

中等算學研究會叢書第二種

論 通 學 算

著 者 石 介 余

訂 校

樹 家 周
基 鴻 張

上 海 中 華 書 局 印 行

民國二十二年三月印刷
民國二十二年三月發行



◎ 算 學 通 論 (全一冊)
定 價 銀 八 角

(外埠另加郵匯費)

編 著 者 余 介 石
校 訂 者 周 家 樹
發 行 者 張 鴻 基
印 刷 者 中 華 書 局 有 限 公 司
代 表 人 陸 費 達
中 華 書 局 印 刷 所

總發行所 上海棋盤街 中華書局

分發行所 中華書局

北平天津張家口石家莊那合保定
濟南青島太原開封鄭州西安蘭州
成都重慶長沙常德衡州漢口南昌
九江安慶蕪湖南漳徐州杭州溫州
福州廈門廣州汕頭潮州梧州雲南
瀋陽 錦州 香港 新加坡

算 學 通 論

目 次



緒言	(1—6)
上篇 算學觀念發達史	(7—66)
第一章 算學思想的起源	(7—12)
1. 與生均生的思想	(7)
2. 史前期的算學知識	(8)
3. 世界上最古的算學書	(9)
4. 古代各民族學算的動機	(10)
5. 結論	(11)
第二章 幾何中心的算學	(13—26)
6. 希臘算學的特色	(13)
7. 希臘科學的萌芽	(13)
8. 辯證法	(15)
9. 算學基礎的奠立	(16)
10. 幾何學的三大問題	(17)
11. 第一部的幾何教本	(19)

12.	應用算學的開端.....	(21)
13.	圓錐曲線.....	(24)
14.	幾何學的副產.....	(24)
15.	在算學教育上的影響.....	(25)
第三章 代數和算術的繼起.....		(27—37)
16.	希臘人的計算術.....	(27)
17.	希臘人的代數.....	(28)
18.	亞城學派的衰亡.....	(29)
19.	回教的興學.....	(30)
20.	阿拉伯數碼.....	(32)
21.	代數學的演進.....	(33)
22.	中世紀的歐洲.....	(34)
23.	古代的回顧.....	(36)
第四章 新時代的新材料和新方法(38—51)		
24.	新天地和新氣象.....	(38)
25.	代數上的進步.....	(40)
26.	計算方法的進步.....	(42)
27.	兩位天才算學家.....	(43)
28.	解析幾何的產生.....	(45)
29.	微積分的發明.....	(47)

30.	同享發明榮譽的另一人.....	(49)
31.	三百年來的算學.....	(50)
第五章	宇宙觀的改造.....	(52—64)
32.	算學的效力.....	(52)
33.	舊力學的破綻.....	(53)
34.	絕對的尋求.....	(54)
35.	邁克爾生和摩來的實驗.....	(56)
36.	相對論的來源.....	(57)
37.	相對特論.....	(58)
38.	四次元時空綿續體.....	(61)
39.	相對論的普遍性與實驗.....	(62)
上篇問題		(65—66)
中篇	算學的形式和結構.....	(67—112)
第六章	算學命題的形式.....	(67—78)
40.	命題的範式.....	(67)
41.	命題的四種變化.....	(68)
42.	間接證法.....	(69)
43.	轉命題的同值.....	(71)
44.	駢偶命題律.....	(72)
45.	同一的相對與絕對.....	(74)

46.	條件的必要性和充足性.....	(76)
第七章 算學的出發點.....(79—84)		
47.	簡單兩字的歧義.....	(79)
48.	一個理想的新世界.....	(81)
49.	無理由的理由.....	(83)
第八章 公理的性質.....(85—97)		
50.	公理和公設.....	(85)
51.	公理和經驗.....	(86)
52.	公理的相對性.....	(88)
53.	無定義的名詞.....	(90)
54.	莫名其妙的科學.....	(93)
55.	算學系統特性.....	(94)
56.	賢明的平民政治.....	(96)
第九章 三種不同的幾何系統 (98—110)		
57.	幾何的派別.....	(98)
58.	第五公設.....	(99)
59.	後人的批論.....	(101)
60.	第一種的非歐幾何.....	(104)
61.	旁氏理想世界裏的幾何系統.....	(106)
62.	第二種的非歐幾何.....	(107)

63. 幾何和實驗	(109)
中篇問題	(111—112)
下篇 算學推廣的方法	(113—182)
第十章 數系	(113—130)
64. 什麼是數	(113)
65. 代數學的性質	(115)
66. 代數學的類別	(116)
67. 自然數	(118)
68. 加法和乘法的單位	(120)
69. 負數	(121)
70. 分數	(123)
71. 無理數	(124)
72. 虛數和雜數	(126)
73. 一個結束	(128)
第十一章 算學的符號	(131—138)
74. 用文字表數	(131)
75. 算術教學的趨勢	(132)
76. 範模	(133)
77. 算學難解的一原因	(134)
78. 學算與複習	(135)

79.	定義的一致性	(137)
-----	--------------	-------

第十二章 變數位標系和應用....(139—149)

80.	變數函數	(139)
81.	函數的圖解	(141)
82.	位標系	(142)
83.	綿積原則	(144)
84.	超跡象的空間	(147)
85.	對偶原則	(147)

第十三章 規矩作圖.....(150—159)

86.	作圖的限制	(150)
87.	作圖的解析準則	(152)
88.	著名的不能問題	(153)
89.	分圓問題	(154)
90.	π 的超越性	(156)
91.	綿積公理	(158)

第十四章 極限.....(160—178)

92.	學算經過的階段	(160)
93.	極限實例	(161)
94.	極限定義和幾何說明	(163)
95.	無理指數	(164)

96.	不定形	(165)
97.	微商	(167)
98.	無窮大	(168)
99.	平行線的交點	(169)
100.	一部和全體的相等	(171)
101.	第五公設的一個錯誤證法	(172)
102.	無窮級數	(174)
103.	關於曲線形的度量	(176)
104.	幾何直覺和邏輯嚴謹	(177)
下篇問題		(179—182)
全書提要和參考書目		(183—189)

算學通論

緒言

“不要以爲算學是艱深難解而和常識相背馳的。他不過是精鍊的常識罷了”

克爾文勳爵

“Do not imagine that mathematics is hard and crabbed and repulsive to common sense. it is merely the etherealization of common sense”——Lord Kelvin.

我們日常生活裏，常常遇到計算的問題，必須有算學的知識，才能解決。但是算學的效用，還不止限於日常生活方面；他乃是近世一切科學的總鑰匙。歷史較爲長遠一些的自然科學，如天文，如物理，如化學，都因儘量用過這種最敏利的工具——算學——來整理，所以有完密

的系統，廣大的發展。新進的自然科學，如生物，如地質，如心理，甚至社會科學，如社會學，如經濟學，種種科目，採用算學的地方，也日見增加。

所以有人就以一種科學中，應用着算學地方的多少，來作為他發展完備程度的判別。客觀性的科學，不論是自然科學或社會科學，誠然是用試驗來做根據。但是如果沒有算學，便不能整理這些由試驗得來的散漫材料，不能歸納成統系的理論，不能得到最準確精密的記錄。就“無所為”的精神看來，算學正不必以他的應用廣遠為可貴，在現在算學知識中，也有不少部分，還不明白有什麼應用的。算學正如隱士高賢，天下有待於他的時候，“摩頂放踵”，在所不辭；用不着他的時候，也決不肯諧俗以求知於當世。

然而算學的應用方面，很可引起研究的興趣，充實研究的內容，這種相輔為用的地方，在算學發展史上，是屢見不鮮的事實，我們應當注意的。

從算學內容的博大，應用的微妙看來，大可

鼓勵研究者的動機，激發他的興趣。但是實際的情形，能如這種期望麼？學算的人有幾個不存“仰之彌高，鑽之彌堅，瞻之在前，忽然在後”的感嘆？縱有“循循善誘”的導師，如希臘名哲歐几里得 Euclid，也只好說，“幾何中無王道”“*There is no royal road to geometry*”。古往今來，算學書籍中的不少名著，不少典籍，那一本不是以“精深博大”著稱，絕無以“平易近人”名世。固然專門著述，名山事業，所重在彼不在此；但是我們初學的人所期望的，却又在此而不在彼。

就算學自身的本質——內容的廣浩，理論的嚴謹，方法的細密，運算的繁重——說來，是絕對不容許這本小冊子能妄冀幾分奢望的。

青年們在中等教育階段裏消耗於算學一科的時間，初中時約佔全部的六分之一，高中時約佔十分之一（這是就高初中必修科算學學分所佔比例而言，選修的，還不在內）。但是教科書所注

重的，在於各種的算法，或是圖形的性質。好像我們在顯微鏡下面，看出動植物某一部分的詳細組織，看不見他的全體形狀。要想明白一些概括的見解，基本的原理，各種基本觀念和方法發展的經過，便不得不在教科書以外去求。凡是研究一門科學，一方面要向細密的地方深入，一方面要從廣闊的地方着眼。我們要知道“所當然”，也要知道“所以然”。只知“所當然”，常常感到枯燥，只知“所以然”，也易流於空疏，二者是不能偏廢的。這一點對於學算學的人尤其重要，算學并不是由零星法則，公式，和定理堆積而成的，他自有基本原理和方法。不明白這些地方的人，決不能了解算學的性質，只能看見許多散碎繁瑣的片段，而不能理成條理分明的線索。尤其是在中學階段很短促的時間內，怎能學完那紛亂如麻的材料，即使能學完，仍舊是頭緒茫然。至於教學的人，只當教人以基本原則和方法，使學生有自行研究的工具和

能力，並不要自矜廣博，將微目細節，儘量臚列。

這是最沒有啟發性的方法，最足摧殘青年的創造力。

著者唯一的希望，便是望這本小冊子，能幫助青年們了解“算學”一門科學的性質，誠如克爾文勳爵所說的，“是精鍊的常識”。至於說理的淺近，取材的簡略，當然不免見笑於方家，著者願敬受之而不辭。

其結果，則可得下列之等式：

設 x 為一變數，則 y 亦隨之而變，故可將 y 視為 x 之函數，即

寫成 $y = f(x)$ 之形式，此即所謂函數之表示法也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

若 x 取定一值，則 y 亦隨之而取定一值，此即所謂函數之值也。

上 篇

算學觀念發達史

第 一 章

算學思想的起源

1. 與生均
生的思想

算學思想的起源，可以說是與生均來的。二三歲的小孩子，便會點十以內的數目，能辨別簡易的幾何圖形，如方如圓，據英國生物學家羅曼內斯 Romanes 氏 (1848—1894) 的實驗，知道一種非洲產的猩猩，也能辨識從 1 到 5 各數。又如動物走動的時候，也知道向目標一直走去最近；他豈不是也懂“兩點中間直線段最短”的道理麼？有馬拉狄 Maraldi 者，實驗得蜜蜂房上的兩種平面角總是 $109^{\circ}28'$ 和 $70^{\circ}32'$ 。累奧陸耳 Réaumur 疑心這種構造，能够使表面面積最小，可以節省材料。他便請幾何家庫尼格 Koenig 去推算，結

果竟證明這種理想，不過只有 $2'$ 的差誤。後來馬克羅林 Maclaurin 和呂利爾 L' Huillier 二人分別研究這問題，得到更驚人的結果。就是這 $2'$ 的微細差誤，是由於庫尼格計算有錯，并非蜜蜂的方法不準。

2. 史前期的 算學知識

有史以前的人類，算學知識發展到什麼程度，已屬無從詳考。

我們可從兩方面，去推得一些梗概。第一種方法，是考察史前期人類遺留下來的器具。第二種方法，是研究今日存在未開化民族的習慣。

大約在很古的一個時期裏，人類只知道大小數目的差別。經過許多年代以後，方才漸漸的知道，用手指點數。在這情形下，當然只能數到十爲止。在有些未開化的民族，對於從一到十各數的名稱，是和手指的名稱相同的。十以上的數量，他們只好說是“很多”，不知道更加分別。

到第二個時期，有人想出堆石子來記數，并