文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

传承辉煌的历史 **2009版** 开启成功的未来

考研数学复习指南

陈文灯 黄先开 编著

（理工类）

正版书超值惊喜！

DVD

内含
陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
60小时的考研重难点全新视频
本书课后习题全部详解资料

世界图书出版公司

传承辉煌的历史 **2009版** 开启成功的未来

考研数学复习指南

陈文灯　黄先开　编著

潘正义　审订

（理工类）

正版书超值惊喜！

DVD

内含
- 陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
- 60小时的考研重难点全新视频
- 本书课后习题全部详解资料

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类／陈文灯等编著. —14 版. —北京:世界图书出版公司北京公司,2004. 1
ISBN 978-7-5062-5211-9

Ⅰ. 数... Ⅱ. 陈... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)
(2009 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开
编　　审: 潘正义
责任编辑: 王志平
封面设计: 章　良

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 88861708　邮编 100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 37
字　　数: 598 千字
版　　次: 2008 年 2 月第 14 版　2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-9/O · 332　　**定价:69.80 元**

服务热线: 010 - 88861708

前 言

数学统考从 1987 年至今经历了 22 个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

（1）基础（基本概念、基本理论、基本方法）；

（2）解综合题的能力；

（3）分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；

（4）解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

（1）对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

（2）归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

（3）用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

（4）广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

（5）介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

（6）创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十三载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，**同时也有很多教师同行用该书做教学参考**。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

2008 年元月

目　　录

第1篇　高等数学

第 2 篇 线性代数

第3篇　概率论与数理统计*

带“*”号内容数二考生不作要求

第1篇　高等数学

篇要　高数的四种思维定势

思维定势一：在题设条件中若函数$f(x)$二阶或二阶以上可导，"不管三七二十一"，把$f(x)$在指定点展成泰勒公式再说.

【例1】设C为实数，函数$f(x)$满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C,\quad \lim_{x\to\infty}f'''(x)=0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x<\xi_1<x+1,\qquad ①$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1<\xi_2<x.\qquad ②$$

由①+②得，$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\dfrac{1}{6}f'''(\xi_2)-\dfrac{1}{6}f'''(\xi_1).$　③

由①-②得，$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\dfrac{1}{6}f'''(\xi_1)-\dfrac{1}{6}f'''(\xi_2).$　④

当$x\to\infty$时，$\xi_1\to\infty,\xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=2C-2C+\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

【例2】设$f(x)$在$[0,1]$上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，并且当$x\in(0,1)$时，$|f''(x)|\leqslant A$. 求证：$|f'(x)|\leqslant\dfrac{A}{2},x\in[0,1].$

【证】由于$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，则$f(x)$可展成一阶泰勒公式，即

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$在$x$与$x_0$之间.

取$x=0,x_0=x$，则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0<\xi_1<x\leqslant1.\qquad ①$$

取$x=1,x_0=x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

② - ①得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0} \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leqslant A, x \in (0,1)$,则

$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$

当$0 \leqslant x \leqslant 1$时,$2x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$. 故$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$.

【例3】 试证:若偶函数$f(x)$在点$x=0$的某邻域内具有连续的二阶导数,且$f(0)=1$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$绝对收敛.

【证】 因$f(x)$为偶函数,故$f'(x)$为奇函数,$f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

从而 $|u_n| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

【例4】 设函数$f(x)$二阶可导,且$f''(x) \geqslant 0, x \in (-\infty, +\infty)$,函数$u$在区间$[0,a](a>0)$上连续. 证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证】 令$x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$,将$f(x)$在$x=x_0$处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于$f''(x) \geqslant 0$, 则$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

令$x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geqslant f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在$[0,a]$上对t积分,得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant \int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t + \int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$= af(x_0) + f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t - ax_0\right] = af(x_0).$$

故 $\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$

【另证】 因$f''(x) \geqslant 0$,所以$f(x)$为凸函数. 因此,具有性质:

$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$（其中 $\lambda \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$）.

由 u 在 $[0,a]$ 上连续，从而可积. 将 $[0,a]$ n 等分，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n} = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

思维定势二：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0) = f(\frac{1}{2}), 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x = f(2)$.

证明：存在一个 $\xi \in (0,2)$，使 $f''(\xi) = 0$.

【证】$f(2) = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分中值定理}} 2(1-\frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足洛尔定理，即存在一个 $\xi_1 \in (\eta,2)$，使

$$f'(\xi_1) = 0. \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理，于是存在一个 $\xi_2 \in (0,\frac{1}{2})$，使

$$f'(\xi_2) = 0. \qquad ②$$

由①，②可知　$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用洛尔定理，于是 $\exists\,\xi \in (\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi) = 0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0 < a < b < 1$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是　$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

故　$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

【另证】$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

令　$F(x) = b\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$=\int_x^b [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant 0,(\text{由于} f(x)\geqslant f(t)\geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$,故

$$F(a)\geqslant F(0)=0,\text{即}\ b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

思维定势三:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\begin{cases}f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x,\\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b.\end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【证】 $f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x,$ 则

$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant (x-a)M.$$

同理 $|f(x)|\leqslant (b-x)M.$

于是 $$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值,试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证】 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则 $f'(c)=0$.(费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理,有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$

$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$

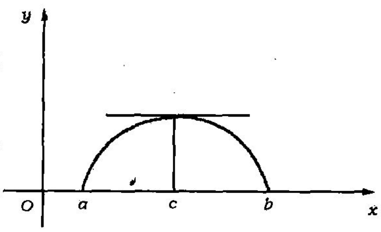
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$，且 $f''(x)<0, f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x)<0$ 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$. 再由 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有惟一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$.



由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a), x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<[-f'_-(b)](b-c), x\in[c,b].$$

于是 $\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x\in[a,c],\quad \dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}, x\in[c,b].$

则
$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$
$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$
$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

思维定势四：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

(1) $F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$；(2) $F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；(4) $F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

【解】(1) $F(y)\xlongequal{令\ u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

(2) $F(x)\xlongequal{令\ u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=-x\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u+\int_x^{x-x^2}uf(u)\mathrm{d}u$，

则 $F'(x)=-\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u-x[f(x-x^2)\cdot(1-2x)-f(x)]$

$$+(1-2x)(x-x^2)f(x-x^2)-xf(x)$$

$$=\int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u+x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $F(x)\xlongequal{\text{令}u=te^x}\int_0^{e^x} f(u)\frac{1}{e^x}\mathrm{d}u=\frac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u=e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u,$

则 $F'(x)=-e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u+e^{-x}f(e^x)\cdot e^x=f(e^x)-e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u.$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}u=x+t}\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$，于是有 $F(x)=x\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u,$

则 $F'(x)=\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u+x[f(x+x^2)(1+2x)-f(x)].$

【例11】 设$f(x)$可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}u=t-x}\int_{-x}^{0}(u+x)f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^{0} f(u)\mathrm{d}u.$

于是原方程变为 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u.$

两边对x求导，得 $1=f(x)-(-x)f(-x)(-1)-\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)(-1).$

整理，得 $1=f(x)-\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u,$

两边再对x求导，得 $0=f'(x)-f(-x)(-1),$

即 $f'(x)=-f(-x),$ ①

上式两边对x求导，得 $f''(x)=f'(-x),$ ②

由①，②得 $f''(x)=-f(x),$

即 $f''(x)+f(x)=0,$

解此方程得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

注意到 $f(0)=1,f'(0)=-1$，故$f(x)=\cos x-\sin x.$

【注】 思维定势四可推广为：若给定的函数为抽象的复合函数，则运算之前应先做变量替换，使之成为简单的形式.

例如：$f[\varphi(x)]\xlongequal{\text{令}u=\varphi(x)}f(u).$

【例12】 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，$f[\varphi(x)]=\ln x$，计算$\int\varphi(x)\mathrm{d}x.$

【解】 令 $x^2-1=t$，则$f(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}$，$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x,$

$$\Rightarrow\ \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x\ \Rightarrow\ \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1},$$

故 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$

第1章　函数·极限·连续

第1节　函　数

知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y = f(x)$.

其中 x—— 自变量，y—— 因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数概念的两要素：

① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围（若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域）.

② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法.

记住下列简单函数的定义域：

$y = \dfrac{1}{x}$,	$D_f: x \neq 0$,	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{x}$,	$D_f: x \geqslant 0$,	$[0, +\infty)$
$y = \log_a x$,	$D_f: x > 0$,	$(0, +\infty)$
$y = \tan x$,	$D_f: x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,	$k \in Z$
$y = \cot x$,	$D_f: x \neq k\pi$,	$k \in Z$
$y = \arcsin x$（或 $\arccos x$）,	$D_f: \lvert x \rvert \leqslant 1$,	$[-1, 1]$

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为：$x = \varphi(y)$，其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为：$y = f^{-1}(x)$.

注 ① $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形重合;$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若 $D_f \supset Z_\varphi$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x—— 自变量, u—— 中间变量, y—— 因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数,称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数:幂函数 $y=x^\mu(\mu\in R)$;指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$;对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$;三角函数如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等;反三角函数如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有着不同的表达形式,则该函数称为分段函数. 常见的分段函数:

① 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当 x>0,\\ 0 & 当 x=0,\\ -1 & 当 x<0.\end{cases}$

② y 是 x 的最大整数部分,记为 $y=[x]$.

③ 狄利克莱(Dirichlet) 函数 $y=f(x)=\begin{cases}1 & 当 x 为有理数时,\\ 0 & 当 x 为无理数时.\end{cases}$

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x) \quad (或 f(x)=-f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征:偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

① 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或偶) 函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数.

③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

④ 奇函数的导数是偶函数,偶函数的导数是奇函数.

⑤ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 的原函数

(i) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)$ 是偶函数

（ⅱ）若$f(x)$为偶函数,则$F(x)$是奇函数的充要条件为$a=0$.

常见的偶函数：$|x|$, $\cos x$, x^{2n}(n为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2},…

常见的奇函数：$\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1}, $\arcsin x$, $\arctan x$,…

2. 周期性

设函数$f(x)$在区间X上有定义,若存在一个与x无关的正数T,使对于任一$x\in X$,恒有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是以T为周期的周期函数,把满足上式的最小正数T称为函数$f(x)$的周期.

周期函数的运算性质：

① 若T为$f(x)$的周期,则$f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$.

② 若$f(x),g(x)$均是以T为周期的函数,则$f(x)\pm g(x)$也是以T为周期的函数.

③ 若$f(x),g(x)$分别是以$T_1,T_2,T_1\neq T_2$为周期的函数,则$f(x)\pm g(x)$是以T_1,T_2的最小公倍数为周期的函数.

④ 设$f(x)$是以T为周期的周期函数,则原函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为周期函数的充要条件为

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0.$$

常见函数的周期：$\sin x,\cos x$,其周期$T=2\pi$;

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期$T=\pi$.

3. 有界性

设函数$y=f(x)$在区间X上有定义,如果$\exists M>0$,使得对于一切$x\in X$,恒有：$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在区间X上有界;若不存在这样的$M>0$,则称$f(x)$在区间X上无界.

注 函数$f(x)$有无界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数：

$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$,	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$,	$(-\infty,+\infty)$
$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$,	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$,	$[-1,1]$
$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$,	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$,	$(-\infty,+\infty)$

4. 单调性

设函数$y=f(x)$在区间X上有定义,如果对$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有：

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在区间X上是严格单调增加(或严格单调减少)的;如果对于$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有：

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或}f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在区间X上是单调增加(或单调减少)的.