爲有限基數，下 12
面之指示可視爲上述之基數表:

第一．此表中各基數均有限．

如羣 I 爲有限，因不能等於其一部分，§7；而各相隣之羣有限，因加一新物於有限羣故仍爲有限．* 如 II 爲有限羣，因 I 爲有限羣；III 爲有限羣因 II 爲有限羣，餘類推．

第二．各有限基數均含於此表之內．

由定義，各有限基數爲有羣限如 M 之基數．設使每一符號 I 各與 M 中一元相當，則可繪成符號羣 III ……I 等於任意已知有限羣 M，以構成 M 內各目的物之記號，此符號羣必有一最末記號，故必含於 § 11 之表內，若記號無有止境，則其本羣與 M 爲無限矣，§7．

第三．表內之基數無相等者．

由 §8 之定義而知之．因已證明所有諸羣 I, II, III, ……爲有限；且其中每二羣之一爲他羣之一部，固甚明確．

---

*可證明如次(G Cantor, Math. Ann., 46 卷 490 頁)：
設 M 表一有限羣，及 e 爲單物，則 Me 羣爲以 e 加於 M 而得，亦爲有限．
證，令 G ≡ H 表二羣 G 及 H 相等．
設 Me 爲無限，必等於其部分之一，§7．
令 P 表此部分，則 Me ≡ P．
(1) 設 P 不含 e．
令 f 表 P 內與 M e 中之 e 配合之元，而以 P_1 表 P 之餘部．
則因 Me≡P_1f 及 e≡f，得 M≡P_1．
然此不可能，因 M 爲有限羣而 P_1 爲 M 之一部，§7．
(2) 設 P 含 e．

P 中之 e 不能與 Me 中之 e 配合，若能配合，則 P 之餘部亦爲 M 之一部，而等於 M 矣．然可設 P 中之 e 與他元如 Me 中之 g 配合及 Me 中之 e 與 P 中之 f 配合．

設 Me ≡ P 爲眞，則復配合 e,f,g. 諸元如 P 中之 e 與 M e 中之 e 及 P 中之 f 與 Me 中之 g 亦眞．然如前證，P 之一部等於 M，故此假設亦不可能．

需要全本请在线购买

自然基度. 方程式及不等式

13 **自然數.** 玆稱符號 1, 2, 3, ……或其名"一","二""三",……爲正整數或自然數(*Naturrl numbers*). 故一自然數爲一基數之一象徵或符號.

14 **自然基度.** 試按 §11 所表之已知基數之次序而排列之,得無窮之連續符號.

1,2,3,4,5,……

或"一","二","三",'四","五",……,稱爲自然基度(*Natural Scale*),或自然數之度.

15 自然基度之各符號,表示已定部分之符號之個數.

如, 4表符號1,2,3,4之個數, 因此符號 1,2,3,4,之個數與 I, II, III, IIII, 諸羣之個數相等 換言之, 即與末羣符號之線條數相等, §8. 此通常之解釋也.

16 **自然基度之順序性質.** 自然基度, 由其本身言之, 僅爲一羣不同符號,如其首符號爲 1, 加之以定羣,得次符號, II 即 2;再施之得下之符號,即3;進行至於無窮.

換言之, 自然基度僅爲按一定次序一個隨一個而構成一羣之不同符號而已,且有最前而無最末之符號.

由此觀之, 自然數本身,僅爲次序之記號, 即當讀此基度時——關於時間——之次序的記號.

17 普通基度與所有其他按定次序排列之已知元之聚合物,顯然有下之性質:

1. 其中任何二元，一在"先"而他在"後"，且"先""後"二字應用於元中之任何一對有同樣意義.

2. 設已知其任意二元，恆可定孰先而孰後.

3. 設 a，b，及 c 表任意三元而 a 先於 b，及 b 先於 c，則 a 先於 c.

設自然界示人之羣物，或人以己意規定擇去之順序而列置之物，則此集合物，均可具有前述性質，無論任何情形，均稱此種集合為順序系(*ordinal system*).

第一類之例如(1)自然基度本身；(2)按時間先後之一連續事件；(3)由左至右沿水平線列成之點行.第二類之例為按其姓名之字母次序排列之一羣人.

一集合體亦可有'符合"之元，如，事物之羣有兩個或多 13
個為同位或同時發生者即為符合之元.

設上述1,2,3之關係適用於不符合元中，而符合元適合下列條件者為順序系.

4. 設 a 與 b 合，及 b 與 c 合，則 a 與 a 合.

5 設 a 與 b 合，而 b 先於 c，則 a 先於 c.

基度中之次序關係可以定自然數所表之基數中之大小 10
關係.

任意二已知基數，其自然數在基度之較後者，必較大.

故可以"設 a 先於 b，及 b 先於 c，則 a 先於 c"之關係，以代表基度中"設三基數之第一個小於第二個，及第二個小於第三個，則第一個小於第三個'之關係.

實則於比較基數之大小時，罕有用其他任何方法者，因吾人不用 §8 之方法直接比較物羣之基數也．逆言之，即以適宜之自然數表之，由其自然數在基度中之關係次序惟知孰大與孰小．當述談任意二自然數時，若即刻認其孰先與孰後則能令人於此基度不費思索，迅速印入腦筋．如設談及 A，B 二城，A 之人口爲 120000．而 B 爲 125000，則立刻斷定 B 城居民較多，因知其125000於基度中在120000之後故也．

20 **數之方程式及不等式** "數"之一字卽謂自然數，§13；而字母 a，b，c，卽表此任意自然數．

21 設欲令 a 及 b 表同數，或自然基度中之"符合數"，應用方程式(*Equation*)．

$a=b$，讀作"a 等於 b"

22 設於自然基度中，欲表 a 先而 b 後，應用下列二不等式(*Inequality*)之一．

$a<b$，讀作"a 小於 b"，

$b>a$，讀作"b 大於 a"．

23 嚴密言之，此"等""小"及"大"諸字，自然非謂符號 a 及 b 之本身，而指其所代表之基數；如"a 小於 b"一語，僅爲"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之簡稱而已。

然一切不等式 $a<b$ 於符號 a 及 b 本來之意義卽謂在基度中 a 先於 b．

24 **方程式及不等式之規則**． 由§§17，18與§§21，22之定義，卽得

1． 設 $a=b$ 及 $b=c$，則 $a=c$．

2． 設 $a<b$ 及 $b<c$ 則 $a<c$．

3． 設 $a=b$ 及 $b<c$，則 $a<c$．

數　法

算術者乃論及自然數間之順序關係，且用以連結此諸數之初步法則而已。 25

算術之運用以數法(*counting*)爲基本.

數法. 欲知某已知羣目的物之基數爲何，故計算此羣. 26

此驗算極爲尋常，卽於一物上寫"一"，次物寫"二"，依此進行以至寫徧，須按基度次序讀口述符號「一」「二」……而按適宜或便利之順序擇定諸物愼勿遺漏，於此處置末後所記符號卽所求——此羣基數之名. 由度算之次序標識，此末一符號表已經讀過若干符號也，§15，故得此羣之物爲若干個，§8.

卽數法之運算可認爲導所算之羣與自然基度之各部成一一對應，§2，——卽自"一"起始至最後計算中之末數爲止之部分一一對應.

注意自然數於一數法中具有二重意義：(1) 僅用其一羣爲籌碼以完成此運算；及(2)應用末一字以記錄計算之結果.

數任一羣之物時，無形中已知與其所選定事物之順序無關，玆可證明如下：

定理. 計算一定羣物體無論如何擇定順序結果均同. 27

例如，設按一種順序 P 擇取諸物計算一有限羣之結果爲 99. 然按他種順序 Q，則爲 97.

依是順序 P 中前 97 個事物以成立羣，必與順序 Q 中之全體相等. 因由假設二者皆須使與自然數基度之前 97 個數相配合 §3.

然此不可能，因此則羣之一部等於其全體矣；但由假設，此羣爲有限羣 §7，故曰不可能.

28 **基數之另一定義.** 茲可將上述定理,作成有限羣基數之基本定義,卽一定物羣之基數爲該羣之本性:無論以任何順序計算此羣均得同一自然數.

此基數定義也,設如 §16 所規定,以數之討論作起點選擇諸物而構成自然基度;則此定義自然明瞭.

加法

29 **加法定義.** 加 3 於 5 卽求自然基度 5 之後據其第三位置者爲何數, 可由 6 起, 在基度上向前讀計三數, 卽: 6,7,8,而得數目,8.

茲以符號 + 表此演算,讀爲「加」(*Plus*),寫作 $5+3=8$. 總之,加 b 於 a 卽求自然基度中 a 後據第 b 位置者爲何數.

因基度中無最末符號, 此數常可求得,稱之爲 a 及 b 之和(*sum*) 且以式 $a+b$ 表之.

30 **註.** 求 $a+b$ 之演算爲於自然基度中以 b 物一羣之元向後數一次一個而加於 a 物之一羣,故(1)其末後處置之結果爲 $a+b$ 物之一羣, § 8, 及(2)設 a 及 b 表有限基數,於是得 $a+b$ 亦表有限基數參看5頁底註.

31 因 $a+1$, $a+2$, 等等,表 a 後之第一, 第二等數, 連續數 $a+1, a+2, \cdots\cdots$ 表基度中 a 後之一切諸部.

故 a 後之任意已知數可以 $a+d$ 式表之, 此處 d 表一有定自然數.

演算. 用數法加許多大數必甚繁難，必須記憶若干較 32
小之數相加之和（加法表）. 且應用下節說明之加法「定律」(*law*) 以導出大數之和.

加法定律. 加法爲“交換”及“結合”之演算；卽依次 33
二定律：

交換定律 (*Commutative law*). $a+b=b+a$. 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 結果相等.

結合定律 (*Associative law*). $a+(b+c)=(a+b)+c$, 35

先加 c 於 b 再加其和於 a，與先加 b 於 a 再加 c 於其和，結果相等.

註. 於實用時,可以 $a+b+c$ 代 $(a+b)+c$式,更當瞭然 36
$a+b+c+\cdots\cdots$式表加 b 於 a 加 c 於其和,等等之結果.

定律之證明. 玆證明諸定律如下: 37

第一. 交換定律: $a+b=b+a$.

如，3+2之和與2+3 之和相等.

因3+2示自然基度中先度三數,再度二數；卽

所算之羣 1,2,3, 4,5, (a)

指算者標記之符號 1,2,3, 1,2. (b)

但於(a)及(b)之記號羣間爲一對一之關係,而每一對一之關係爲交互的，§2 故可互換(a)及(b)之所表;卽設(b)爲所算之羣,(a)必表指算者所書符號之羣.

故得 3+2 等於一一度算記號

1,2,3, 1,2 (a)

之羣.

同理，得2+3等於一一度算下面之記號羣

1,2. 1,2,3. (a)

然(b)及(c)含符號個數相同僅其符號之排列不同耳,故一一度算之結果相等, §27；卽

$$3+2=2+3.$$