

高等学校教材

第3版

工程力学

张秉荣 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



高等学校教材

工 程 力 学

第 3 版

主 编	张秉荣		
参 编	傅鹤龄	丁纪平	张 焱
	张 丽	许曙青	张益飞
	张排房	俞 红	黄凤珠
	刘 琳	鲁照文	
主 审	陈志椿		



机械工业出版社

本书内容分为理论力学与材料力学两篇。理论力学篇中介绍了：力的基本运算与受力图的绘制、平面力系、空间力系、点和刚体的简单运动、点和刚体的平面运动、点与刚体绕定轴转动的动力学基本方程、动静法及动力学的普遍定理。材料力学篇中介绍了：拉（压）、剪、挤的强度计算、扭转与弯曲的强度计算、组合变形的强度计算与几个专题的介绍。

全书共由十三章组成，其中有 * 号者可作为选讲或自学内容。

本书特色为：精选内容、强调应用、理论简明、方便教学。尤其适应于培养应用型人才的需要。本书适应：高等本科教育中培养机电类及近机电类应用型人才教学计划中，中少学时（60~120 学时）的课程设置以及成教、高职高专、函授本科中相关专业的学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学/张秉荣主编. —3 版. —北京：机械工业出版社，
2008. 11（2009. 6 重印）

高等学校教材

ISBN 978-7-111-05175-6

I. 工… II. 张… III. 工程力学-高等学校-教材 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 154658 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：张金奎 赵爱宁 责任编辑：张金奎 赵爱宁

版式设计：霍永明 责任校对：魏俊云

封面设计：鞠 杨 责任印制：乔 宇

北京京丰印刷厂印刷

2009 年 6 月第 3 版·第 2 次印刷

184mm×260mm·18.75 印张·462 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-05175-6

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：（010）88379722

封面无防伪标均为盗版

第3版前言

拙编《工程力学》一书，初成于20世纪80年代后期，分别以理论力学、材料力学等名义出版。1990年整合为工程力学（91年版）。因其内容简明，强调工程应用，顺应高等学校的教学规律，而被许多工程类高校广泛采用。

为适应教学改革与发展的需要，《工程力学》一书于1992年重编，1993年再版，迄今为止，不计初版、单列，重编与再版之《工程力学》已重印20余次之多。

近几年，我国的高等教育事业有了长足的进步，专业与课程教学改革也在不断地深入发展，故在新的基础上对这本具有一定历史的教材予以再次重新编写。

新编《工程力学》主要着眼于以下几点：

1. 精选内容。选材以“必需”与“够用”为度，随专业教学改革的深入，新课程的设置与实践性环节的增加，导致了各校对工程力学课程所安排的教学时数与前相比有较大的削减。作者通过对工厂需求人才之力学基础及专业课程所用的力学知识作了广泛的调查研究，探索了一个在符合教学基本要求基础上最简明之工程力学知识结构，以适应整个专业改革的客观形势。

2. 强调应用。培养应用型人才必须通过应用型教材来贯彻。本书以学生应具有各项力学技能为知识集结点来建立章节，例题、习题也尽可能地贴近工程实践，从体系到内容，本书皆具有应用型教材的特色。

3. 理论简明。一般工科人才都是力学理论的应用者，故本书采用了“推理”的逻辑思维方法来阐述一些繁冗公式的推导，简明且又严谨。本书内容中也引入了最新的理论知识（“平面假设”的证明；双切强度理论与平方切应力理论等）。

4. 方便教学。为提高教学效率，方便自学，本书还特邀黄凤珠老师为本书撰写《工程力学自学指导与解题指南》，特请俞红老师为本书制作教辅光盘。两者与本书同时出版，并拟在适当的时机建立自学指导网站，立体化地为各校工程力学课程的教学服务。本教材力图在少（学时）、新（内容）、高（水平）、好（效果）等诸方面有所建树。

本书参编人员由傅鹤龄、丁纪平、张焱、张丽、许曙青、张益飞、张排房、俞红、黄凤珠、刘琳、鲁照文等同志组成。

全书由张秉荣教授统稿并定稿，由陈志椿高工担任主审并校订。

限于水平，错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

本书得到了东南大学、南京工程学院、南京工程分院有关人士的帮助，谨在此致谢！

编者

2008年6月

目 录

第3版前言

绪论	1
----------	---

第一篇 理论力学

第一章 力的基本运算与物体受	
力图的绘制	3
第一节 力的概念	3
第二节 力的基本运算	6
第三节 约束与约束力	13
第四节 物体的受力分析 受力图	16
小结	18
思考题	19
习题	20
第二章 平面问题的受力分析	24
第一节 平面任意力系的简化及简化	
结果的讨论	24
第二节 平面任意力系的平衡方程及	
其应用	26
第三节 静定与超静定问题及物体系	
统的平衡	31
* 第四节 平面静定桁架内力的计算	34
第五节 考虑摩擦时的平衡问题	36
小结	47
思考题	48
习题	51
第三章 空间问题的受力分析	59
第一节 力在空间直角坐标轴上的投影	59
第二节 空间汇交力系的合成与平衡	61
第三节 力对轴之矩	62
第四节 空间任意力系的平衡方程	63
第五节 重心的概念及重心坐标	66
第六节 重心及形心位置的求法	68
小结	70
思考题	71
习题	71
第四章 点的运动与刚体的基	
本运动	75
第一节 点的运动	75
第二节 刚体的基本运动	84
小结	90
思考题	90
习题	91
第五章 点的合成运动与刚体的	
平面运动	94
第一节 点的合成运动概念	94
第二节 点的速度合成定理	95
第三节 点的加速度合成定理	97
第四节 刚体平面运动的运动方程	101
第五节 求平面图形上各点的速度	103
第六节 用基点法求平面图形上各点的	
加速度	108
小结	109
思考题	110
习题	111
第六章 动力学的基本方程	
与动静法	114
第一节 质点动力学基本方程	
(附质心运动定理)	114
第二节 质点动力学问题的动静法	120
第三节 刚体绕定轴转动动力学方程	122
第四节 质点系的动静法	125
小结	130
思考题	131
习题	132
第七章 动力学普遍定理	137
第一节 动量定理	137
第二节 动量矩定理	140
第三节 动能定理 (能量法)	143
第四节 功率与功率方程	153
小结	155

思考题	156
-----------	-----

习题	156
----------	-----

第二篇 材料力学

第八章 拉伸(压缩)、剪切与挤压的强度计算	165
第一节 轴向拉伸与压缩的概念、截面法、轴力与轴力图	165
第二节 拉、压杆横截面上的应力、应变及胡克定律	167
第三节 材料在拉压时的力学性能	172
第四节 拉压杆的强度计算与拉压超静定问题	177
第五节 剪切与挤压	181
小结	185
思考题	186
习题	187
第九章 圆轴的扭转	193
第一节 扭转的概念、扭矩与扭矩图	193
第二节 圆轴扭转时的应力与强度计算	195
第三节 圆轴扭转时的变形与刚度计算	198
小结	201
思考题	202
习题	203
第十章 直梁的弯曲	206
第一节 弯曲内力(剪力图与弯矩图)	206
第二节 梁弯曲时的强度计算	214
第三节 梁的刚度计算	220
第四节 提高梁的强度和刚度的措施	227
小结	228
思考题	229
习题	230
第十一章 应力状态和强度理论	235
第一节 应力状态的概念	235

第二节 平面应力状态分析(应力圆)	236
第三节 三向应力圆及最大切应力	240
第四节 广义胡克定律	241
第五节 强度理论简介	242
*第六节 其他强度理论简介	246
*第七节 电测应力分析介绍	247
小结	251
思考题	252
习题	252
第十二章 组合变形的强度计算	255
第一节 拉伸(压缩)与弯曲组合变形的强度计算	255
第二节 弯曲与扭转组合变形的强度计算	258
小结	261
思考题	262
习题	262
*第十三章 材料力学中几个专题的简介	266
第一节 动载荷	266
第二节 交变应力	270
第三节 压杆稳定	275
第四节 断裂力学与复合材料力学简介	281
小结	282
思考题	284
习题	284
附录	288
附录 A 工程力学综合练习	288
附录 B 型钢表	289
参考文献	293

绪 论

一、工程力学研究的内容

力学既是一门基础科学，又是一门应用科学。力学自身发展过程中，所阐明的规律带有普遍性，它所研究的许多成果是众多工程技术的理论基础，其本身又在广泛的应用过程中得到发展。侧重于认识自然现象与规律的力学研究领域称为基础力学；侧重将力学成果应用于改造自然的力学研究领域称为应用力学或工程力学。物体在力作用下的机械运动和变形机理即是工程力学的研究范畴。

由上可见，工程力学乃是认识与分析工程技术问题的一项必备的基础知识与研究工具。

二、工程力学的学习方法

韩愈云：学问之道无他，唯“放心”而已。“放心”一词意即全身心地投入。此乃做学问的总纲。下面择其要者，分述如下：

1. 联系实际

工程力学来源于人类长期的生活实践、生产实践与科学实验，并且广泛应用于各类工程实践中。因此，在实践中学习工程力学是一个重要的学习方法。

广泛联系与分析生活及生产中的各种力学现象，是培养未来的工程技术人员对工程力学发生兴趣的一条重要途径。而对工程力学的兴趣乃是身心投入的一个重要起点。联系实际还是从获得理论知识到养成分析与解决问题能力之间的一座桥梁。初学工程力学的人的通病就是感到“理论好懂，习题难解”，这就是缺少各种实践的过程（包括大量的课内外练习）、没有完成从读懂理论到提高解题能力之间转化过程的一种反映。工程技术人员一般是力学的应用者，所以要着重于“用”字，应按“学而不思则罔，思而不学则殆”的准则去善于学习。

实验是联系实际的另一种重要手段，它不仅验证现有理论，可以归纳与发现一些力学的客观规律，甚至对一些高难度的、机理不完全透彻明瞭的工程技术问题，可以通过实验对比建立一些模拟数据来加以解决。

2. 善于总结

将书读薄是做学问的一种基本方法，读一本书后要将其总结成一两页的摘要。唯其如此，才能抓住一个章节、一本书、一门学科的精髓，才能融会贯通，才能使其真正成为你自己的知识。

理论要总结，解题的方法与技巧也要总结。本书例题中常有一题多解和多题一解的现象，其目的就是在传授方法，培养举一反三的能力。

3. 勤于交流

相互交流是获取知识的一种重要手段，课堂教学、习题讨论、课件利用直至网上交流，经常表述自己的观点，不断纠正自己的错误观念，从而使自己的综合素质得到提高。

第一篇 理论力学

理论力学是研究物体机械运动一般规律的一门学科。

运动是物质存在的形式，是物质的固有属性。它包含了宇宙中发生的一切变化与过程。因此，物质的运动形式是多种多样的，从简单的位置变化到各种物理现象、化学现象，直至人的思维与人们的社会活动。

所谓机械运动，是指物体在空间的位置随时间的变化，如日月运行、车船行驶、机器运转、河水流动以及物体的平衡等。所谓物体的平衡是机械运动的特殊情况，一般是指物体相对于地面静止或作匀速直线运动。

机械运动不仅广泛地出现在我们的周围，存在于人类的一切劳动生产过程之中，也普遍存在于研究其他运动形式的各门学科之中。因此，研究机械运动，不仅可以解释周围许多现象，为研究其他学科提供条件，更重要的还在于它是现代工程技术的重要理论基础与解决工程技术问题的重要手段之一。

理论力学的内容通常包括以下三个部分：

- 1) 静力学：研究物体在受力作用下的平衡规律，从而建立物体受力分析的基础。
- 2) 运动学：从几何学的角度来研究物体在空间的位置随时间的变化规律，而不涉及产生运动的原因。
- 3) 动力学：研究作用于物体上的力与物体运动之间的关系。

理论力学的研究对象为刚体与质点。撇开物体受力时的变形而获得刚体的概念，不计物体的尺寸而得到质点的概念，这些理想化的力学模型都是将事物抽象化的结果，抽象可以使问题简化。材料力学是研究物体受力后的内部应力与变形，刚体模型不再适用，因此在材料力学中将建立另一种理想的弹性体模型。

理论力学是一门理论性较强的，在工程技术领域中有着广泛应用的技术基础课，它是近代工程技术的重要理论基础之一。同时，它又为工科院校中一系列后继课程，如材料力学、机械原理、机械设计等，提供必要的基础知识。

理论力学的分析和研究方法在科学研究中有一定的典型性。通过对本课程的学习，有助于培养辩证唯物主义的世界观，初步学会处理工程实际问题的方法，为今后从事生产实践、科学研究打下良好的基础。

第一章 力的基本运算与物体受力图的绘制

本章介绍力的基本运算法则与方法，物体受力图的绘制。由若干刚体彼此固定地联结在一起称物体（或结构），如彼此在一定条件下存在某种确定相对运动的联结称机构。而物体则是刚体结构与机构的统称。

物体的受力分析分为定性与定量两部分。物体的受力图绘制即为其中的定性部分，它是正确进行力学分析的前提。

第一节 力的概念

一、力的概念

力的概念产生于人类从事的生产劳动之中。当人们用手握、拉、掷及举起物体时，由于肌肉紧张而感到力的作用，这种作用广泛存在于人与物及物与物之间。例如，奔腾的水流能推动水轮机旋转，锤子的敲打会使烧红的铁块变形，等等。可见，力作用于物体将产生两种效果：一种是使物体机械运动状态发生变化，称为力的外效应；另一种是使物体产生变形，称为力的内效应。由于静力学以刚体为研究对象，故本篇只讨论力的外效应。

综上所述，在静力学的范畴内，力可定义为：力是物体间的相互机械作用，这种作用将引起物体机械运动状态发生变化。

1. 力的三要素

实践证明，力对物体的作用效应，是由力的大小、方向和作用点的位置所决定的，这三个因素称为力的三要素（图 1-1a）。例如，用扳手拧螺母时，作用在扳手上的力，因大小不同，或方向不同，或作用点不同，它们产生的效果就不一样。

2. 力的单位

本书采用我国法定计量单位，力的单位用 N（牛 [顿]）或 kN（千牛 [顿]）。

3. 力的矢量表示

数学上，将有大小、有方向之物理量，其运算统归为矢量运算（论证从略），故对力在图示及运算中，就视为矢量。力在图示时，常用一个带箭头的线段表示（图 1-1b），线段长度 AB 按一定比例代表力的大小，其起点或终点表示力的作用位置。此线段的延伸称为力的作用线。用黑体字（如 $\mathbf{F}$ ）代表力矢，并以明体字母 F 代表力的大小。

二、力的性质

作用于同一物体上的一群力，总称为力系。按照力系中各力作用线在空间的分布之不同形式，可分为：

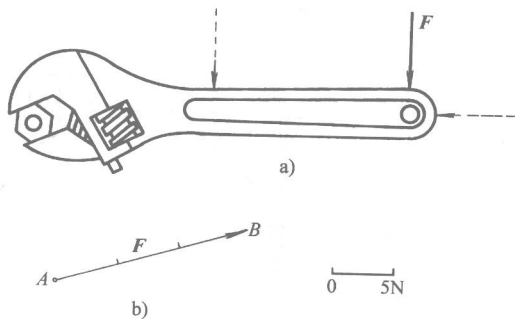


图 1-1 力的图示

- (1) 汇交力系 各力作用线汇交于一点。
- (2) 平行力系 各力作用线相互平行。
- (3) 一般力系 各力作用线既不相交于一点，又不互相平行。

按照各力作用线是否位于同一平面内，上述三种力系各自又可分为平面力系和空间力系。如：平面汇交力系、空间一般力系等。

当物体在某力系作用下保持平衡状态，此力系就称为**平衡力系**。平衡力系应满足的条件称为平衡条件。

在已知力系上，可以加上或减去任一平衡力系，不会改变原力系对物体的作用。（加减平衡力系公理）

作用于同一刚体上的两个力，使刚体处于平衡状态的必要和充分条件是：此二力必须等值、反向、共线。（两力平衡公理）

1. 二力构件

二力平衡公理是刚体受最简单的力系作用时的平衡条件，如一物体仅受两力作用而平衡，则此两力的作用线必沿两力作用点的连线，如图 1-2b 中的杆 AB、图 1-2c 中的杆 AC 等，这类构件常被称为**二力构件**。

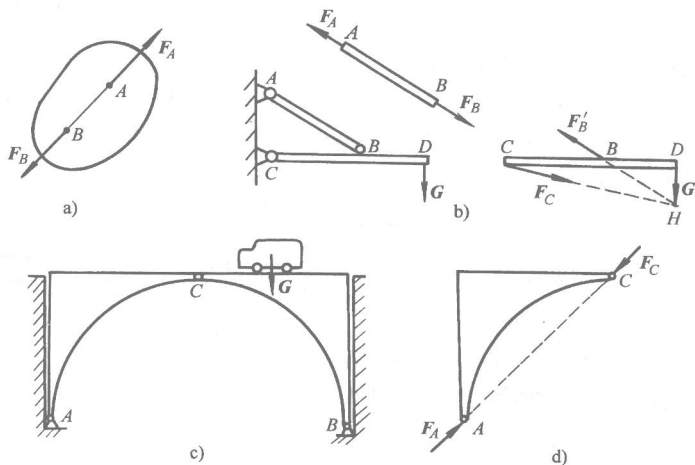


图 1-2 二力杆与三力杆

由以上论点，可作出如下之推论：

作用于刚体上的力，可沿其作用线滑移到该刚体的任何位置而不会改变此力对刚体的作用效应。（力的可传性原理）

此推理可证明如下：

- 1) 设力 F 作用于刚体上 A 点（图 1-3a）。
- 2) 在力 F 的作用线上任选一点 B ，并在 B 点加一组沿 AB 线的平衡力 F_1 和 F_2 ，且使 $F_2 = F = -F_1$ （图 1-3b）。
- 3) 除去 F 与 F_1 所组成的一对平衡力，刚体上只剩 F_2 ，显见 $F_2 = F$ （图 1-3c）。

此原理说明，力是滑移矢量，它可以沿其作用线滑移，但不能任意移至作用线以外的位置。

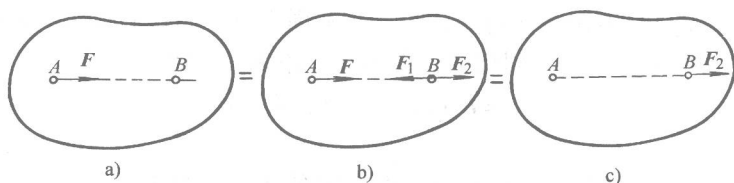


图 1-3 力的可传性

必须指出,力的可传性原理不适应于研究物体的内效应。

2. 二力的合成

若一力与一力系对物体的作用等效,则称此力为该力系之合力,而该力系中的每个力是合力的某个分力。

如一物体有两个共线或不共线的力作用,则其合力皆可依矢量加减法求之。

如该二力不共线,则可依力的可传性原理将其移至两作用线的汇交点,则其合力也作用于该点,其大小和方向可用此二力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示,如图 1-4 所示。(力的平行四边形法则)

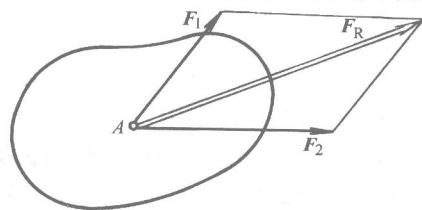


图 1-4 力的平行四边形法则

但因力为滑移矢,故限制了合力作用线必须通过前两力之汇交点,其矢量式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

反之,一个力也可以分解为两个分力,分解也按力的平行四边形法则来进行。显然,由已知力为对角线可作无穷多个平行四边形(图 1-5),故必须附加一定条件,才可能得到确切的结果。附加条件可能为:①规定两个分力的方向;②规定其中一个分力的大小和方向等等。

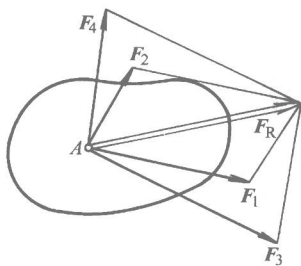


图 1-5 力的分解

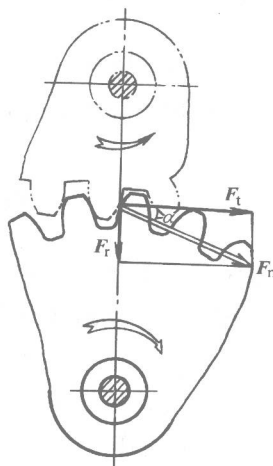


图 1-6 齿轮的受力分析

例如,在进行直齿圆柱齿轮的受力分析时,常将齿面的法向正压力 $\mathbf{F}_n$ 分解为推动齿轮

旋转的即沿齿轮分度圆圆周切线方向的分力——圆周力 F_t 与指向轴心的压力——径向力 F_r (图 1-6)。若已知 F_n 与分度圆圆周切向所夹的压力角为 α , 则

$$F_t = F_n \cos \alpha \quad F_r = F_n \sin \alpha$$

3. 三力构件

若刚体在三个共面而又互不平行的力作用下处于平衡状态, 则此三力必汇交于一点 (三力平衡汇交定理)。读者可据前述内容自行证明。

刚体只受同一平面三个力作用而平衡, 称为三力构件。若三个力中已知两个力的交点及第三个力的作用点, 即可判断出第三个力作用线的方位。例如, 图 1-2b 所示的起重机架, 其中撑杆 AB 为二力构件, 若不计横梁 CBD 的自重, 则横梁只可能在 C 、 B 、 D 三点受力而成为三力构件。又见图示, 横梁上 B 、 D 两点作用力的方向为已知, D 点受重力 G 的作用, 而 B 点则受杆 AB 的拉力 F'_B , G 与 F'_B 二力交于 H 点, 则根据三力平衡定理, 作用于 C 点的约束力 F_C 也必通过 H 点, 在 CH 的连线上。图 1-2c 所示之桥体 BC 亦是如此。

4. 作用力与反作用力

若将两物体间相互作用之一称为作用力, 则另一个就称为反作用力。两物体间的作用与反作用力必定等值、反向、共线, 分别同时作用于两个相互作用的物体上。(作用与反作用定律)

力是物体间的相互作用, 作用与反作用的称呼是相对的, 力总是以作用与反作用的形式存在, 且以作用与反作用的方式在物体或物系内部进行传递。

这里应该注意两力平衡和作用与反作用公理之间的区别, 前者叙述了作用在同一物体上两个力的平衡条件, 后者却是描述两物体间相互作用的关系。

如我们考察的对象是由若干物体组成的物系, 物系外的物体与物系间的作用力称为外力, 而物系内部物体间的相互作用力称为内力。内力总是成对出现且呈等值、反向、共线的特点。所以就物系而言, 内力的合力总是为零。因此, 内力不会改变物系的运动状态。但内力与外力的划分又与所取物系的范围有关, 随着所取对象范围的不同, 内力与外力是可以相互转化的。

如考察对象是单一物体, 则物体在外力影响下, 其内部各部分之间也有内力的传递, 而这将在材料力学中作进一步的研究。

第二节 力的基本运算

一、同平面几个汇交力的合成

依矢量运算法则, 有两种方法:

1. 几何法

(1) 两汇交力合成的三角形法则 设力 F_1 与 F_2 作用于某刚体上的 A 点, 则由前述可知, 以 F_1 、 F_2 为邻边作平行四边形, 其对角线即为它们的合力 F_R , 并记作 $F_R = F_1 + F_2$, 如图 1-7a 所示。

为简便起见, 作图时可省略 AC 与 DC , 直接将 F_2 连在 F_1 的末端, 通过 $\triangle ABD$ 即可求得合力 F_R , 如图 1-7b 所示。此法就称为求两汇交合力的三角形法则。按一定比例作图, 可直接量得合力 F_R 的近似值。

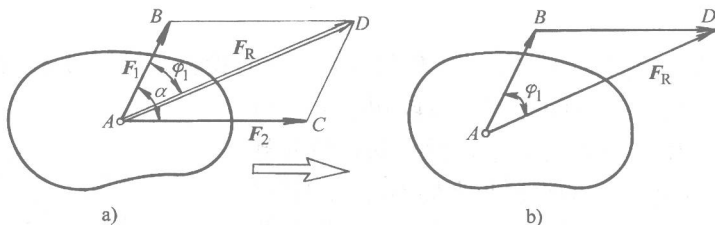


图 1-7 力三角形法则

(2) 多个汇交力合成的力多边形法则 设在刚体某平面上有一汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 作用, 力系作用线汇交于 O 点, 其合力 F_R 即可连续使用上述力三角形法则来求得 (图 1-8), 其矢量式为

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F \quad (1-1)$$

由图 1-8 可见, 为求合力 F_R , 只需将各力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 首尾相接, 形成一条折线, 最后连接封闭边, 从首力 F_1 的始端 O 点指向末力 F_n 的终端所形成的矢量, 即为合力 F_R 的大小与方向。此法称为力多边形法则。

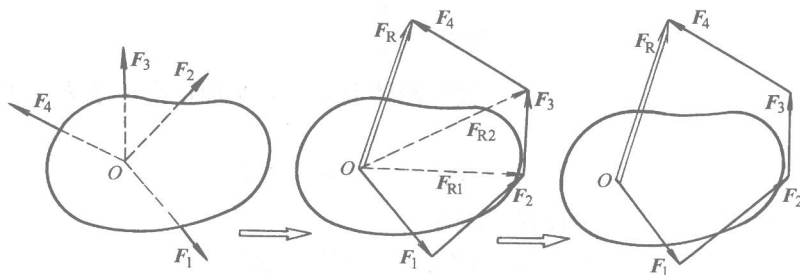


图 1-8 力多边形法则

综上所述, 平面汇交力系合成的一般结果为一合力 F_R , 合力 F_R 为力系中各力的矢量和, 其作用点仍为各力的汇交点, 而且合力 F_R 的大小和方向与各力合成的顺序无关。

例 1-1 一固定于房顶的吊钩上有三个力 F_1, F_2 和 F_3 , 其数值与方向如图 1-9 所示。试用几何法求此三力的合力。

解 1) 选取以某一长度代表 2000N 力的大小。

2) 按相同比例首尾相接地画出 F_1, F_2 和 F_3 , 连其封闭边即可得到合力 F_R (图 1-9b)。

3) 量出代表合力 F_R 的长度 AD , 通过比例换算, 得 $F_R = 2000\text{N}$ 。

4) 用万能角度尺量得 $\alpha = 60^\circ$, 合力 F_R 的方向可定。

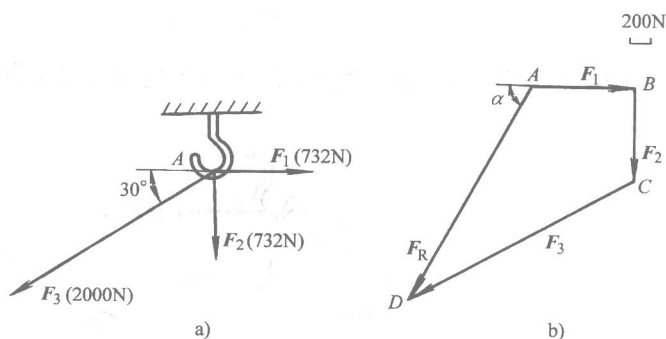


图 1-9 吊钩合力

若某一平面汇交力系是平衡力系, 其合力为零, 则此力系组成之力多边形自行封闭。

2. 解析法

(1) 力在直角坐标轴上的投影 力 F 在坐标轴上的投影定义：过 F 两端向坐标轴引垂线（图 1-10）得垂足 a 、 b 和 a' 、 b' 。线段 ab 、 $a'b'$ 分别为 F 在 x 轴和 y 轴上投影的大小，投影的正负号规定：从 a 到 b （或 a' 到 b' ）的指向与坐标轴的正向相同为正，相反为负。 F 在 x 轴和 y 轴上的投影分别记作 F_x 、 F_y 。

若已知 F 的大小及其与 x 轴所夹的锐角 α ，则有

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= -F \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

如将 F 向坐标轴方向分解，所得分力 F_x 、 F_y 的值与 F 在同轴上的投影 F_x 、 F_y 相等；但力的分力是矢量，力的投影是代数量。

若已知 F_x 、 F_y 的值，可反求 F 的大小及方向，即

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

(2) 平面汇交力系合成的解析法 设在刚体上 A 点有平面汇交力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的作用，据式 (1-1) 有

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}$$

将上式两边分别向 x 及 y 轴投影，即有

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式 (1-4) 即为合力投影定理：力系的合力在某轴上的投影，等于力系中各力在同一轴上投影的代数和。

若进一步按式 (1-3) 运算，即可求得合力 F_R 的大小及方向，即

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

例 1-2 试用解析法求例 1-1 中吊钩所受合力的大小和方向。（图 1-11）

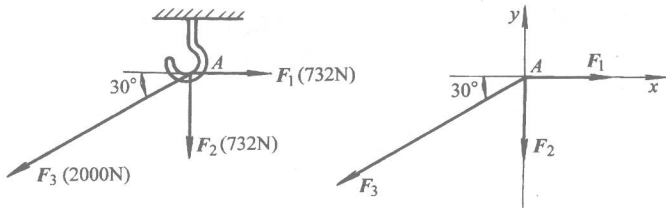


图 1-11 吊钩合力

解 建立直角坐标系，并应用式 (1-4)，求出

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -1000\text{N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -1732\text{N}$$

再按式 (1-5) 求得

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 2000\text{N}$$

$$\tan\alpha = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| = 1.732$$

$$\alpha = 60^\circ$$

二、力偶的概念及其运算法则

1. 力偶的定义

在日常生活及生产实践中, 常见到物体受一对大小相等、方向相反但不在同一作用线上的平行力作用, 如图 1-12 所示的开门锁, 转动转向盘及拧水龙头等实例。

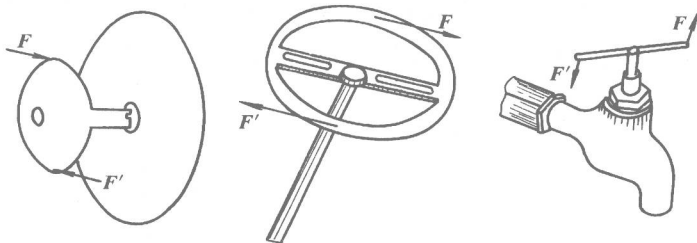


图 1-12 力偶实例

一对等值、反向、不共线的平行力组成的力系称为**力偶**, 此二力之间的距离称为**力偶臂**。由以上实例可知, 力偶对物体作用的外效应是使物体单纯地产生转动运动的变化。

2. 力偶的三要素

由实践可知, 在力偶的作用面内, 力偶对物体的转动效应, 取决于组成力偶两反向平行力的大小、力偶臂 d 的大小以及力偶的转向。在力学上, 以 F 与 d 的乘积冠以适当的正负号作为量度力偶在其作用面内对物体转动效应的物理量, 称为**力偶矩**, 并记作 $M(F, F')$ 或 M , 即

$$M(F, F') = M = \pm Fd \quad (1-6)$$

一般规定, 逆时针转动的力偶取正值, 顺时针取负值。

力偶矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{N} \cdot \text{cm}$ 或 $\text{N} \cdot \text{mm}$ 。

力偶对物体的转动效应取决于下列三要素:

- 1) 力偶矩的大小。
- 2) 力偶的转向。
- 3) 力偶作用面的方位——它表征作用面在空间的位置及旋转轴的方向; 作用面方位由垂直于作用面的垂线指向来表征。凡空间相互平行的平面, 它们的方位均相同。

3. 力偶的等效条件

凡三要素相同的力偶则彼此等效, 即它们可以置换, 这一点不仅由力偶概念可以说明, 还可通过力偶的性质作进一步证明。

4. 力偶的性质

由力偶的等效条件, 力偶存在以下的性质:

性质 1 力偶对物体的作用与认定物体转动中心的位置无关。

性质 2 力偶在任意坐标轴上的投影之和为零 (图 1-13), 故力偶无合力, 一个力偶不能与一个力等效, 也不能用一个力来平衡。

由于性质 1、2 的存在, 对力偶可作如下处理:

1) 力偶在它的作用面内, 可任意转移位置。其作用效果和原力偶相同, 即力偶对于刚体上任意点的力偶矩值不因易位而改变。

2) 力偶在不改变力偶矩大小和转向的条件下, 可同时改变力偶中两反向平行力的大小、方向以及力偶臂的大小, 而力偶的作用效应不变。

图 1-14a、b、c 中力偶的作用效应都相同。力偶的力偶臂、力及其方向既然可改变, 就可简明地以一个带箭头的弧线并标出值来表示力偶, 如图 1-14d 所示。

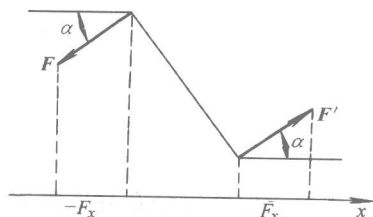


图 1-13 力偶的投影

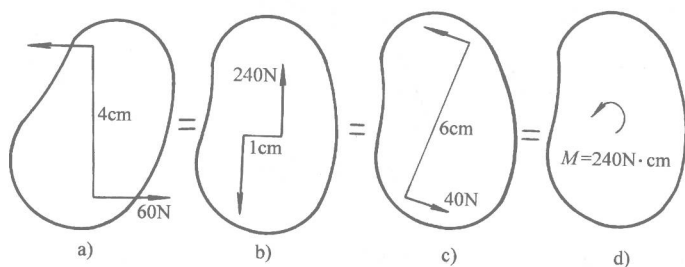


图 1-14 等效力偶

5. 平面力偶系的合成

设在刚体某平面上有两个力偶 M_1 和 M_2 的作用, 如图 1-15a 所示, 现求其合成的结果。

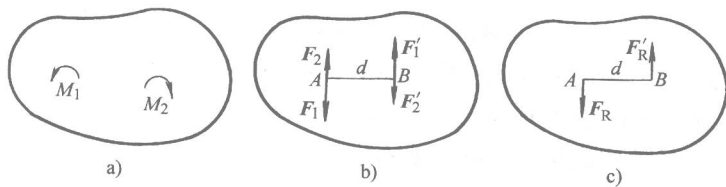


图 1-15 力偶合成

在平面上任取一线段 $AB = d$ 当作公共力偶臂, 并把每一个力偶化为一组作用在两点的反向平行力, 如图 1-15b 所示。根据力系等效条件, 有

$$F_1 = M_1/d \quad F_2 = -M_2/d$$

于是在 A、B 两点各得一组共线力系, 其合力各为 F_R 与 F'_R , 如图 1-15c 所示, 且有

$$F_R = F'_R = F_1 - F_2$$

$$M = F_R d = (F_1 - F_2) d = M_1 + M_2$$

若在刚体上有若干力偶作用, 采用上述方法叠加, 可得合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M \quad (1-7)$$

三、力的平移定理

图 1-16 描述了力向作用线外一点的平移过程。欲将作用于刚体上 A 点的力 F 平移到平面上任一点 O (图 1-16a), 则可在 O 点施加一对与 F 等值的平衡力 F' 、 F'' (图 1-16b), F' 与 F 平行、等值且同向, F' 称为平移力, 余下的 F 与 F'' 为一对等值反向不共线的平行力, 组成一个力偶, 称为附加力偶, 其力偶矩为

$$M = \pm Fd$$

于是作用在 A 点上的力 F , 就与作用于 O 点的平移力 F' 和附加力偶 M 的联合作用等效, 如图 1-16c 所示。

由此可见: 作用于刚体上的力, 均可平移到同一刚体内任一点, 但同时必须附加一个力偶, 其力偶矩等于原力对该点之矩, 此即力的平移定理。

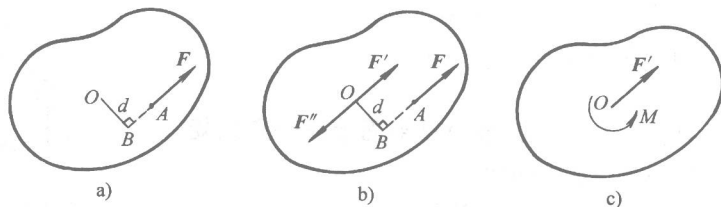


图 1-16 力的平移

力的平移定理表明了力对绕力作用线外的中心转动的物体有两种作用, 一是平移力的作用, 二是附加力偶对物体产生的旋转作用。如图 1-17 所示 (如用单手铰螺纹, 这是违反操作规程的), 为观察力 F 的作用效应, 将力 F 平移至丝锥中心, 则虽有附加力偶 M 的作用而使铰手转动, 但同时有平移力 F 的作用而可能导致丝锥折断。再以削乒乓球为例, 分析力 F 对球的作用效应, 将 F 平移至球心, 得平移力 F' 与附加力偶 M , 平移力 F' 决定球心的轨迹, 而附加力偶则使球产生旋转。

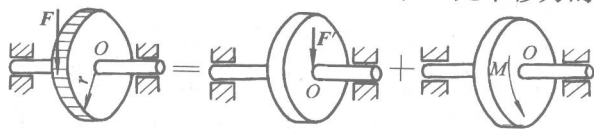


图 1-17 圆周力对轴的两种作用

应指出, 力的平移定理的逆定理同样成立, 即在刚体上同平面的力 F 和力偶 M 可合成为一个合力 F_R 。唯合力 F_R 与力 F 的作用位置不同而已。

四、力对点之矩

1. 力矩的定义

按力的平移定理, 力对其作用线外任一转动中心, 均有平移力与附加力偶的两种作用, 为简化叙述与计算, 若单计力对物体绕某中心转动作用就以力矩代之, 故力矩就是力对矩心的附加力偶矩。今后当需要单独考虑力对物体绕某转动中心的转动效应时就简捷地应用力对某点之矩来替代。并被记作

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-8)$$