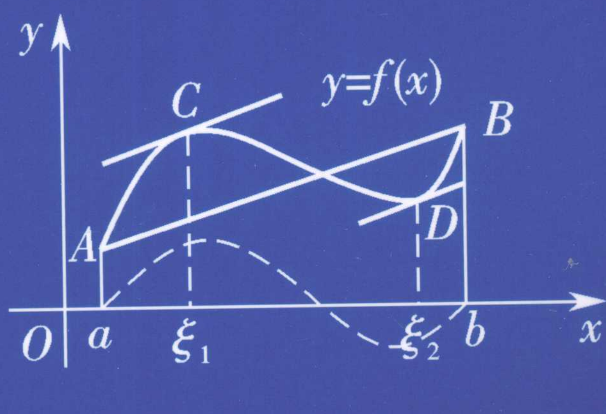
高等数学解题指导

Gaodeng Shuxue Jieti Zhidao

陈津　陈成钢　主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学解题指导

主　编:陈　津　陈成钢
编　委:陈　津　陈成钢　吕良福
李旭东　张　舜　贾倩倩
李迎春　冯继元　张立东

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是与全国使用最多的最新版高等数学教材《高等数学》(第6版,同济大学数学系主编、高等教育出版社出版)同步的高等数学配套的学习指导用书.本书既可以作为高校师生教、学高等数学的参考书,也可以作为习题课的教材,还可以作为期中、期末备考及“考研”、“竞赛”的复习参考书.

每章对基础知识作了总结、归纳、对典型例题,对各章知识点及题型进行了模块化的分类,对常用的解题思路作了分析,解题方法作了归纳,有助于读者对知识的理解与解题能力的提高.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指导/陈津,陈成钢主编.—天津:天津大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-5618-3152-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第150260号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址	www.tjup.com
印　　刷	河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185 mm×260 mm
印　　张	21.5
字　　数	537千
版　　次	2009年9月第1版
印　　次	2009年9月第1次
印　　数	1-4 000
定　　价	34.00元

前　言

高等数学在高等理工科院校中是一门最重要的基础课之一，同济大学数学系主编的《高等数学》（第6版）是"十一五"国家级规划精品教材，为多数工科学院所采用.但由于高等数学内容本身的抽象性、严密的逻辑性，在课堂上要使得学生把知识完全消化理解确实十分困难，为了帮助学生学好这门课，帮助学生开拓思路、真正掌握这门课的知识体系就显得尤为必要，为此我们编写了这本同步提高学习指导书，旨在帮助学生深入理解课程的知识体系、重要概念、公式与定理等，掌握一定解题方法与技巧，提高解题能力；同时也为后继课的学习打下牢固基础.

本书编排顺序与同济大学数学系主编的《高等数学》（第6版）一致，分为十二章.每章由四部分组成，包括：一、本章知识概述；二、知识要点及主要公式；三、解题指南；四、阶梯训练.在解题指南模块上我们把每章的知识点都进行归纳分类，把本章主要解题思想都包含在内，对一些比较有代表性的题目，我们还力求一题多解，以开拓读者视野.为使学生了解最新硕士研究生入学考试的题目难度、题型，我们又采纳了最近三年的研究生入学考试的试题，大部分题目都给出了十分详细的解答和注释；考虑到天津市大学数学竞赛已经举办八九届的实际情况，我们精选了其中一套在难度上比较有代表性的2005年天津市大学数学竞赛题目，以起到抛砖引玉的作用.每道题也都给出了答案，比较有难度的题目还给出了比较详细的解答.

参加本书编写的有：天津理工大学中环信息学院的陈津（编写本书的第一章 函数与极限、第八章 空间解析几何与向量代数与第十二章 无穷级数）、天津理工大学中环信息学院的李旭东（编写了本书中的第二章 导数与微分）、天津城市建设学院的陈成钢（编写了本书的第三章 微分中值定理与导数的应用、第九章 多元函数微分学、第十一章 曲线积分与曲面积分以及附录一、附录二、附录三、附录四及答案）、天津理工大学中环信息学院的张舜（编写了本书中的第四章 不定积分）、天津大学的吕良福（编写了本书的第五章 定积分、第六章 定积分的应用与第十章 重积分）、天津理工大学中环信息学院的贾倩倩（编写了本书中的第七章 微分方程）等，全书由陈津、陈成钢统稿、主编.

本书的编写得到天津市高教处穆树发处长，天津理工大学中环信息学院李国强院长、邢桂耕副院长，天津大学出版社的领导和编辑的支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

因编者水平所限，书中有不妥之处，恳请读者批评指正，我们将不胜感激.

编者

2009年5月

目　录

第一章　函数与极限

一、本章知识概述

本章主要内容是函数、极限和连续性概念及其有关运算. 函数是高等数学研究的主要对象,而极限是高等数学研究问题、解决问题的主要工具和方法. 高等数学中的一些的重要概念,如连续、导数、定积分等,不外乎是不同形式的极限. 作为一种思想方法,极限是变量在无限变化过程中变化的趋势,是一个确定的值,可以把某些实际问题的确定结果看做一系列无限近似数值的变化趋势,即数列或函数的极限,这是一种重要的数学思想方法. 极限方法贯穿于高等数学的始终.

然而,极限也是一个难学、难懂、难用的概念,究其原因在于,极限集现代数学的两大矛盾于一身. ①动与静的矛盾:极限描述的是一个动态的过程,而人的认识能力本质上具有静态的特征. ②无穷与有穷的矛盾:极限是一个无穷运算,而人的运算能力本质上具有有穷的特征. 极限就是在这两大矛盾的运动中产生,这也是极限难学、难懂、难用之所在.

连续是高等数学研究对象的一个基本性质,也是函数研究的重点之一. 往往作为讨论函数问题的一个先决条件,且与后面将要学到的函数的可导性、可积性存在着不可分割的逻辑关系.

二、知识要点及主要公式

(一)集合

1. 数集

$\varnothing$(空集)$\subset$**N**(自然数集)$\subset$**Z**(正整数集)$\subset$**Q**(有理数集)$\subset$**R**(实数集)$\subset$**C**(复数集).

2. 区间和邻域

开区间:$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

闭区间:$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间:$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$;

无限区间:$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$或$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$;

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$或$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$;

或　$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$(全体实数);

邻域:$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$称为以 a 为中心,以 δ 为半径的邻域(a 的 δ 邻域),也可记为 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$;

去心邻域:$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta,x\neq a\}$;

$(a-\delta,a)=\{x|a-\delta<x<a\}$称为 a 的左 δ 邻域;

$(a,a+\delta)$称为$\{x|a<x<a+\delta\}$称为 a 的右 δ 邻域.

(二)函数

1. 定义

设数集 $D\subset\mathbf{R}$(实数集),则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常记为 $y=f(x),x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域.

$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

注 ①函数常用 f,g,F,G,φ,ψ 等表示,如 $y=g(x),y=F(x),x=\varphi(t)$ 等.

②集合 $\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

③两个要素:定义域和对应法则 f 是函数概念最本质的特征. 几个表达形式不同的函数是否为同一函数完全取决于这两个要素.

2. 几种特性

(1)有界性与无界性

$\forall x\in X,\exists M>0$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

$\forall M>0,\exists x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 有界与否与 X 有关,$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界,但在 $[1,+\infty)$ 上有界.

(2)单调性

$\forall x_1,x_2\in I\subset D$,当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的).

(3)奇偶性

$\forall x,-x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

注 若 $f(x)$ 为奇函数,且 $x=0\in D$,则由 $f(-0)=-f(0)$,必有 $f(0)=0$.

(4)周期性

$\forall x,x\pm l\in D$,有 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,一般周期指最小正周期.

3. 反函数与复合函数

反函数:设函数 $f:D\to f(D)$ 为单射(单调函数),则有逆映射 $f^{-1}:f(D)$,则 f^{-1} 称为 f 的反函数.

$x\in D,y=f(x)\in f(D)$

定义可以理解为对每个 $y\in f(D)$,存在 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,则 $x=f^{-1}(y)$,习惯上用 x 表示自变量,记为 $y=f^{-1}(x)$.

例如:$y=x^3,x\in\mathbf{R}$,则 $x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}},y\in\mathbf{R}$;$y\in f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$,但 $y=f^{-1}(x)$ 也称为 $y=f(x)$ 的反函数,如 $y=\sqrt[3]{x}$ 也称为 $y=x^3$ 的反函数.

注 ①在同一坐标系中,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像为同一条曲线,而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

②$y=f(x)$ 与其反函数 f^{-1} 单调性一致.

③$f^{-1}[f(x)]=x,f[f^{-1}(x)]=x$.

复合函数:设 $y=f(u)$ 定义域为 D_1,$u=g(x)$ 定义域为 D_2,而且 $g(D_2)\subset D_1$,则

$$\underbrace{x\in D_2\to u=g(x)\in D_1\to y=f(u)}_{y=f[g(x)]}$$

那么 $y=f[g(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $f\circ g(x)=f[g(x)]$，f 又称为外函数，g 称为内函数，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

注　①$g(D_2)\subset D_1(g(D)\subset D_f)$ 为 f 与 g 可以复合的条件. 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合.

②有时，$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合的定义域可能是 $u=g(x)$ 的定义域的一部分，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^3$ 复合，得 $y=\arcsin x^3$ 的定义域为 $[-1,1]$，为 $u=x^3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

4. 初等函数

以下 5 类函数统称为基本初等函数.

幂函数：$y=x^{\mu}$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）.

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\mathrm{e}^x$）.

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）.

三角函数：如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等.

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

初等函数：由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数. 如 $y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x, y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$

注　分段函数是一个函数，在其定义域的不同部分用不同的式子表示对应规律. 如果不能用一个统一的式子表示则不能称为初等函数.

（三）极限

1. 定义

（1）数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

注　①ε 是任意给定的正数，是用来刻画 x_n 与常数 a 的接近程度. ε 具有任意性和稳定性的双重意义，ε 的任意性刻画了 x_n 与 a 无限接近，同时 ε 又具有相对稳定性，一经取定，它就确定了，这样用有限形式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 来表示 x_n 无限接近于 a 的过程.

②一般 $N=N(\varepsilon)$，即 N 与 ε 有关，一般说来 ε 越小，N 越大，但并不唯一. 如果存在一个 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，那么大于等于这个 N_1 的任何正整数都可以取作定义中的 N.

（2）函数极限（$\varepsilon-\delta$ 定义，$\varepsilon-X$ 定义）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

注　①一般 $\delta=\delta(\varepsilon)$，即 δ 与 ε 有关. δ 是用来刻画 x 与 x_0 的接近程度的，与数列极限定义中 N 的作用类似.

②研究 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，是为了研究在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中 $f(x)$ 的性态，此时 $f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义完全无关. 即使 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，在讨论 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，在讨论 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的过程中，函数值 $f(x_0)$ 不起任何作用，因此定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$.

③在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中，x 是既从 x_0 的左侧又从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 若仅考虑 x 从

x_0 的左侧(右侧)趋于 x_0,记作 $x\to x_0^-$(记作 $x\to x_0^+$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$,那么 A 就叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(右极限),记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$).

这是两个独立的极限过程,左右极限常用来讨论分段函数的分段点处的极限与间断点. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且相等,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件.

④在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义中,若 $|x|$ 无限增大,则只要把定义中的 $|x|>X$ 改成 $x>X$ 或 $x<-X$,则为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\text{存在}\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

2. 性质

(1)唯一性

若当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在,则极限唯一.

(2)局部有界性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$,则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0(X>0)$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3)局部保号性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$),那么存在常数 $\delta>0(X>0)$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ $(|x|>X)$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内(或 $|x|$ 充分大) $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),而且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$,那么 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

(4)函数极限与数列极限的关系

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内一收敛于 x_0 的数列,且 $x_n\neq x_0$ $(n\in\mathbf{N}^+)$,则对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3. 无穷小与无穷大

无穷小:若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$($x\to\infty$)时的无穷小,即以零为极限的变量为无穷小(量).

无穷大:对于 $\forall M>0$,$\exists X>0(\delta>0)$,当 $|x|>X(0<|x-x_0|<\delta)$ 时,总有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ $(x\to x_0)$ 时为无穷大,记为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}f(x)=\infty$,即绝对值无限增大的变量为无穷大(量).

注 ①无穷小与无穷大都是变量,不是很小的数与很大的数,但 0 是唯一的作为无穷小的常数.

②无穷小与无穷大都与自变量变化过程有关,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,当 $x\to\infty$ 时是无穷小,但当 $x\to$

0 时是无穷大.

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，此时 $f(x)$ 的极限是不存在的，为了反映 $|f(x)|$ 无限增大这种性态，也说成 $f(x)$ 的极限为无穷大.

④在定义中把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$（或 $f(x)<-M$），就记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$（或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$）.

⑤如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

无穷小与函数极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

无穷大与无界函数的关系：无穷大是指在自变量变化趋势下，函数值变化的趋势是无穷大. 无界函数是指自变量在定义域内变化时，函数值可以无限大. 即 $\forall M>0$，$\exists x_1$，使 $|f(x_1)|>M$，无穷大要求对 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的一切 x 都满足 $|f(x)|>M$. 因此，简而言之，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 一定是无界函数，反之则不一定成立，见例 1.35.

无穷小与无穷大之间的关系：在自变量变化的同一过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

无穷小的比较：设 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且 $\alpha\neq 0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，称 β 是比 α 低阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，称 β 与 α 为同阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

4. 极限的运算法则

无穷小的性质：设 α,β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小，u 是有界变量，c 是常数，则有

①$\alpha\pm\beta$、$u\alpha$、$c\alpha$、$\alpha\beta$ 是这一变化过程中的无穷小；

②$\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$；

③等价无穷小代换定理：$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $\Rightarrow \lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注　①这个定理在求极限 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 比较复杂时十分有用，即用简单的无穷小 α',β' 代换，计算 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 往往会比较简单.

②注意 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 是分子、分母作为整体与 α',β' 是等价无穷小. 即分子、分母是乘积形式，可以整体或部分因子用等价无穷小代换，但代数和形式则不一定成立. 即当 $\alpha_1\sim\alpha'_1$，$\alpha_2\sim$

α'_2, $\beta_1 \sim \beta'_1$, $\beta_2 \sim \beta'_2$,则 $\lim \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} = \lim \frac{\alpha_1'\alpha_2}{\beta_1'\beta_2} = \lim \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\beta_1'\beta_2'}$. 对代数和如 $\alpha_1 \pm \alpha_2$ 与 $\alpha'_1 \pm \alpha_2$ 或 $\alpha_1' \pm \alpha_2'$ 则未必等价. 如 $x \to 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$ 但 $\tan x - \sin x$ 与 $x - x = 0$ 不等价.

③常用的等价无穷小:当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; $\arcsin x \sim x$; $\arctan x \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $\ln(1+x) \sim x$; $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

极限的运算法则:若在自变量的同一变化过程中 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$,则

①$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

②$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$.

上述情形均可以推广到有限个函数的和、差、积的情形,特别地

$\lim cf(x) = cA$ (c 为常数), $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$.

③$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$.

上述四则运算以数列情形依然成立.

④复合函数极限的运算法则.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ 且在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内 $\varphi(x) \neq a$,又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$,则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to a} f(u) = A$. 那么

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

⑤极限存在的两个准则.

准则 I:(夹逼准则)如果 1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或 $|x| > M$)时 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

准则 II:(单调有界准则)单调有界数列必有极限.

⑥两个重要极限.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 2) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$(或 $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$).

注 公式 1)、2) 也可以推广到 x 函数,即 $\lim\limits_{u(x) \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$, $\lim\limits_{u(x) \to \infty} \left[1 + \frac{1}{u(x)}\right]^{u(x)} = e$, $\lim\limits_{u(x) \to 0} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$.

(四)函数的连续性

1. 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$($\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$), $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,总有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

注 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$),则说函数 $f(x)$ 在 x_0 右连续(左连续);如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在 x_0 右连续且函数 $f(x)$ 在 x_0 左连续;反之,当 $f(x)$ 在 x_0 右

连续且$f(x)$在x_0左连续时，函数$f(x)$在x_0处连续. 例如$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$在$x_0=0$处右连续，但$f(x)$在$x_0=0$处不是左连续的，因此，$f(x)$在$x_0=0$处不连续.

2. 函数的间断点

如果函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称点x_0为函数$f(x)$的一个间断点（也称不连续点）.

函数的间断点有以下三种情况：

①若$f(x)$在点x_0处没有定义，则$f(x)$在点x_0处不连续，点x_0为$f(x)$的一个间断点；

②若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，即$f(x)$在点$x_0$处没有极限，则$f(x)$在点$x_0$处不连续，点$x_0$为$f(x)$的一个间断点；

③若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则$f(x)$在点$x_0$处不连续，点$x_0$为$f(x)$的一个间断点.

通常间断点分成两类：如果点x_0是$f(x)$的间断点，但左、右极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，那么称点$x_0$为$f(x)$的第一类间断点，否则称为第二类间断点（即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都不存在或只存在一个）.

第一类间断点可分为两类：若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称点$x_0$为$f(x)$的跳跃间断点；若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$f(x_0)\neq A$或$f(x_0)$不存在，则称$x_0$为$f(x)$的可去间断点

第二类间断点可分为两类：若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$之一为$\infty$，则称点$x_0$为$f(x)$的无穷间断点；不属于以上三种类型的间断点为振荡间断点（此时$x\to x_0$时，$f(x)$在某两个值之间无限次变动，称点x_0为$f(x)$的振荡间断点）.

3. 连续函数的运算与初等函数的连续性

①有限个在某点连续的函数的和、差、积、商（分母在该点不为零）是在该点连续的函数.

②如果函数$y=f(x)$在区间I_x上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数$x=\varphi(y)$在对应的区间$I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加（或单调减少）且连续.

③对复合函数$y=f[\varphi(x)]$，若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数$y=f(u)$在点$u=a$连续，那么$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$.

注　此性质在求极限时有重要意义，即条件满足时函数符号与极限符号可以交换次序.

④若$u=\varphi(x)$在$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，那么复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也是连续的.

注　复合函数极限的运算法则与上面结论(3)、(4)是条件逐渐加强的三个结论. 复合函数极限的运算法则中仅为$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$存在，$\lim\limits_{u\to a}f(u)$存在，(3)中$f(u)$在点$u=a$连续，(4)中$u=\varphi(x)$在$x=x_0$连续，$f(u)$在$u=\varphi(x_0)$连续.

⑤基本初等函数在它们的定义域内连续.

⑥一切初等函数在其定义区间内都连续.

注　定义区间为定义域内除了孤立点外的区间.

4. 闭区间上连续函数的性质

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续$\Leftrightarrow f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续，且在a点右连续，b点左连续.

①最大值和最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

②有界性定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

③零点定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=0(a<\xi<b)$.

④介值定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在区间端点取不同的函数值$f(a)=A$及$f(b)=B$,那么对于A与B之间的任意一个数C,在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

注　零点定理是介值定理的特殊情形,在讨论方程$f(x)=0$根的情况以及在证明一些等式时常用到该定理.

三、解题指南

(一)有关函数例题

例 1.1　设$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域.

解　由题意知,要使$f(x+a)+f(x-a)$有意义,只要

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

由于$a=\max\{-a,a\},1-a=\min\{1-a,1+a\}$.

当$a<1-a$时,$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,1-a]$;当$a=1-a$,即$a=\frac{1}{2}$时,其定义域为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$;当$a>1-a$,即$a>\frac{1}{2}$时,其定义域为空集.

注　求复合函数的定义域时,内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

例 1.2　已知$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,$\varphi(x)\geqslant 0$,求$\varphi(x)$并写出它的定义域.

解　因为$f(x)=e^{x^2}$,所以$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,即$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,两边取对数,得$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$,又$\varphi(x)\geqslant 0$,因此$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,其定义域为$(-\infty,0]$.

例 1.3　设$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1,\\x^2, & |x|<1,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$.

求:(1)$f[g(x)]$;(2)$g[f(x)]$.

解　(1)$f[g(x)]=\begin{cases}\ln x, & |\ln x|\geqslant 1,\\(\ln x)^2, & |\ln x|<1,\end{cases}$

即
$$f[g(x)]=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant\frac{1}{e}\text{或}x\geqslant e,\\(\ln x)^2, & \frac{1}{e}<x<e.\end{cases}$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\\ln x^2, & -1<x<0\text{或}0<x<1.\end{cases}$

注　复合函数定义域要兼顾到整个复合过程都有意义.

例 1.4　设$f(x)$满足$2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{a}{x}$($a$为常数),求$f(x)$.

解 已知 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{a}{x}$, (1)

用$\frac{1}{x}$代换(1)中的 x 得

$$2f(\frac{1}{x})+f(x)=ax. \tag{2}$$

式(1)×2－式(2)得

$$3f(x)=\frac{2a-ax^2}{x},\text{即}f(x)=\frac{2a-ax^2}{3x}$$

注 变量替换是数学证明与计算中常用的方法.

例 1.5 设 $y=f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<-2,\\ 2x, & x\geqslant -2.\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

分析 求反函数的方法一般由原表达式将自变量反解出来原函数的值域为反函数的定义域.

解 当 $x<-2$ 时,$y=-x^2$单调增加且 $y<-4$,由 $y=-x^2$解得 $x=-\sqrt{-y}$,所以

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{-x},\quad x<-4.$$

当 $x\geqslant -2$ 时,$y=2x$ 单调增加且 $y\geqslant -4$,由 $y=2x$ 解得 $x=\frac{1}{2}y$,所以

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x,\quad x\geqslant -4.$$

综上 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<-4,\\ \frac{1}{2}x, & x\geqslant -4.\end{cases}$

例 1.6 $f(x)$与 $\varphi(x)$互为反函数,求$f(\frac{x}{2})$的反函数.

解 因为$f(x)$与 $\varphi(x)$互为反函数,所以当 $y=f(x)$时,$x=\varphi(y)$,设 $y=f(\frac{x}{2})$,则有 $\frac{x}{2}=\varphi(y)$,所以$f^{-1}(\frac{x}{2})=2\varphi(x)$.

例 1.7 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\cos^2 x$, (2)$y=2^{(x-1)^2}$, (3)$y=\ln\{\ln[\ln(x^2+1)]\}$.

解 (1)$y=u^2$,$u=\cos x$,u 为中间变量.

(2)$y=2^u$,$u=v^2$,$v=x-1$,u,v 为中间变量.

(3)$y=\ln u$,$u=\ln v$,$v=\ln w$,$w=x^2+1$,u,v,w 为中间变量.

例 1.8 (1)函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$是否为同一个函数?它们是初等函数吗?

(2)说明符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 不是初等函数的理由.

解 (1)这两个函数的定义域相同,都是$(-\infty,+\infty)$,这两个函数的对应法则也相同,都

可以表示为 $y=|x|$,即 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,都有相同的 y 值与其对应,所以它们表示同一个函数.

又 $y=\sqrt{x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2$复合而成的复合函数,符合初等函数的定义,所以是初等函数的定义,所以是初等函数.

(2)符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,如果它是初等函数,则在定义区间内必连续,而实际上 $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=1$,即在 $x=0$ 处间断. 另外符号函数无法表达成一个解析式,与初等函数的定义相违背,故 $y=\operatorname{sgn} x$ 不是初等函数.

(二)极限的计算与证明

研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,求极限的常用方法有:(1)利用极限的定义证明极限;(2)利用极限的四则运算法则求极限;(3)利用初等数学公式及其变换求极限等;(4)利用函数的连续性求极限;(5)利用洛必达法则求极限;(6)利用等价无穷小的代换求极限;(7)利用变量代换与两个重要极限求极限;(8)数列极限转化为函数极限;(9)利用极限的夹逼准则求极限;(10)利用导数的定义求极限;(11)利用中值定理(包括拉格朗日中值定理、泰勒公式等)求极限;(12)利用定积分的定义求某些和式的极限;(13)先证明数列极限的存在(常用到“单调有界数列必有极限”的准则,再利用递归关系求极限);(14)利用积分中值定理求极限等. 当然,这些方法之间也不是孤立的,如在利用洛必达法则时经常用到变量代换与等价无穷小的代换,这大大简化计算. 对于定积分的定义,要熟悉其定义形式,如

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n};$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

1. 利用极限定义证明极限

例 1.9 利用极限定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

分析 用 $\varepsilon-N$ 定义证明数列极限,关键是要找出正整数 N. 找 N 的一般过程如下:

对 $\forall\varepsilon>0$,由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 适当放大为 $|x_n-a|<\varphi(n)<\varepsilon$ 的形式,注意 $\varphi(n)$ 要使得从不等式 $\varphi(n)<\varepsilon$ 中容易解出 $n>\psi(\varepsilon)$. 取 $N>[\psi(\varepsilon)]$,则当 $n>N$(N 不唯一)时,总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{n!}{n^n}<\varepsilon$,只要$\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}<\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$(当然也可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+2, N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+3,\cdots$),则当 $n>N$ 时,总有 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$ 成立,由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

例 1.10 设$f(x)$在 x_0的某去心邻域内大于零,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

分析 与例 1.9 类似,用 $\varepsilon-\delta$(或 $\varepsilon-X$)定义证明函数极限的关键是想办法找到 δ(或 X),其一般过程如下:

对 $\forall\varepsilon>0$,由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 适当放大为 $|f(x)-A|<\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon$(或 $|f(x)-A|<\cdots<C\varphi(|x|)<\varepsilon$)的形式,注意($|x-x_0|$)($\varphi(|x|)$)要使得从不等式 $\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon(\varphi(|x|)<\varepsilon)$ 中容易解出 $|x-x_0|<\psi(\varepsilon)$. 取 $\delta=\psi(\varepsilon)$(或取正数 $X=\psi(\varepsilon)$),则当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

证明　对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}\right|<\varepsilon$ 成立,

①当 $A=0$ 时,上式变为 $\left|\sqrt{f(x)}-0\right|<\varepsilon$,即 $\left|\sqrt{f(x)}\right|<\varepsilon$.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,所以总 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-0|<\varepsilon^2$,故有 $\sqrt{|f(x)|}<\varepsilon$,所以 $\left|\sqrt{f(x)}\right|<\varepsilon$.

②当 $A>0$ 时,要使 $\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}\right|=\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\varepsilon$,

只要　$\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}<\varepsilon$ 即可.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,所以总 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\sqrt{A}\,\varepsilon$,故有

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}\right|<\frac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|<\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{A}\,\varepsilon=\varepsilon,$$

所以　$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

例 1.11　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0(a>1)$.

分析　对于 $\forall\varepsilon>0$,由 $\left|\dfrac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon$,解出 $\varphi(n)<\varepsilon$ 比较困难.

可令 $a=1+b,b>0$ 利用二项式定理将 a^n 展开.

证明　设 $a=1+b,b>0$

$$\forall\varepsilon>0,\text{要使}\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+b)^n}=\frac{n}{C_n^0+C_n^1b+C_n^2b^2+\cdots+C_n^nb^n}$$

$$<\frac{2n}{n(n-1)b}<\frac{4}{nb}<\varepsilon\ \left(n-1>\frac{n}{2},n>2\right),$$

只要 $n>\dfrac{4}{b\varepsilon}$即可,取 $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{4}{b\varepsilon}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon\ \text{恒成立},$$

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0.$

例 1.12　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析　对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$,只要 $0\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$,即 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$,或 $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$,由例 1.11 易证.

证明　对于 $\forall\varepsilon>0$,有 $1+\varepsilon>1$,由例 1.11,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$,所以存在 N,使得当 $n>N$