大學叢書

微積分學

孫光遠
孫叔平 著

商務印書館發行

自序

本書供大學理工科一年級學生之用,凡曾習代數與解析幾何者,閱讀是書當無若何困難.

微積分中之基本定理爲極限之存在與連續函數之特性,此種定理本書僅有敍述而略其證明,惟書中之重要定理大都發軔於此,幸讀者三致意焉.

微積分爲算學之基本課程,讀者對此每多片段之智識而缺全局之瞭解,是以本書力求前後呼應,提綱挈領,以免支離破碎,冀爲讀者一貫之助.惟自愧淺學,疵謬之處,在所不免,倘希海內高明有以教正之.

本書承中央大學算學系主任胡坤陞博士多所是正,謹此誌謝.

孫光遠

孫叔平

卄六年四月十六日

目　次

第一章　函數及極限

第二章　微分法

第三章 導數之性質及其應用

第四章 逐次微分法

第五章　平面曲線

第六章　無窮級數

第七章　函數之展開

第八章 不定積分

第九章 定積分

第十章　積分法

第十一章　偏微分法

第十二章 幾何上的應用

第十三章 重積分

微積分學

第一章

函數及極限

1. 大 **常數, 變數** 有一種數量, 在計算的時候, 其數值是永遠不變的, 這種數量叫做常數. 我們以後常用 $a, b, c, \cdots A, B, C, \cdots \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 來代表常數. 又有一種數量, 在計算的時候, 其數值在一定範圍之內可以變易的, 這種數量叫做變數. 我們以後常用 $x, y, z, \cdots, X, Y, Z, \cdots$ 來代表變數.

在算學中, 我們常用一直線上的點, 來表示種種數值. 如在一直線上, 任擇一點 O 使其代表零, 這點叫做原點. 又任擇一段之長如 OU, 叫

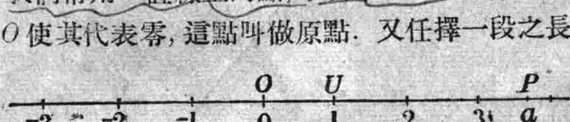


圖 1

做單位. 設 P 爲直線上的一點, OP 之長便代表一數 a. 凡點之在原點右者, 用以代表正數, 在原點左者, 用以代表負數, 並且我們認爲直線上的點, 足以表達一切實數而無遺. 申言之, 凡直線上任何一點, 都表示一個實數, 任何實數, 必有直線上的一點爲其代表.

設變數 x 在 a, b 二數之間 $(a<b)$, 可以任意變易, 但不能小於 a, 也不能大於 b, 我們就寫如

$$a \leqq x \leqq b.$$

若用直線上的點來講, 變數 x 可以代表 ab 段中一切的點, a, b 二數

2. 若 a, b 兩點不包括在內則叫做 x 之開區間 (open interval)
3. 或 $a \le x < b$, $a < x \le b$ 叫做半開區間

 閉區間

所以限制變數 x 的範圍, 這種範圍叫做變數 x 的間隔, 我們常用記號 (a, b) 或 $a \leqq x \leqq b$ 以表示之.

因數 x, y 的函數關係 圖 2 函數 R 之值

2. 函數及其圖表 設 x 與 y 表示兩個變數, 若 x 之值既定, y 之值就隨之而定, x 與 y 之間有一種相倚相應的關係, 那末 y 就叫做 x 的函數. 這時 x 叫做自變數, y 也叫做因變數. 例如 $y=x-3$, 當 $x=3$ 時, y 之值爲零. x 等於其他之數如 $1, 2, 4, 5, \cdots$ 時, y 之值爲 $-2, -1, 1, 2, \cdots$. y 與 x 之間有一種相倚相應的關係, 至爲顯然. 在自然科學中, 函數的例, 所在皆是. 如氣體所佔的容量, 當溫度不變之時, 與其所受的壓力成比例, 如以 p 表壓力, v 表容量, c 表一常數, 則有 定域

$$v=\frac{c}{p}.$$

根據這個關係, 我們可以從 p 知 v. 又如物體受地心吸力而下墮, 其所經的途徑, 自然是時間的函數, 如以 S 表其所經的途徑, t 表時間, g 表引力常數, 那末 S 隨 t 而變的情形可由下式表達之,

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$ $A=\pi R^2$. 定域

有了這個關係, 物體下墮時所處的地位, 就可以推知了. x 與 y 中間的關係常用記號表之如下,

$$y=f(x), \quad y=g(x), \quad y=F(x), \quad y=\varphi(x).$$

令 $x=a$ 則函數 $f(x)$ 之值卽以 $f(a)$ 表示之, 例如

$$f(x)=x^2-9x+10,$$ $y=\sqrt[n]{x}$.

則

$$f(a)=a^2-9a+10,$$
$$f(0)=0^2-9\cdot 0+10=10,$$
$$f(3)=3^2-9\cdot 3+10=-8.$$

law of cosine $y=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$. P.T.2.

two valued functions

函數圖形

爲明瞭函數的性質起見,我們往往用製圖之法. 先畫兩條互相垂直的直線,作爲座標軸,其一叫做 x 軸,其他叫做 y 軸. 既知 y 與 x 的函數關係 $y=f(x)$,那末當 x 既得一値,y 必有一値與之相應,我們把這種 x 及與之相應之 y 作爲座標,就得種種不同之點,諸點相連,就得一條曲線,這條曲線叫做函數 $y=f(x)$ 的圖表. 例如函數

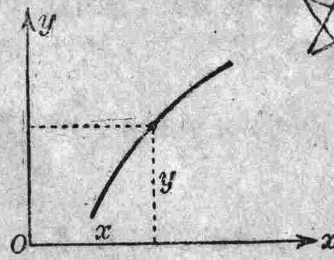


圖 3

$$y=+\sqrt{1-x^2}$$

當 $x=0$ 時,y 等於 1. x 無論爲正爲負,y 始終爲正. 因此其圖表必居於 x 軸之上,不但如此,當 $-1\leqq x\leqq 1$ 時,如將 x 換爲 $-x$,y 之値不變,因此之故,其圖表對於 y 軸成對稱. 又當 x 自 -1 漸漸變大而達於零,y 隨之變大,此時函數 y 隨 x 增大而增大. 當 x 自零漸漸變大而達於 1,y 隨之變小,此時函數 y 隨 x 變大而變小.

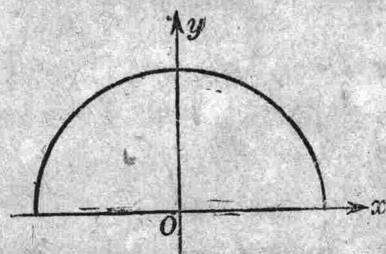


圖 4

根據這種性質,就可推知 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 的圖表了. 又如方程式

$$2xy-y+5=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數,不過並未將 y 解出罷了. 這時 y 便叫做 x 的隱函數,$y=f(x)$ 便叫做 x 的顯函數. 上面的隱函數也可寫成顯函數如下:

$$y=\frac{5}{1-2x}.$$

隱函數 y 與自變數 x 的關係,常用記號如 $f(x, y)=0$ 表示之.

單調函數　設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內之値,隨 x 增大而增大,那末在這間隔內,$f(x)$ 叫做 x 的增函數. 反之,如 y 之値隨 x 增大而

減少，那末在這間隔內，$f(x)$ 叫做 x 的減函數．令 x_1, x_2 爲這間隔內的任意二數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0,$$

$f(x)$ 便是 x 的增函數，若常有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0,$$

$f(x)$ 便是 x 的減函數．增函數與減函數統叫做單調函數．由前例言之，函數 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 在間隔 $(-1, 0)$ 內，爲 x 的增函數，在間隔 $(0,1)$ 內，爲 x 的減函數．

反函數　我們若由方程式

$$y=\frac{5}{1-2x}$$

把 x 解出，則得

$$x=\frac{y-5}{2y}.$$

前者的意思表示 y 是 x 的函數，後者所表示的，x 是 y 的函數，因此之故，我們名後者爲前者的反函數．普遍言之，若將方程式中 $y=f(x)$ 的 y 視爲自變數，x 視爲因變數，於是由 $y=f(x)$ 解出 x 而得 $x=\varphi(y)$，那末函數 $\varphi(x)$ 就叫做 $f(x)$ 的反函數．但 $\varphi(x)$ 與 $f(x)$ 的關係是相對的，所以 $f(x)$ 也可以叫做 $\varphi(x)$ 的反函數，例如 $\log_a x$ 爲 a^x 的反函數，$\arcsin x$ 爲 $\sin x$ 的反函數，$\pm\sqrt{x}$ 爲 x^2 的反函數．

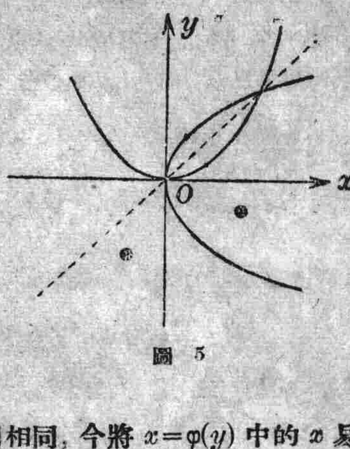


圖 5

$y=f(x)$ 與 $x=\varphi(y)$ 所代表的曲線原屬相同，今將 $x=\varphi(y)$ 中的 x 易

爲 y, 則 $y=f(x)$ 與 $y=\varphi(x)$ 所代表的曲線, 對於直線 $y=x$ 便成對稱. 圖 5 就是 $y=x^2$ 與其反函數 $y=\pm\sqrt{x}$ 所代表的曲線.

3. 初等函數

有理函數　$y=x^n$ (n 爲一正整數) 要算最簡單的函數. 又如函數

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

乃由 x 與常數 a, b, c, d 施以加減乘除的運算而得, 這種函數叫做有理整函數, 或叫做多項式, 其一般形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又如函數

$$y=\frac{1}{ax+b}+\frac{x+d}{x^2+cx}$$

乃由變數 x 與常數 a, b, c, d, 施以加減乘除的運算而得, 這種函數叫做有理分函數, 其一般形式爲

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

如 $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$ 皆等於零, 而 $b_m\neq 0$, 則函數便爲有理整函數, 所以有理整函數實在是有理分函數的特例罷了.

有理整函數與有理分函數, 統叫做有理函數.

無理函數　最簡單的無理函數爲 $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ (n 爲一正整數). 又如

$$y=x+\sqrt{x^2+1},\qquad y=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-x^2}},\qquad y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

都是 x 的無理函數. 這種函數皆能滿足一代數方程式如下

$$A_0(x)y^m+A_1(x)y^{m-1}+\cdots+A_m(x)=0,$$

其中 $A_0(x), A_1(x), \cdots A_m(x)$ 皆爲 x 的有理函數. 例如

$$y=x+\sqrt{x^2+1}$$

便能滿足代數方程式

$$y^2-2xy-1=0.$$

有理函數 $y=f(x)$ 顯然也能滿足一代數方程式. 有理函數與無理函數統叫做代數函數.

我們在 §2 已經說明方程式

$$F(x, y)=y^2-2y+x^2=0$$

也足以表示 y 爲 x 的函數, 今與 x 以一定值 $(-1\leqq x\leqq 1)$, y 便得二相應值

$$y=1\pm\sqrt{1-x^2},$$

在這種情形, y 叫做 x 的二值函數.

設 y 爲 x 的函數, 若 x 之值旣定, y 祇有一值與之相應, 那末 y 就叫做 x 的單值函數. 若 x 之值旣定, 而 y 有數個值與之相應, 那末 y 就叫做 x 的多值函數.

例如有理整函數是單值函數, $\pm\sqrt{x}$ 是二值函數, $\arcsin x$ 是多值函數. 本書以後所謂函數, 都指單值函數而言.

三角函數 在高等算學中, 角度的單位多用弧度, 本書以後計算角的大小, 都用這個單位. 設以 O 爲圓心, 以 1 爲半徑作一圓, 取圓上二點 A, B, 使 AB 弧之長等於 1. 取 $\angle AOB$ 作爲角度的單位, 這個單位便叫做一弧度. 當半徑等於 1 時, 圓周之長等於 2π, 所以全圓周 $360°$ 等於 2π 弧度, $180°$ 等於 π 弧度, $90°$ 等於 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,

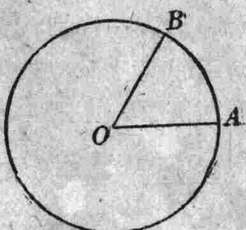


圖 6

$$1 \text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}=57°\,17'\,45''$$

$$1°=\frac{\pi}{180}0.017453 \text{ 弧度}.$$

三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ 也叫做週期函數，因爲把 x 換爲 $x+2\pi$ 或 $x-2\pi$，函數之值依然不變，其中 $\tan x$,

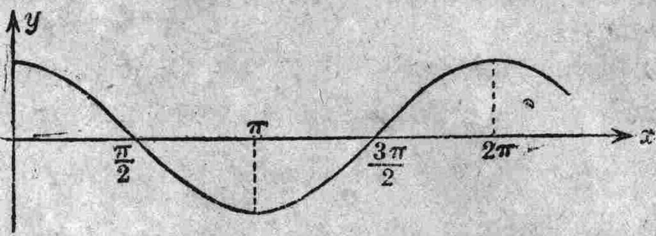


圖 7

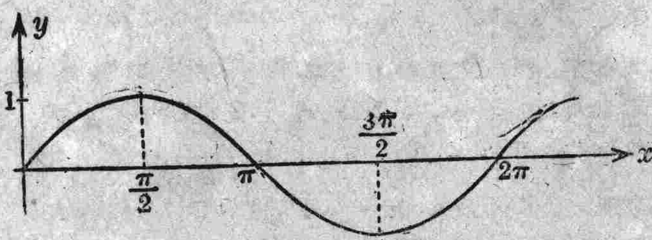
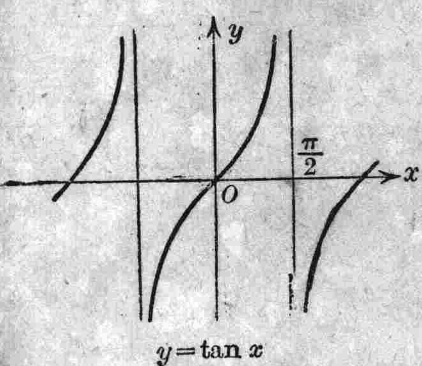


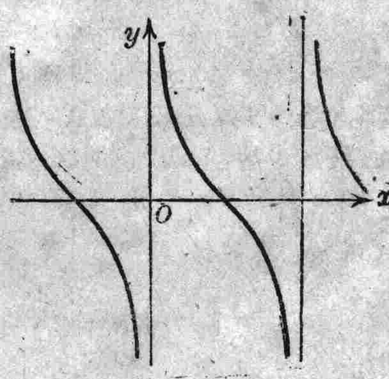
圖 8

$\cot x$，二函數，如將 x 換爲 $x\pm\pi$，函數之值仍不變，



$y=\tan x$

圖 9



$y=\cot x$

圖 10

$$\tan(x\pm\pi)=\tan x,\qquad \cot(x\pm\pi)=\cot x$$

所以 2π 是 $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ 的週期, π 是 $\tan x$, $\cot x$ 的週期.

反三角函數　三角函數旣爲週期函數, 所以自變數可有無窮個數值使其函數得同一數值. 由此言之, 三角函數的反函數乃是一種多值函數.

函數 $y=\operatorname{arc}\sin x$ 所以表示 $\sin x$ 的反函數. 每與 x 以一定值 $(-1\leqq x\leqq 1)$, y 有無窮個數值與之相應. $y=\operatorname{arc}\sin x$ 就是 $x=\sin y$, 今令 y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增至 $\frac{\pi}{2}$, x 祇有一值與 y 相應, 且其值由 -1 增至 $+1$, 所以 x 在 -1 與 $+1$ 之間, 每取一值, y 在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間, 祇有一值與之相應. 此時 y 便是 x 的單值函數, 也叫做函數 $y=\operatorname{arc}\sin x$ 的主值 (或稱主支).

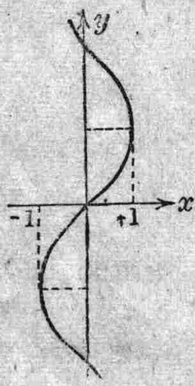


圖 11

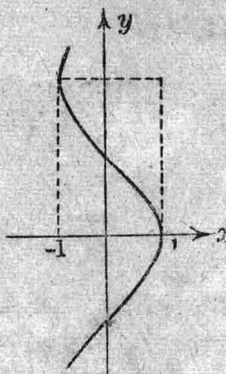


圖 12

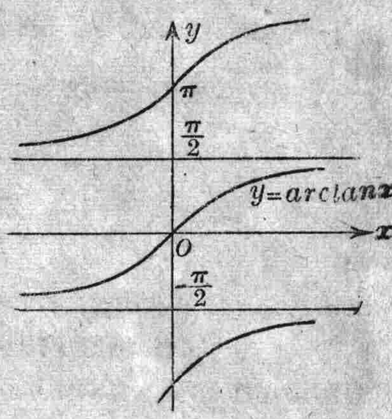


圖 13

函數 $y=\operatorname{arc}\cos x$ 所以表示 $\cos x$ 於反函數, x 與 y 的關係也可寫如