21世纪 高等职业教育通用教材

应用高等数学基础

——线性代数与概率统计

朱长坤 主编
翟向阳 主审

上海交通大学出版社

21世纪高等职业教育通用教材

应用高等数学基础

——线性代数与概率统计

主编　朱长坤
主审　翟向阳

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍线性代数与概率统计的基础知识与应用。内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、参数估计与假设检验以及 Matlab 在线性代数与概率统计中的应用等。为便于学习，书中每章配有内容提要、习题和自测题。本书适合于高职有关专业与工科类通用教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学基础：线性代数与概率统计/朱长坤主编. —上海：上海交通大学出版社，2005
21世纪高等职业教育通用教材
ISBN 7-313-04096-2

Ⅰ. 应… Ⅱ. 朱… Ⅲ. ①线性代数—高等学校：技术学校—教材②概率论—高等学校：技术学校—教材③数理统计—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ. O151.2②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第086461号

应用高等数学基础
——线性代数与概率统计
朱长坤 主编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路877号 邮政编码：200030）
电话：64071208 出版人：张天蔚
上海美术印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：880mm × 1230mm 1/32 印张：7 字数：193千字
2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷
印数：1—3050

ISBN7-313-04096-2/O·178 定价：12.00元

序

发展高等职业教育，是实施科教兴国战略、贯彻《高等教育法》与《职业教育法》、实现《中国教育改革与发展纲要》及其《实施意见》所确定的目标和任务的重要环节；也是建立健全职业教育体系、调整高等教育结构的重要举措。

近年来，年轻的高等职业教育以自己鲜明的特色，独树一帜，打破了高等教育界传统大学一统天下的局面，在适应现代社会人才的多样化需求、实施高等教育大众化等方面，做出了重大贡献。从而在世界范围内日益受到重视，得到迅速发展。

我国改革开放不久，从1980年开始，在一些经济发展较快的中心城市就先后开办了一批职业大学。1985年，中共中央、国务院在关于教育体制改革的决定中提出，要建立从初级到高级的职业教育体系，并与普通教育相沟通。1996年《中华人民共和国职业教育法》的颁布，从法律上规定了高等职业教育的地位和作用。目前，我国高等职业教育的发展与改革正面临着很好的形势和机遇：职业大学、高等专科学校和成人高校正在积极发展专科层次的高等职业教育；部分民办高校也在试办高等职业教育；一些本科院校也建立了高等职业技术学院，为发展本科层次的高等职业教育进行探索。国家学位委员会1997年会议决定，设立工程硕士、医疗专业硕士、教育专业硕士等学位，并指出，上述学位与工程学硕士、医学科学硕士、教育学硕士等学位是不同类型的同一层次。这就为培养更高层次的一线岗位人才开了先河。

高等职业教育本身具有鲜明的职业特征，这就要求我们在改革课

程体系的基础上，认真研究和改革课程教学内容及教学方法，努力加强教材建设。但迄今为止，符合职业特点和需求的教材却还不多。由泰州职业技术学院、上海第二工业大学、金陵职业大学、扬州职业大学、彭城职业大学、沙洲职业工学院、上海交通高等职业技术学校、上海交通大学技术学院、上海汽车工业总公司职工大学、立信会计高等专科学校、江阴职工大学、江南学院、常州技术师范学院、苏州职业大学、锡山职业教育中心、上海商业职业技术学院、潍坊学院、上海工程技术大学等百余所院校长期从事高等职业教育、有丰富教学经验的资深教师共同编写的《21世纪高等职业教育通用教材》，将由上海交通大学出版社等陆续向读者朋友推出，这是一件值得庆贺的大好事，在此，我们表示衷心的祝贺。并向参加编写的全体教师表示敬意。

高职教育的教材面广量大，花色品种甚多，是一项浩繁而艰巨的工程，除了高职院校和出版社的继续努力外，还要靠国家教育部和省(市)教委加强领导，并设立高等职业教育教材基金，以资助教材编写工作，促进高职教育的发展和改革。高职教育以培养一线人才岗位与岗位群能力为中心，理论教学与实践训练并重，两者密切结合。我们在这方面的改革实践还不充分。在肯定现已编写的高职教材所取得的成绩的同时，有关学校和教师要结合各校的实际情况和实训计划，加以灵活运用，并随着教学改革的深入，进行必要的充实、修改，使之日臻完善。

阳春三月，莺歌燕舞，百花齐放，愿我国高等职业教育及其教材建设如春天里的花园，群芳争妍，为我国的经济建设和社会发展作出应有的贡献！

叶春生

2000 年 5 月

前　　言

我国的高等教育体制改革正在不断深化，作为其重要组成部分的高等职业教育也正在蓬勃发展，我们需要培养一大批既具有必要理论知识，又具有较强实践能力的从事生产、建设、管理、服务等第一线工作的专门人才。其中理论教学应“以应用为目的，以必需、够用为度，以掌握概念、强化应用为教学重点”。为适应和满足高等职业教育的改革，我们组织编写了《应用高等数学基础——线性代数与概率统计》。

本教材是《应用高等数学基础》的一个分册，内容分三部分：第一部分(第1章～第3章)线性代数，包括了行列式、矩阵、线性方程组等内容；第二部分(第4章～第6章)为概率论与数理统计，包含了随机事件及其概率、随机变量及其数字特征和参数估计与假设检验等内容；第三部分(第7章)为数学实验，包含了 Matlab 在线性代数和概率统计中的应用。

本分册的主要特色体现在以下三方面：

(1) 在保留核心内容的前提下，教学课时有较大幅度的压缩，以适应高职教育高等数学少学时的教学需要。

(2) 本分册的内容简洁，实用性强。每章都配有内容提要、习题和自测题，便于实践教学和同学自学的需要。

(3) 本分册引入了计算机软件 Matlab，体现了教学改革的方向。

本分册由朱长坤任主编，王洁明、刘大瑾任副主编(以姓氏笔画为序)，翟向阳主审。参加编写的有(以姓氏笔画为序)王洁明、朱长坤、朱永林、李彦、沈缨、吴叶民、沐雨芳、董则荣、翟向阳。

由于编者的水平和时间所限，书中不当之处在所难免，盼望广大读者及同行专家给予批评指正。

编者

2005年6月

目录

第 1 章　行列式

内容提要:本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，此外还介绍了用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则。

1.1　行列式的概念

二阶和三阶行列式

在初等数学中，我们用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2。 \end{cases}$$

为了方便使用和记忆，将上面出现的那四个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}。 \tag{1-1}$$

数 a_{ij}($i=1,2;j=1,2$)称为行列式(1-1)的**元素**，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列。

上述二阶行列式的定义，可用以下的对角线法则

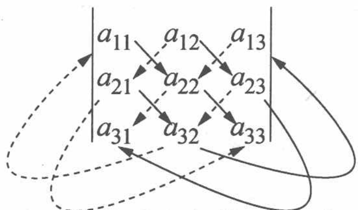
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来记忆。把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积与副对角线上两元素之积的差。

类似地，定义由 3^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式。这个算式可按如下便于记忆的对角线法则来得到：



图中三条实线上的三个元素的乘积都带正号，位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负号，它们的代数和就是三阶行列式的值，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。 \tag{1-2}$$

容易验证，三阶行列式可以通过比它低一阶的二阶行列式的展开式来计算，即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{1-3}$$

其中三个二阶行列式分别是在原来的三阶行列式 D 中划去第一行元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的第一行和第 j 列的元素，剩下的元素保持原来的相对位置所组成的二阶行列式，而每一项的符号等于 $(-1)^{1+j}$，即

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}。\tag{1-4}$$

例 1.1　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$。

解法一　（利用对角线法则）：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}&=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\\&\quad\times4-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\\&\quad\times(-3)\\&=-4-6+32-4-8-24\\&=-14。\end{aligned}$$

解法二　（按第一行展开）：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}\times1\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times2\\&\quad\times\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-4)\times\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}\\&=-8-14+8\\&=-14。\end{aligned}$$

例 1.2　求解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & x^2\end{vmatrix}=0$。

解　方程左端的二阶行列式 $D=1\times x^2-1\times x=x^2-x$，由 $x^2-x=0$解得 $x=0$ 或 $x=1$。

1.1.2　n 阶行列式

三阶行列式可以按第一行展开成三个二阶行列式的代数和，同样，

可用三阶行列式来定义四阶行列式，依此类推。按照这一规律在定义了 $n-1$ 阶行列式的基础上，便可得到 n 阶行列式的定义。

定义 1.1　（n 阶行列式递推定义法）：由 n^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，其值为

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{23} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式的元素，通常将 n 阶行列式简记为 Δ 或用大写字母（如 D）表示。

n 阶行列式从左上角到右下角的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的连线称为**主对角线**，从右上角到左下角的元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 的连线称为**副对角线**。

定义 1.2　在 n 阶行列式中，把元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的元素按原次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}。又，记 $(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$，则称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

因而 n 阶行列式的定义可简述为：n 阶行列式等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

上式简称为将行列式 D 按第一行展开的展开式。

例 1.3　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & -3\\1 & 0 & 3 & 0\\2 & -3 & 6 & 1\\1 & 6 & 2 & -3\end{vmatrix}$。

解

$$\begin{aligned}D&=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\-3 & 6 & 1\\6 & 2 & -3\end{vmatrix}+(-3)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\2 & -3 & 6\\1 & 6 & 2\end{vmatrix}\\&=2\times3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3 & 1\\6 & -3\end{vmatrix}+3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 6\\6 & 2\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{vmatrix}\right]\\&=-6\times3+3\times3\\&=-9。\end{aligned}$$

下面来计算几种特殊的 n 阶行列式，其中未写出的元素都是 0。

例 1.4　称仅在对角线上有非零元素的行列式为**对角行列式**。证明：对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n。$$

证明　第一式，同学们自证。

对第二个行列式，注意到降阶时，元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列，故有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_n = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \lambda_1 \cdot (-1)^{1+n} \cdot \lambda_2$$

$$\cdot (-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdot \cdots \cdot (-1)^{1+2}$$

$$\cdot (-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n。$$

例 1.5 称对角线以上(下)的元素都为 0 的行列式为**下(上)三角行列式**。证明:下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

证明 按 n 阶行列式的定义,依次降低其阶数,每次都仅有一项不为 0,故有

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}(-1)^{1+1}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

1.2　行列式的性质与计算

1.2.1　行列式的基本性质

按照行列式的定义直接计算行列式，当阶数较大时，计算较为麻烦。为简化运算，我们讨论行列式的性质。先给出转置行列式的定义。

定义 1.3　将行列式 D 的行与相应的列互换后所得行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

下面给出行列式的性质(证明略)：

性质 1　行列式与它的转置行列式的值相等。

由此性质可知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然。

例 1.6　计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

解　由性质 1，得

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

由性质 1，我们可知，行列式按第一行展开的定义，也可写成按第一列展开的形式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1}。$$

性质 2 互换行列式的任意两行(列),行列式变号。

我们用 r_i 表示行列式的第 i 行,用 c_j 表示第 j 列。第 i 行与第 j 行互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;第 i 列与第 j 列互换,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$。

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零。

证 因将行列式 D 中相同的两行(列)互换后,D 相当于没有变,而由性质 2 有 $D=-D$,故 $D=0$。

性质 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

(按行展开) $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$

$(i=1,2,\cdots,n)$,

(按列展开) $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$

$(j=1,2,\cdots,n)$。

这一性质称为**行列式按行(列)展开法则**。

利用这一法则,可比直接用定义更灵活地降低行列式的阶数,从而简化运算。

例 1.7 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$。

解 观察到第三列只有一个非零元素,故按第三列展开:

$$D = 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -6 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 2 的推论}} 0。$$

推论 2 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代

数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)。$$

证明　将行列式 D 按第 j 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn},$$

若在上式中把第 j 行元素 a_{jk} 换成第 i 行元素 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn},$$

当 $i\neq j$ 时，上式左端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零。因而

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

上述证法应用于列，可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j),$$

综合性质 3 及推论 2，得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D & (\text{当 } i=j)\\ 0 & (\text{当 } i\neq j)\end{cases}\quad\text{或}\quad\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D & (\text{当 } i=j),\\ 0 & (\text{当 } i\neq j)。\end{cases}$$

推论 3　行列式某一行(列)元素全为零，则此行列式等于零。

证明　由性质 3，按元素全为零的行(列)展开，即得。

性质 4　行列式的某一行(列)中所有元素乘以同一个数 k，等于用