A. Ф. Бермант 著

數學解析教程

(上 册 Ⅱ)

張理京 等譯

重工業出版社出版

1953

А. Ф. Бермант 著

數學解析教程

(上册 II)

張理京 等譯

重工業出版社出版

1953

目　　次（上册Ⅱ）

第五章　定　積　分

第六章　不定積分．積分法

第七章 定積分(續). 旁義積分

第八章 積分的應用

第九章 級 數

第五章

定積分

本章中*)我們要研究定積分概念。它跟導函數概念與微分概念都是數學解析中的基本概念。跟導函數概念一樣，定積分概念也是在幾何學、力學、物理學及其他科學上需要對某些基本概念作精確定義時才產生出來的。不過引出定積分概念的那些概念跟引出導函數概念的那些概念，在一般性質上是不同的；在我們所熟知的現實關係中，可以看到兩者是互逆的。定積分概念是解決許多種問題的有效工具。數學在自然科學及工程的現實問題中的用處，正是在定積分（及微分與導函數）這方面顯出來的。

首先我們要考慮一個淺顯的幾何問題，就是考慮關於確定平面圖形的面積問題。這問題是從幾何上產生出來的，並且它也是初創數學解析時的出發點之一。這問題的解法具有高度的普遍性：它可以用來定出旁的量，而這些量在物理意義上完全異於面積：例如功（從已給的力求出），運動路程（從已給的速度求出），質量（從已給的密度求出）以及其他等等。因此我們必須就普遍的形式來講解這種方法，而不能依靠這個問題或那個問題中的具體條件來說明。這樣就導出定積分的純粹數學概念，而它是用極限概念作為基礎的。

考察了積分的基本屬性之後，我們就要表明定積分與導函數（或微分）這兩個概念間的簡單而又重要的依從關係。牛頓與萊布尼茲二氏建立了這種依從關係，乃是具有頭等重要意義的事。這種依從關係把以前不相干的知識結合成為嚴整的數學解析理論，並為數學解析的應用開闢了道路。

表達定積分與導函數間關係的公式，可用來計算積分，並且是把定積分概念應用到具體問題時的基礎。

§1. 定積分概念

95. 曲邊梯形的面積。 初等幾何中只考慮多邊形及圓的面積。

*) 本書第五及第六兩章各討論定積分及不定積分。我們在這兩章中的講解法能適應下列要求：先講第五章後講第六章，或是反過來先講第六章後講第五章。

現在我們要定出任一已給圖形的面積概念。

關於面積的理論以下列兩項假設作爲出發點： 1) 當一圖形由若干圖形所組成時，則該圖形的面積等於那若干個圖形的面積的和； 2) 矩形面積等於其兩邊長度的乘積。初等幾何學中就根據這兩項假設來定出三角形的面積；然後又因每個多邊形可分爲若干個三角形而定出多邊形的面積。

我們既能求出多邊形的面積，就可定出一切圖形的具有任意準確度的面積近似值的概念。要做到這點只要把圖形的曲線邊換成與該曲線足够接近的折線，換句話說，即是把已給圖形換成與其相差極小的多角形。如果在這裡再加上極限運算步驟，我們就得到建立任意圖形的面積概念的方法。我們應當記得初等幾何學中用內接及外切正多角形的面積來定圓面積時，所用的正是這個方法。不過那時我們要利用圖形（圓）的特殊幾何屬性，因而在情形比較複雜時，用那種方法去算面積就非常困難。

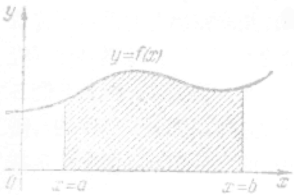

圖 123.

建立一般性的面積概念時，我們要採用坐標方法，它可以使我們用曲線方程從解析上表示出曲線的幾何性質。

現在我們假設需要確定面積的那個圖形位於笛卡兒坐標系的平面內（用極坐標系的情形見第八章 $n^\circ 129$）。這樣我們就不難看出任何圖形都可以分割成一系列具有同類邊緣的圖形——即所謂“曲邊梯形”。

由 Ox 軸、被平行於 Oy 軸的任意一直線所交不多於一點的曲線、以及曲線的兩條縱坐標四者所構成的圖形叫做曲邊梯形（見圖 123）；**介於所論兩條縱坐標之間的那段 Ox 軸叫做曲邊梯形的底邊。**

任何圖形顯然可以由這種梯形組成，並由此可知所求面積可用各曲邊梯形的面積的代數和定出。例如圖 124 所示圖形的面積可以寫成若干梯形面積的代數和式：

面積 $AA'C'C-$ 面積 $BB'C'C+$ 面積 $BB'D'D-$ 面積 $AA'B''B-$ 面積 $BB''D'D$. 由此可知要解決這面積的問題時，我們只要能指出曲

邊梯形面積的求法就够了。

I. 爲使說明淺顯起見，在講一般情形以前我們先來考慮拋物線梯形（三角形），它的各邊是拋物線 $y=kx^2$, Ox 軸及直線 $x=0$, $x=b$（圖 125）。求這梯形面積時我們可用上面講過的概念，卽是把該梯形換成與它愈來愈接近的多邊形，並用初等方法算出該多邊形的面積。

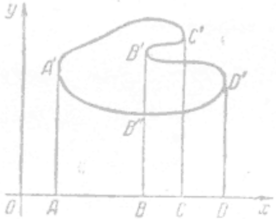

圖 124.

圖 125.

用下法作接近於拋物線的折線：把梯形底邊分成 n 個相等的小段，然後在分點處往上作縱線跟拋物線相交，然後在每個交點處作平行於 Ox 軸的線段直到它跟次一條縱線相交爲止。

所得的階梯圖形稱爲"內接台階形"。它的面積是不難求出的。

用 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}, x_n$ 表示分點的橫坐標。因全部底長爲 b，故

$$x_0=0,\ x_1=\frac{b}{n},\ x_2=\frac{2b}{n},\cdots\cdots,\quad x_{n-1}=(n-1)\frac{b}{n},\ x_n=n\frac{b}{n}=b;$$

這些分點的橫坐標形成以 $\frac{b}{n}$ 爲公差的算術級數。

其次用 $y_0, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1}, y_n$ 表示對應於這些分點的縱坐標，用 s_n 表示"台階形"的面積。

於是顯然可知

$$s_n=y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\cdots\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1}).$$

因從分點 x_i 所作的縱坐標 y_i 等於 kx_i^2，而 $x_i=i\frac{b}{n}$，故

$$y_i=ki^2\frac{b^2}{n^2},$$

卽

$$y_0=0,\ y_1=k\cdot 1^2\frac{b^2}{n^2},\ \ y_2=k\cdot 2^2\frac{b^2}{n^2},\cdots\cdots,\ \ y_{n-1}=k(n-1)^2\frac{b^2}{n^2}.$$

把這些値代入 s_n 的表達式中，得

$$s_n=k\cdot 1^2\frac{b^2}{n^2}(x_2-x_1)+k\cdot 2^2\frac{b^2}{n^2}(x_3-x_2)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+k(n-1)^2\frac{b^2}{n^2}(x_n-x_{n-1}),$$

又因 $x_{i+1}-x_i=\frac{b}{n}$，故上式可寫作

$$s_n=k\cdot 1^2\frac{b^2}{n^2}\ \frac{b}{n}+\ k\cdot 2^2\frac{b^2}{n^2}\ \frac{b}{n}+\cdots\cdots+k\ (n-1)^2\frac{b^2}{n^2}\ \frac{b}{n}.$$

把公因子放到括弧外面去，卽得

$$s_n=k\frac{b^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2].$$

括弧裡面各項的和等於$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. *)

*) 證明這關係時可寫出下列各等式:

$$\begin{aligned}
1^3&=1^3,\\
2^3&=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3,\\
3^3&=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n-1)^3&=[(n-2)+1]^3=(n-2)^3+3(n-2)^21+3(n-2)1^2+1^3,\\
n^3&=[(n-1)+1]^3=(n-1)^3+3(n-1)^21+3(n-1)1^2+1^3,
\end{aligned}$$

把這些等式的左右兩邊各自相加，得

$$n^3=3[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+3[1+2+\cdots+(n-1)]+n$$

或卽 $$n^3=3[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+3\frac{n(n-1)}{2}+n,$$

由此得 $$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{3}\left(n^3-3\frac{n(n-1)}{2}-n\right),$$

或卽 $$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

於是

$$s_n=k\frac{b^3}{n^3}\ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=k\frac{b^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}).$$

這公式所給的是 n 級“內接台階形”的面積，我們可以拿它作爲所論拋物線梯形面積的近似值（是個弱值，因“台階形”完全在梯形內）。當 n 增大時，“台階形”顯然會逐漸填滿梯形 OBC 所佔的那部份平面而接近於後者（圖 125）。因此我們自然就可以規定梯形的面積 s 爲整標函數 s_n 當 n 無限增大時的極限。在這種條件下可得出：

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=k\frac{b^3}{6}\cdot 2=k\frac{b^3}{3}.$$

這裡 s_n 趨於其極限 s 時是逐步增大的。不過除了“內接台階形”之外我們還可以取“外接台階形”，這時代替拋物線的折線可如下作出：從拋物線的每個分點上作平行於 Ox 軸的線段時，我們不把它作到次一條縱坐標處，而把它作到前一條縱坐標處。這樣便得到外接於已給梯形的 n 級“台階形”（圖 125），它的面積 s_n' 的表達式是：

$$s'_n=y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+\cdots\cdots+y_n(x_n-x_{n-1})=$$

$$=\frac{b}{n}(kx_1^2+kx_2^2+\cdots\cdots+kx_n^2)=k\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2),$$

由此可知

$$s_n'=k\frac{b^3}{n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=k\frac{b^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).$$

從這個公式可以得出梯形面積的近似值（是强值，因梯形完全位於“台階形”之內）。

當 n 無限增大時，外接與內接的 n 級“台階形”都無限趨近於梯形 OBC，因而我們可以取“台階形”的面積 s_n' 當 $n\to\infty$ 時的極限作爲梯形的面積 s。但

$$\lim_{n\to\infty} s_n'=k\frac{b^3}{6}\cdot 2=k\frac{b^3}{3},$$

所以得到的值跟以前的一樣，正如我們所料的。這個 s_n' 趨於其極限 s 時是逐漸減小的。

我們看到：因 $BC=k\cdot b^2$，故矩形 $CBB'C'$ 的面積等於 $2\cdot b\cdot kb^2=$

$=2kb^3$; 由此可知拋物線弓形 BOB' 的面積等於

$$2kb^3-2k\frac{b^3}{3}=\frac{4}{3}kb^3,$$

換句話說，若以弓弦BB' 及弓深OD爲邊作矩形 $CBB'C'$，則該弓形的面積等於矩形面積的三分之二。這結果亞幾米德早就得出，他所用的方法直到很多世紀以後才又被人發現，然後這方法又發展爲積分法。

若用區間〔a, b〕作爲拋物線梯形的底，則該梯形的面積 s 等於

$$s=k\frac{b^3-a^3}{3}.$$

因所論梯形的面積顯然等於以〔$0, b$〕及〔$0, a$〕爲底的兩個梯形面積的差；而根據前面所講可知這兩個梯形的面積各等於 $k\frac{b^3}{3}$ 及 $k\frac{a^3}{3}$.

爲了舉例說明起見，我們且用所講拋物線梯形面積的求法，來計算以直線 $y=kx$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ 爲邊的梯形面積。

用點 $x_0=a$, x_1, x_2,……, x_{n-1}, $x_n=b$ 把梯形的底〔a, b〕分成相等的 n 部份，並按"內接台階形"來計算這梯形的面積。若用y_0, y_1, y_2……, y_{n-1}, y_n 表示直線 $y=kx$ 上對應於各分點的縱坐標，用 s_n 表示"台階形"的面積，則可得

$$s_n=y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\cdots\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1});$$

又因 $x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$，又 $y_i=kx_i$，故

$$s_n=k\frac{b-a}{n}(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}).$$

x_0, x_1, ……這些數成爲一算術級數，故知括弧裡面是以 $x_0=a$ 爲首項而以$\frac{b-a}{n}$爲公差的 n 項算術級數的和。於是得

$$s_n=k\frac{b-a}{n}\;\frac{a+\left(b-\frac{b-a}{n}\right)}{2}\;n=k\frac{b^2-a^2}{2}-k\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

由於 n 無限增大時"台階形"的面積 s_n 趨於梯形面積 s，故得：

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

我們不難證明用“外接台階形”來計算時也可得到同一結果。以上所得的面積式子與初等幾何學中的梯形面積式子

$$s=(b-a)\frac{ka+kb}{2}$$

正好相同。

但要注意：以直線 $y=k$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ 爲邊的矩形面積等於

$$s=k(b-a).$$

Ⅱ. 現在來講一般情形。假設以〔a, b〕爲底的曲邊梯形上的曲線是用方程 $y=f(x)$ 給出的，其中 $f(x)$ 是連續於區間〔a, b〕上的函數。

這裡假定在區間〔a, b〕上 $f(x)>0$，即假定所論曲邊梯形位於 Ox 軸以上。定拋物線梯形面積時所用的方法，可以毫無保留地應用到曲邊梯形上去。這方法的步驟是：把梯形的底邊分成若干部份，從分點處往上作縱坐標與曲線相接，然後再從曲線上所得的每個交點往右作平行於底邊的線段到次一條縱坐標或其延線上爲止（或往左作到前一條縱坐標處爲止也一樣），由此所得的台階形面積可以作爲所論曲邊梯形面積的近似值，且若代替曲線的那條折線愈靠近曲線，則所得結果愈準確。而要使折線更靠近曲線，則可使底邊上的分點數增多同時使所分的每一段都減小。從這一切便可得結論說：**我們可取“台階形”面積當底邊分點無限增多且當各分段長度趨於零時的極限，作爲曲邊梯形的面積。**

現在要從解析方面來陳述曲邊梯形面積的求法。

設點 $x_0=a$, x_1, x_2, ……, x_{n-1}, $x_n=b$ 把區間〔a, b〕分成 n 部份：〔x_0, x_1〕,〔x_1, x_2〕,……,〔x_{n-1}, x_n〕. 這些區間我們以後叫做*子區間*。用 y_0, y_1, y_2, ……, y_{n-1}, y_n 表示曲線 $y=f(x)$ 對應於各分點的縱坐標。然後按前法作一 n 級的“台階形”（圖 126），它可能有一部份是內接的，一部份是外接的。

在求拋物線梯形的面積時，我們把底邊分成等段。不過那並不是必需的。這些子區間可以彼此不相等，只不過當它們的個數無限增多時，最大的那個子區間長度必須趨於零。如果沒有後面這個條

件，那末“台階形”可能是不會無限接近於曲邊梯形的。因若把分點增多時使某一區間 (c, b) 保持不變（圖126），則折線只會無限接近於已給曲線 $y=f(x)$ 上的弧段 AC 而根本不會更接近於弧段 CB，因而梯形上的固定部份 $cCBb$ 在取極限的過程中就不會被“台階形”所填滿。這樣我們就不能用“台階形”的面積來定曲邊梯形的面積。

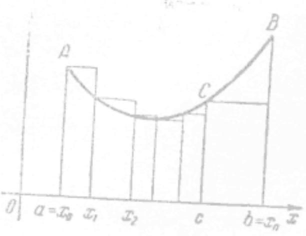

圖 126.

用 s_n 表示所作 n 級“台階形”的面積，用 s 表示所要求的曲邊梯形的面積。寫出 s_n 的表達式。一切 n 級“台階形”由 n 個矩形組成，其中每個矩形的面積很易於表達出來；例如對應於第 $(i+1)$ 個子區間的矩形面積是 $y_i(x_{i+1}-x_i)$. 由此可知

$$s_n=y_0(x_1-x)+y_1(x_2-x_1)+\cdots\cdots+y_i(x_{i+1}-x_i)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1}),$$

或（因 $y_i=f(x_i)$）

$$s_n=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots\cdots+f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\cdots$$
$$\cdots\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}).$$

這和式中各項的形狀都相同，只有自變量的指標不同。為了書寫簡便起見，我們引入一個特殊的記號 Σ（希臘大寫字母，讀如“西格馬”）作為和式的記號；這樣就把上式寫作：

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)(x_{i+1}-x_i). \qquad (*)$$

這記號表示所寫式子中的指標應取得從 Σ 號下面的那個數值起到 Σ 上面的那個數值為止的一切整數值，然後把所有的式子都加起來。

因此表達式 (*) 給出了曲邊梯形面積的近似值。我們要知道和式 (*) 中的每一項 $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ 可以解釋為：在不管多麼小的一段子區間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，一般說來 $y=f(x)$ 總是變動的，但現在

用常量 $y=f(x_i)$ （該子區間上頭一點處的函數值）來代替 $f(x)$，然後用初等方法算出所成圖形（矩形）的面積。

所論曲邊梯形的面積可以**定義**爲：當最大子區間的長度趨於零時 s_n 的極限。於是

$$s=\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} s_n=\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i).$$

96. 物理學中的例子。 現在我們來講一些重要的物理概念，其精密定義也要根據上述定曲邊梯形面積時的同一推理。

I. 變力所作的功。設物體受某力作用而沿直線運動，其中力的方向與運動方向相合。當物體從 M 移動到 N 處時（圖 127），求其所作的功。

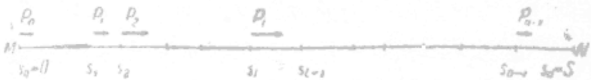

圖 127.

當力從 M 到 N 的全程上是個常量時，大家都知道這時的功可以定爲力與路程的乘積。若 A 表示功，P 表示力，S 表示路程 MN 的長度，則 *)

$$A=PS.$$

今設力在 M 到 N 的路程上不斷改變：當物體從一點移到另一點時力的數值一般說來總在改變。當物體所達路程上的一點與點 M 相距爲 s 時，作用於物體上的那個力就具有與 s 相對應的一個數值。由此可知力是距離 s 的一個函數：$P=f(s)$. 但這時物體從點 M 移到點 N 處所作的功該如何決定？

從點 M 起取與 M 相距各爲 $s_0=0$, s_1, s_2, $\cdots$, s_i, s_{i+1}, $\cdots$, s_{n-1}, $s_n=S$ 的點，把全程 MN（即變量 s 的變化區間）分成 n 段。然後把作用於

*) 若表示 P 的單位是公斤，表示 S 的單位是米，則表示 A 的單位是公斤米。若表示 P 的單位是達因，表示 S 的單位是厘米，則表示 A 的單位是爾格。

路程 MN 上的變力 P 換成別的力，使後者在每一段路程上的值是個常量，例如我們可取這個常量等於作用力P 在該段路程始點處的值。於是這個力在第一段〔s_0, s_1〕上的值等於 $P_0=f(s_0)$，在第二段〔s_1, s_2〕上的值等於 $P_1=f(s_1)$，……，在第（$i+1$）段路程〔s_i, s_{i+1}〕上的值等於 $P_i=f(s_i)$，其餘類推。

設力在某路程上所作的功等於其在各分段上所作的那些功的和，則所設的新力所作的功 A_n 顯然等於：

$$A_n=f(s_0)(s_1-s_0)+f(s_1)(s_2-s_1)+\cdots\cdots+f(s_i)(s_{i+1}-s_i)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+f(s_{n-1})(s_n-s_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}f(s_i)(s_{i+1}-s_i).$$

我們拿 A_n 這個數値作爲所求功的近似值，同時若 n 的數愈大且全程 MN所分的段落愈小，那末這近似值也愈加準確。因爲這時替代原力的那個輔助力會愈來愈接近於原力。

往下做也跟討論面積時一樣，我們讓 n 無限增大同時使最大的那一分段路程趨於零。於是所設的輔助力就會無限接近於已給力 P，所求的功 A 便可以定義爲 A_n 當最大分段的長度趨於零時的極限：

$$A=\lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0}A_n=\lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(s_i)(s_{i+1}-s_i).$$

Ⅱ. 路程。設有物體作平移運動，且已知其在某段時間〔T_1, T_2〕內任一瞬時 t 的速度是 v，換句話說，所給速度是時間 t 的函數：$v==\varphi(t)$。現在要求出從 $t=T_1$ 到 $t=T_2$ 時物體所經的路程 s。我們記得在第三章（$n°50$）中講過與此相反的問題，就是曾從已給路程是時間的函數而求出速度。

若在整段時間〔T_1, T_2〕內的速度 v 是個常量，換句話說，若運動是等速進行的，那末大家知道路程 s 的長短可以用物體運動時間的久暫與速度兩者的乘積來表示：$s=v(T_2-T_1)$，但若速度隨着時間而變，則求所經路程時必須採用前面（定面積及定功時）已經講過兩遍的推理方法。這就是用區間內部的點 $t_0=T_1$, t_1, t_2,…, t_i, t_{i+1},…, t_{n-1}, $t_n=T_2$ 把代表整段時間的區間〔T_1, T_2〕分成許多小段（子區間）。然後把已

給運動換成另一種運動，使後者在每小段時間內成爲等速運動，例如可取等速運動在子區間〔t_i, t_{i+1}〕內的速度 v 等於已給運動在該段時間始瞬時的速度：$v=\varphi(t_i)$。這時從 $t=t_i$ 到 $t=t_{i+1}$ 時所經的路程等於 $\varphi(t_i)(t_{i+1}-t_i)$。於是顯然可知對應於〔$T_1$, T_2〕這段時間的路程 s_n 等於其每小段時間內所經距離的和。也就是說

$$s_n=\varphi(t_0)(t_1-t_0)+\varphi(t_1)(t_2-t_1)+\cdots\cdots+\varphi(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\varphi(t_{n-1})(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

s_n 的值是路程 s 的近似值，同時若 n 愈大且若子區間〔t_i, t_{i+1}〕愈小，則這近似值愈加準確。當最大的子區間趨於零時，s_n 的極限便是所求的路程 s：

$$s=\lim_{\max(t_{i+1}-t_i)\to 0}s_n=\lim_{\max(t_{i+1}-t_i)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

Ⅲ. 質量。取一段曲線形的物體，並設其上每點處的密度爲已知。這表示已給密度 δ 爲曲線上某一端點起到所論點止的距離 s 的函數：$\delta=\psi(s)$. 設曲線的全長是 S，我們要算出它的質量是多少，卽算出區間 $s=0$ 到 $s=S$ 的質量。這問題跟第三章（$n°50$）中所考慮的也正相反。

若全部曲線上的密度是個常量，換句話說，若曲線上的物質是均勻分佈的話，那末質量 m 的大小可用密度與曲線長度兩者的乘積來表示：$m=\delta S$。但若密度沿着曲線而改變時，那末我們可以照以前所講的方法來做：取曲線上與始點相距各爲 $s_0=0$, s_1, s_2, $\cdots$, s_i, s_{i+1}, $\cdots$, s_{n-1}, $s_n=S$ 的點把全部曲線分成 n 段，並假設每段子區間〔s_i, s_{i+1}〕內的密度是個常量，例如，等於已給密度在該段子區間始點處的值：$\delta=\psi(s_i)$。在這種假設之下，可知對應於子區間〔s_i, s_{i+1}〕的質量等於 $\psi(s_i)(s_{i+1}-s_i)$，而對應於整段區間〔0, S〕的曲線質量顯然等於

$$m_n=\psi(s_0)(s_1-s_0)+\psi(s_1)(s_2-s_1)+\cdots+\psi(s_i)(s_{i+1}-s_i)+\cdots$$
$$\cdots+\psi(s_{n-1})(s_n-s_{n-1}).$$

當各分段中最大分段的長度趨於零時（也就是當 n 無限增大時），

我們所設的"逐段均勻的"質量分佈情形會無限趨近於已給的質量分佈情形，所以跟前面的情形一樣，這所要求的質量 m可以定為當曲線上最大分段的長度趨於零時 m_n 的極限：

$$m=\lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0} m_n=\lim_{\max(s_{i+1}-s_i)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(s_i)(s_{i+1}-s_i).$$

97. 定積分。存在定理。 從$n°$ $n°$95及96中可以看出，定義幾何及物理上的一些重要概念（面積、功、路程、質量等概念）時，都需要對已給的函數及其宗標作相同的一系列運算（而在這些運算中以極限運算為主）。但既然這一系列的運算可以應用到各種不同的情形上並又具有極重要的意義，那末我們自然必須從數學上來嚴格制定它，而不要再去依靠這個或那個問題中的具體條件。做到了這一步之後，這一系列運算法對於每一合適的個別情形的應用就成為例行的合法步驟，而無需再作特殊的思考，因為在特殊條件下作那些思考時常要比在一般條件下困難些。

如果抽出變量的物理意義及其種種不同的表示法，那末上述一系列運算法的內容就是：1） 用點 $x_0=a$, x_1, x_2,$\cdots$, x_{n-1}, $x_n=b$ 把區間$[a, b]$（假設在該區間上已給函數 $y=f(x)$ 為連續，且$f(x)>0$）分成 n 個子區間，其中 $a<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<b$; 2）把每個子區間始點處的函數值 $f(x_i)$ 與該子區間的長度 $x_{i-1}-x_i$ 相乘，也就是說，寫出乘積 $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$; 3）取所有這些乘積的和式：

$$I_n=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)(x_{i+1}-x_i). \qquad (A)$$

若用 Δx_i 表示 $x_{i+1}-x_i$，上式也可寫作

$$I_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i;$$

及 4）最後求出當最大子區間趨於零時和式 I_n 的極限值 I：

$$I=\lim_{\max\Delta x_i\to 0} I_n.$$