

重庆文理学院学术专著出版资助项目

霍永亮 著

随机 规划 稳定性理论

SUIJIGUIHUA
WENDINGXING LILUN



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

重庆文理学院学术专著出版资助项目

随机规划稳定性理论

霍永亮 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

随机规划稳定性理论 / 霍永亮著. —成都: 西南
交通大学出版社, 2010.1
ISBN 978-7-5643-0525-3

I. ①随… II. ①霍… III. ①随机规划—运动稳定性
理论 IV. ①0221.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 237990 号

随机规划稳定性理论

霍永亮 著

*

责任编辑 张宝华

特邀编辑 顾 飞

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031

发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

成都蜀通印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 5.437 5

字数: 197 千字

2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-0525-3

定价: 18.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

随机规划是融概率论、经典分析、数学规划于一体的新兴数学分支. 随机规划的稳定性是随机规划理论的重要组成部分和最活跃的研究方向之一. 鉴于某些随机规划的很多良好性质和结构, 很有必要将其推广到更一般情形, 进而讨论其最优解集的上半收敛性.

本书主要研究了非线性随机规划最优解集的稳定性. 全文共分 7 章, 具体安排如下: 第 1 章介绍了随机规划稳定性的背景及研究现状和预备知识; 第 2 章研究了概率测度在集合序列不同收敛意义上的连续性以及弱收敛概率测度序列连续收敛性条件, 并讨论了概率测度序列的弱收敛与上图收敛之间的关系; 第 3 章证明了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、控制收敛定理, 给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件; 第 4 章将积分泛函算子定义域中的无界且半连续函数空间扩张到更一般的可测函数空间, 并在较弱的条件下证明了这种积分泛函算子的收敛定理、控制收敛定理及其推广形式的收敛定理、控制收敛定理, 推广和改进了第 3 章的有关结果; 第 5 章分别讨论了随机规划的期望模型、概率约束规划模型逼近最优解集序列的上半收敛性以及经验逼近模型逼近最优解集序列的几乎处处上半收敛性, 并利用集值分析理论证明了随机规划最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性; 第 6 章分别给出随机规划期望模型、概率约束规划模型、经验逼近模型 ε -逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性, 并讨论了随机约束规划逼近问题 ε -最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性; 第 7 章将参数规划最优值函数的预不变凹凸性拓广为 B -预不变凹凸性, 并讨论了最优值函数的 B -预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系.

本书的主要工作是作者在攻读博士期间完成的，其中第6章是作者在博士毕业后完成的。在攻读博士期间，导师刘三阳教授不仅在学术上给予我大力的支持、耐心的指导和热情的鼓励，而且在生活、工作上给予我无微不至的关怀和帮助，使得我能在一个良好的学术氛围中专注于自己的学业。导师刘三阳教授严肃认真的治学态度，正直无私的人格品质，任劳任怨的奉献精神 and 不断进取的思想境界给我留下了深刻的印象，他的教诲和指导令我受益匪浅，终身难忘。在此，我首先对刘三阳教授表达深深的敬意与感激！另外，还要衷心地感谢榆林学院书记慕锡凡教授，榆林学院校长苗润才教授，榆林学院副院长赵红星、王世平教授，弓炳耀教授，陕西省高速集团总经理助理叶普万教授，正是在他们的鼓励、支持和帮助之下，我才能够完成学业；还要感谢同窗好友綦明男、穆学文、李军、徐田华、郭渊博、王超、刘侍刚、李树、慕建君等博士，与他们的探讨也使我受益匪浅。

本书的出版得到了重庆文理学院学术专著出版基金项目的资助和重庆文理学院有关领导和同仁的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。由于水平有限，不当之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见，我们将进一步改进。

霍永亮

2009年7月

目 录

1 绪论与预备知识	1
1.1 随机规划稳定性研究的背景	1
1.2 随机规划稳定性研究的现状	3
1.2.1 弱收敛概率测度	5
1.2.2 推广到集值映射的情形	7
1.2.3 参数规划中广义凸性的推广	8
1.3 可测空间中的积分转化定理	9
1.4 度量空间中的概率测度弱收敛及其等价条件	11
1.5 可分度量空间中的概率测度弱收敛及其等价条件	13
2 概率测度的若干收敛性	15
2.1 引 言	15
2.2 集合的几种收敛性概念	16
2.3 集合序列收敛性之间的关系	17
2.4 概率测度在集合不同收敛意义上的连续性	21
2.5 弱收敛概率测度序列连续收敛的若干充分条件	26
2.6 概率测度的弱收敛与上图收敛的关系	29
3 期望泛函的收敛定理	34
3.1 引 言	34
3.2 极限定理	35
3.3 控制收敛定理	40
3.4 概率测度弱收敛的若干等价条件	42
3.5 期望泛函序列的上图收敛性	45
4 积分泛函算子的收敛定理	50
4.1 引 言	50

4.2	积分泛函算子序列的收敛定理	52
4.3	积分泛函算子序列的控制收敛定理	62
4.4	概率测度弱收敛的若干新的等价条件	66
5	随机规划的稳定性	71
5.1	期望模型逼近最优解集序列的上半收敛性	71
5.1.1	引言	71
5.1.2	上图收敛	74
5.1.3	最优解集序列的上半收敛性	80
5.2	概率约束规划模型逼近最优解集序列的上半收敛性	82
5.2.1	引言	82
5.2.2	上图收敛	85
5.2.3	最优解集序列的上半收敛性	89
5.3	经验逼近模型的最优解集序列的几乎处处上半收敛性	90
5.3.1	引言	90
5.3.2	几乎处处上图收敛	93
5.3.3	几乎处处上半收敛	100
5.4	随机规划逼近最优解集的分布收敛、概率收敛、 几乎处处收敛的稳定性	102
5.4.1	引言	102
5.4.2	参数非线性规划问题最优解集集值映射的 半连续性	104
5.4.3	最优解集的稳定性分析	111
6	随机规划逼近 ε -最优解集的稳定性	120
6.1	期望模型 ε -逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性	120
6.1.1	期望模型最优值的收敛性	123
6.1.2	期望模型 ε -最优解集的 Hausdorff 收敛性	123
6.2	概率约束规划模型逼近 ε -最优解集的 Hausdorff 收敛性	127
6.2.1	概率约束规划模型最优值的收敛性	129
6.2.2	概率约束规划模型 ε -逼近最优解集的	

Hausdorff 收敛性	130
6.3 经验逼近模型 ε -最优解集的	
几乎处处 Hausdorff 收敛性	131
6.3.1 经验逼近最优值的几乎处处收敛性	133
6.3.2 经验逼近 ε -最优解集的	
几乎处处 Hausdorff 收敛性	134
6.4 随机规划逼近问题 ε -最优解集的稳定性分析	135
6.4.1 引 言	135
6.4.2 非线性参数规划问题 ε -最优解集集值映射的	
连续性	137
6.4.3 ε -最优解集稳定性分析	141
7 参数规划最优值函数的 B -预不变凸凹性	143
7.1 引言和预备知识	143
7.2 最优值函数的 B -预不变凸性	146
7.3 最优值函数的 B -预不变凹性	149
7.4 最优值函数的 B -预不变凹性与其最优解集映射的	
不变凸性之间的关系	152
参考文献	155
符号说明	165

1

绪论与预备知识

本章首先介绍了随机规划稳定性概要及其研究现状；其次给出了在随机规划中经常用到的可测空间、度量空间与可分度量空间中随机元、概率测度弱收敛等基本概念以及概率测度弱收敛的等价条件.

1.1 随机规划稳定性研究的背景

在自然科学与工程技术的研究中，很多问题都可以归结为数学规划问题，如运输问题、经济利益最大问题、费用最小问题及路程最短问题等，而这些也都可以用数学规划去描述. 但在现实世界中，由于各种不确定因素的影响，数学规划中的系数经常会波动，而不是固定的已知数. 这时可能有三种情况出现：它们或者是具有已知概率分布的随机变量，或者是具有未知概率分布的随机变量，或者是其他类型的变量而不是随机变量. 这些不确定因素，在许多场合都可以用一定的概率分布去描述. 因此，在数学规划中引入随机变量，能够使建立的数学规划模型更加符合客观实际情况，从而使作出的决策更加合理，进而产生了非线性的各种随机规划，如单阶段随机约束规划、多阶段补偿规划、随机整数规划、随机动态规划、随机目标规划及以随机过程为参数的随机规划等问题.

如何求解这些随机规划问题是数学研究的一项重要任务. 由于

数学规划中引入了随机变量,从而导致随机规划问题数学期望中涉及的多重积分计算比较复杂,因此直接求解这些随机规划问题是相当困难的.其最初的想法是将随机规划模型中的随机变量用它们的期望值代替,得到一个确定的数学规划模型,然后再用普通数学规划的各种算法去求解.实际上,这种做法在很多时候并不可行,因此发展随机规划理论就显得非常必要.王金德教授在他所撰写的随机规划一书中,首先提出求解随机规划问题的一种比较可行而有效的方法——逼近方法.正是由于随机规划所采取的逼近方法是可行有效的,所得结论又具有广泛适用性,更切合实际,所以关于随机规划逼近理论研究一直是非线性随机规划的中心课题.

利用逼近方法求解这些非线性随机规划问题有两条途径:一条途径是在随机变量概率分布已知的情形下,采用某种离散化方法得到一系列(离散)随机变量序列,这些随机变量序列分布收敛于初始随机变量,从而将原问题转化为一系列确定性数学规划问题,或者转化为一系列以随机变量为参数的数学规划问题,并讨论这一系列的随机规划最优解集的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛问题;另一条途径就是在许多实际问题中,随机变量的概率分布是未知的,而只有几个样本点是已知的,因此这些样本点可以认为是随机变量的独立观测值,而这些样本点的观测值可以确定一个经验概率测度,再用经验概率测度替代原问题中随机变量所确定的概率测度,进而得到原问题的经验逼近模型.

为了保证逼近规划的解确为原问题的解的近似,上图收敛性提供了较好的理论基础.上图收敛理论的优点在于对无约束的确定性规划问题而言,如果逼近规划问题的目标函数上图收敛到初始规划问题的目标函数,那么逼近规划问题的任意一个最优解组成的序列的聚点必为初始规划的一个最优解.而对于含有约束的数学规划问题,通常都转化为与其等价的无约束规划问题,再利用上图收敛理论,解决逼近规划最优解集的收敛性问题.

通常所讨论的随机规划模型有三种:第一种是期望模型,即在期望约束条件下,使得目标函数的期望泛函达到最优;第二种是概

率约束模型, 概率约束规划模型允许决策者作出的决策在一定程度上不满足约束条件, 但该决策应该使得约束条件成立的概率不小于某一概率水平; 第三种是经验逼近模型. 另一方面, 按决策者所获得的信息可把随机规划问题大致分为两种类型: 等待且看到模型和这里且现在模型. 所谓等待且看到模型, 即决策者等待观测问题中随机变量的实现, 然后利用这些实现的信息作出决策, 分布问题就属于这种类型. 所谓这里且现在模型, 即决策者必须在没有随机变量实现的信息的情形下就作出决策, 如两阶段的补偿规划问题和概率约束规划问题.

1.2 随机规划稳定性研究的现状

随机规划的逼近和估计结果的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代 Kall 所做的工作和 Wets 关于随机规划的经验估计. Dupacova 和 Schultz 分别于 1900 年和 2000 年在各自的文章中均建立了随机规划稳定性的理论框架. 然而, 关于随机规划稳定性的概念首先由 Bereanu 于 1975 年提出, 接着 Kankova 于 1978 年首次给出了更一般化的随机规划模型关于概率测度弱收敛的稳定性研究. 随后, Dupacova 和王金德分别于 1984 年和 1985 年又研究了随机规划关于有限维概率分布为参数的稳定性. 这使得人们对随机规划稳定性的研究更感兴趣, 国内外学者均采用逼近法 (离散化随机变量) 对随机规划稳定性的研究做了大量的工作, 已有丰硕成果. 在诸多研究成果中, Robinon 和 Wets 于 1987 年对随机规划最优值和最优解集关于弱收敛概率测度稳定性的研究工作堪称是随机规划稳定性研究的经典之作. 关于这方面的重要的后续研究成果是 Artstein 和 Wets, Vogel, Schultz, Wang, Zervos, Riis 和 Schultz 等所做的工作. 与此同时, 许多作者用概率测度之间的距离去刻画这些稳定性结果的数量关系, 但是, 用概率测度之间的距离去刻画这些稳定性结果的数量关系的工作首先是由 Romisch 于 1986 年初步尝试的.

对随机规划稳定性的研究工作大部分是针对概率测度的一般扰动[摄动]研究的. 随着对随机规划进一步的深入研究, 随机规划的离散化逼近和统计逼近两者的一般框架逐步呈现出来, 然而这两种逼近类型都是利用各自的特殊结构独立发展起来的. 对于离散化逼近, 1995 年, Birge 和 Qi 又进一步深化了 Birge 和 Wets 于 1986 年所做的工作. 同时, 关于随机规划模型的统计推断的研究更是热点. 在早先的 Kankova 和 Wets 工作之后, 许多作者投身于统计估计的渐进性质的研究工作, 如相合性、收敛速度、极限定理等, 涉及的内容有 Dupacova 和 Wets, Shapiro, King, Kankova, King 和 Rockafellar, Artstein 和 Wets, Pflug, Romisch, Growe, Pflug, Ruszczyński 和 Schultz 等所做的工作. 另外, 一些关于随机规划逼近的研究是基于可测集值映射的收敛(几乎处处收敛、概率收敛、分布收敛)和可积函数的上图收敛. 这些文献有 Salinetti 和 Wets, Salinetti, Vogel, Hess 以及近年的 Korf 和 Wets 所做的工作. 最近, 国内许多学者对随机规划方面的深入研究也做了大量的工作. 骆建文等人研究了随机规划逼近解的收敛性和概率约束规划的稳定性分析; 王立洪研究了带有相依样本的随机规划问题的渐近性态; 本书作者通过对多元函数关于概率测度积分的深入研究, 并将带有约束的随机规划问题等价转化为无约束的规划问题, 利用上图收敛理论, 解决了一类随机规划逼近最优解集的上半收敛性问题; 陈志平对一般形式的多阶段有补偿的问题广义对偶理论及其应用做了研究; 万仲平等把单阶段随机规划问题转化为具有多个约束的确定性非线性规划, 然后利用李兴斯在 1994 年提出的极大熵函数方法, 并把此确定性规划转化为只带简单约束的非线性规划, 由此提出了求解这种随机规划的光滑逼近法, 同时给出了该法的收敛性分析, 较好地克服了因提高离散精度导致约束函数个数迅速增大所带来的求解困难. 有关随机规划逼近法已被成功地应用于各类算法求解, 并将随机规划思想方法应用于其他领域的研究. 对于随机规划微分稳定性的研究, 1991 年, 王金德首先讨论了随机规划目标函数微分稳定性; 1995 年, Birge 和 Qi 证明了闭凸函数的上图收敛蕴含着这些函数在

其极限函数的可微点处次微分的收敛性, 并将这个结果应用到凸随机规划的稳定性. 有关非光滑函数的微分和集值映射的微分以及变量系统的数量稳定性研究, 可参考文献[93~98]. 最近, 骆建文等研究了随机规划的弱微分性, Dentcheva 和 Romisch 给出了两阶段随机规划的微分稳定性.

近年来, 由于理论和应用的需要, 学者们对概率论与随机过程、参数规划的广义凸性进行了各种推广.

1.2.1 弱收敛概率测度

Lucchetti R, Salinetti G, Wets R J-B 等人给出了 Polish 空间中概率测度弱收敛的这样一个新的特征:

定理 1.1 设 $\{\mu_0; \mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathcal{P}(E)$ 中的概率测度族, 则下列条件等价:

- (1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;
- (2) $\forall \{A_n, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathcal{B}(E)$, 且 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset A_0$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_n) \leq \mu_0(A_0)$$

- (3) $\forall \{A_n, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathcal{B}(E)$, 且 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c \subset A_0^c$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_n) \geq \mu_0(A_0)$$

另外, 他们还研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的下半收敛性; Salinetti G 指出概率测度的弱收敛与概率分布函数的上图收敛之间是等价的, 并给出了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的上半收敛性; 本书作者在多元函数序列无界且半连续的情形下, 附加了一些条件, 研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、控制收敛定理, 给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件, 并用其研究了期望泛函序列的上图收敛性.

本书在第 4 章将相应的结果推广到更一般的可测情形, 对概率

测度弱收敛给出了如下若干新的等价条件:

定理 1.2 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(dx)$ 存在的条件下, 下列陈述是等价的:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;

(2) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 下一致可积, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

(3) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 上一致可积, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \leq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

(4) 若 f_n 连续收敛于 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 一致可积, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) = \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

定理 1.3 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(dx)$ 存在的条件下, 下列陈述是等价的:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;

(2) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0 , 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$, 使得 $f_n(x) \geq g(x)$, $n=1, 2, \dots$, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

(3) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0 , 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 上一致可积的, 使得 $f_n(x) \leq g(x)$, $n=1, 2, \dots$, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \leq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

(4) 若 f_n 连续收敛于 f_0 , 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leq g(x)$, $n=1, 2, \dots$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) = \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

推论 1 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(dx)$ 存在的条件下, 下列陈述是等价的:

- (1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;
- (2) 若 f_n 下半连续收敛到 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 等度下有界, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

- (3) 若 f_n 上半连续收敛到 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 等度上有界, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) \leq \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

- (4) 若 f_n 连续收敛到 f_0 , 且函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 等度有界, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) = \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

推论 2 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(dx)$ 存在的条件下, 下列两个条件是等价的:

- (1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;
- (2) 若 f_n 上半连续收敛 $\overline{f_0}$, 又下半连续收敛到 $\underline{f_0}$, 函数族 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 等度有界且 $\mu_0(D_{f_0})=0$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) = \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

推论 3 下列两个条件是等价的:

- (1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;
- (2) 若对任意有界可测函数 f , 且 $\mu_0(D_f)=0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)\mu_n(dx) = \int_E f_0(x)\mu_0(dx)$$

1.2.2 推广到集值映射的情形

自从张文修等人对集值随机过程理论研究以来, 引起了国内一

批学者对集值随机过程研究的广泛兴趣. 关于这方面研究的重要工作可参见文献[80~90], 其中建立了集值随机过程的一般理论框架, 同时也给随机规划研究开辟了新的广阔前景. 陈志平等人研究了带随机过程的随机规划问题最优解集的过程的特性与稳定性, 证明了带随机过程的随机规划问题最优解集作为集值随机过程的可测性, 可测最优解的选择过程的存在性, 研究了最优解集过程的平稳性、马氏性以及最优值过程的鞅性和最优解集过程的集值鞅性, 并讨论了在有限维分布意义上最优解集过程对所含随机过程参数的连续性以及最优值过程的分布稳定性.

最近, 本书作者对两指标鞅性停止变换的不变性方面做了一定的研究, 并在集值理论框架下讨论了随机规划逼近问题最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

1.2.3 参数规划中广义凸性的推广

最优值函数的凸凹性是非线性规划中灵敏度分析、稳定性分析、参数分析的重要条件, 并在经济学中边际效益和影子价格等问题的研究中得到广泛的应用. 许多作者不断地提出新的广义凸性概念, 如预不变凸、 B -凸、 ε -凸、不变凸、预拟不变凸、 B -预不变凸等, 并用广义凸性替代通常意义上的凸性来研究参数规划最优值的特性.

Fiacc 等人首先系统地研究了参数规划问题最优值函数的凸凹性; 张庆祥等将 Fiacc 等人的研究成果拓广为预不变凸凹性; Saneja 等又将预不变凸函数的定义减弱到 B -预不变凸函数, 研究了 B -预不变凸函数的一些性质, 并举例说明了存在 B -预不变凸函数, 但其不是预不变凸的; 本书作者在利用点到集映射图的概念, 提出了一种新的不变凸点到集映射和不变凹点到集映射的新概念, 将张庆祥等人的有关研究成果拓广为 B -预不变凸凹性, 并研究了最优值函数的 B -预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系, 得到了若

干新的结论. 有关参数规划的稳定性理论研究以及其他研究结果, 可参见文献[110~112].

1.3 可测空间中的积分转化定理

1.3~1.5 节的内容除特别指出外, 皆选自文献[115~120].

定义 1.1 设 Ω 的某些子集构成的类, $\mathcal{F}$ 为 σ -域, 则称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间.

定义 1.2 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, 定义在 $\mathcal{F}$ 上的非负实值函数 μ 满足:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) $\forall A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$, 有可列可加性

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

则称 μ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度, 而称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间. 当 $\mu(\Omega) = 1$ 时, 则称 μ 为概率, 通常记为 P , 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

定义 1.3 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 与 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 均为可测空间, 若映射 $\xi: \Omega \rightarrow \Omega_1$ 满足对每一 $B \in \mathcal{F}_1$, 有

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

则称 ξ 为由 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 的可测变换.

定义 1.4 设 ξ 是由 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 的可测变换 (亦称 ξ 为随机元), 则由下式

$$P_{\xi}(B) = P(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F}$$

在 F_1 上定义出的测度 P_{ξ} (称为 ξ 导出测度), 称作 ξ 的分布. 由概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 $(R, \mathcal{B}(R))$ (这里 $\mathcal{B}(R) := \sigma((-\infty, x], x \in R)$) 的随机元 ξ 称为该概率空间上的随机变量. 我们称定义在 $\mathcal{B}(R)$ 上的集函数