



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 编著

(理工类)



正版书超值惊喜!

内含

陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
60小时的考研重难点全新视频
本书课后习题全部详解资料

世界图书出版公司

传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 编著
潘正义 审订

(理工类)



正版书超值惊喜!

内含 | 陈文灯教授数学精妙复习方法指导视频
60小时的考研重难点全新视频
本书课后习题全部详解资料

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯等编著. —14 版. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2004. 1
ISBN 978-7-5062-5211-9

I. 数... II. 陈... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类) (2009 版)

主 编: 陈文灯 黄先开
编 审: 潘正义
责任编辑: 王志平
封面设计: 章 良

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 37
字 数: 598 千字
版 次: 2008 年 2 月第 14 版 2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-9/O · 332

定价: 69.80 元

服务热线: 010 - 88861708

世界图书出版公司

前言

数学统考从1987年至今经历了22个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

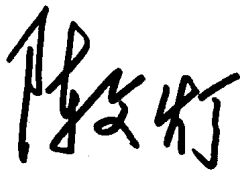
- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

- (1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。
- (2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。
- (3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。
- (4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。
- (5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。
- (6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十三载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。



2008年元月

目 录

第1篇 高等数学

篇要 高数的四种思维定势

.....	1
第1章 函数·极限·连续	7
第1节 函数	7
知识点精讲	7
题型归纳及思路提示	10
第2节 极限及连续性	15
知识点精讲	15
题型归纳及思路提示	20
精选习题一	35
参考答案	37
第2章 导数与微分	38
第1节 导数与微分	38
知识点精讲	38
题型归纳及思路提示	41
第2节 高阶导数	47
知识点精讲	47
题型归纳及思路提示	48
精选习题二	50
参考答案	52
第3章 一元函数积分学	53
第1节 不定积分	53
知识点精讲	53
题型归纳及思路提示	64
精选习题三(1)	73
参考答案	74
第2节 定积分	76
知识点精讲	76
题型归纳及思路提示	82
精选习题三(2)	103
参考答案	104

第3节 反常积分	105
知识点精讲	105
题型归纳及思路提示	106
精选习题三(3)	107
参考答案	107
第4章 微分中值定理与泰勒公式	108
第1节 中值定理	108
知识点精讲	108
题型归纳及思路提示	108
第2节 泰勒公式	117
知识点精讲	117
题型归纳及思路提示	118
精选习题四	122
参考答案	123
第5章 常微分方程	124
第1节 常微分方程的基本概念	124
知识点精讲	124
第2节 一阶微分方程	125
知识点精讲	125
题型归纳及思路提示	126
第3节 可降阶的高阶微分方程	133
知识点精讲	133
题型归纳及思路提示	134
第4节 高阶线性微分方程	135
知识点精讲	135
题型归纳及思路提示	139
第5节 欧拉方程*	142
知识点精讲	142
题型归纳及思路提示	143
第6节 微分方程的应用	144
题型归纳及思路提示	144
精选习题五	147
参考答案	148

第6章 一元微积分的应用	149	第2节 直线与平面	216
第1节 函数的单调性	149	知识点精讲	216
知识点精讲	149	题型归纳及思路提示	217
题型归纳及思路提示	149	第3节 投影方程	220
第2节 极值与最值	150	知识点精讲	220
知识点精讲	150	题型归纳及思路提示	221
题型归纳及思路提示	151	第4节 曲面方程	222
第3节 方程的根	157	知识点精讲	222
题型归纳及思路提示	157	题型归纳及思路提示	225
第4节 函数的图形性质	161	精选习题八	226
知识点精讲	161	参考答案	227
题型归纳及思路提示	162	第9章 多元函数微分学及应用 ..	228
第5节 弧微分	166	第1节 二元函数	228
知识点精讲	166	知识点精讲	228
题型归纳及思路提示	166	题型归纳及思路提示	228
第6节 微元法	167	第2节 二元函数的极限及连续性	229
知识点精讲	167	知识点精讲	229
题型归纳及思路提示	168	题型归纳及思路提示	230
精选习题六	177	第3节 二元函数的偏导数、全导数及	
参考答案	178	全微分	231
第7章 无穷级数*	179	知识点精讲	231
第1节 常数项级数	179	题型归纳及思路提示	232
知识点精讲	179	第4节 多元函数微分学在几何上的应用	
题型归纳及思路提示	181		244
第2节 函数项级数与幂级数	188	知识点精讲	244
知识点精讲	188	题型归纳及思路提示	245
题型归纳及思路提示	190	第5节 多元函数的极值及应用	246
第3节 无穷级数的求和	195	知识点精讲	246
题型归纳及思路提示	195	题型归纳及思路提示	248
第4节 傅里叶级数	203	精选习题九	253
知识点精讲	203	参考答案	254
题型归纳及思路提示	206	第10章 重积分	255
精选习题七	208	第1节 二重积分	255
参考答案	210	知识点精讲	255
第8章 向量代数与空间解析几何*		题型归纳及思路提示	258
.....	211	第2节 三重积分*	269
第1节 向量	211	知识点精讲	269
知识点精讲	211	题型归纳及思路提示	272
题型归纳及思路提示	213	精选习题十	273
		参考答案	275

第11章 曲线、曲面积分及场论

初步* 276

第1节 曲线积分 276

知识点精讲 276

题型归纳及思路提示 278

第2节 曲面积分 283

知识点精讲 283

题型归纳及思路提示 285

第3节 场论初步 293

知识点精讲 293

题型归纳及思路提示 294

精选习题十一 298

参考答案 299

第12章 函数方程与不等式证明

..... 300

精选习题十二 317

参考答案 318

第2篇 线性代数

篇要 线代的八种思维定势 319

第1章 行列式 325

第1节 排列与逆序 325

知识点精讲 325

题型归纳及思路提示 325

第2节 行列式 326

知识点精讲 326

题型归纳及思路提示 329

精选习题一 338

参考答案 339

第2章 矩阵 340

第1节 矩阵 340

知识点精讲 340

题型归纳及思路提示 342

第2节 逆矩阵 347

知识点精讲 347

题型归纳及思路提示 350

精选习题二 362

参考答案 365

第3章 向量 367

第1节 向量 367

知识点精讲 367

第2节 向量的线性组合、线性表示及线

性相关性 368

知识点精讲 368

题型归纳及思路提示 370

第3节 向量组的秩和矩阵的秩 380

知识点精讲 380

题型归纳及思路提示 381

精选习题三 387

参考答案 388

第4章 线性方程组 389

知识点精讲 389

题型归纳及思路提示 393

精选习题四 410

参考答案 412

第5章 特征值和特征向量

..... 414

第1节 矩阵的特征值和特征向量 414

知识点精讲 414

题型归纳及思路提示 416

第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的对

角化 422

知识点精讲 422

题型归纳及思路提示 423

精选习题五 434

参考答案 435

第6章 二次型 437

第1节 二次型 437

知识点精讲 437

题型归纳及思路提示 440

第2节 二次型的正定性及正定矩阵 447

知识点精讲 447

题型归纳及思路提示 448

精选习题六 451

参考答案 452

第3篇 概率论与数理统计*

篇要 概率统计的九种思维定势

.....	453
第1章 随机事件和概率	461
第1节 随机试验和随机事件	461
知识点精讲	461
题型归纳及思路提示	463
第2节 条件概率与事件的独立性	470
知识点精讲	470
题型归纳及思路提示	472
精选习题一	477
参考答案	478
第2章 随机变量及其分布	479
第1节 一维随机变量与分布函数	479
知识点精讲	479
题型归纳及思路提示	482
第2节 多维随机变量与分布函数	493
知识点精讲	493
题型归纳及思路提示	496
精选习题二	511
参考答案	514
第3章 随机变量的数字特征	517
第1节 一维随机变量的数字特征	517
知识点精讲	517
题型归纳及思路提示	519
第2节 多维随机变量的数字特征	524
知识点精讲	524
题型归纳及思路提示	526
精选习题三	539
参考答案	541

第4章 大数定律和中心极限定理

.....	542
第1节 切比雪夫不等式与大数定律 ...	542
知识点精讲	542
题型归纳及思路提示	543
第2节 中心极限定理	545
知识点精讲	545
题型归纳及思路提示	546
精选习题四	548
参考答案	549
第5章 数理统计的基本概念	550
第1节 总体、样本和统计量	550
知识点精讲	550
题型归纳及思路提示	551
第2节 抽样分布	553
知识点精讲	553
题型归纳及思路提示	555
精选习题五	558
参考答案	559
第6章 参数估计	560
第1节 点估计	560
知识点精讲	560
题型归纳及思路提示	562
第2节 区间估计	568
知识点精讲	568
题型归纳及思路提示	570
精选习题六	572
参考答案	574
第7章 假设检验	575
知识点精讲	575
题型归纳及思路提示	577
精选习题七	580
参考答案	581

带“*”号内容数二考生不作要求

第1篇 高等数学

篇要 高数的四种思维定势

思维定势一:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad ②$$

$$\text{由 } ① + ② \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad ③$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad ④$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0,1)$ 时, $|f''(x)| \leq$

A. 求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0,1]$.

【证】由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1. \quad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2) \frac{(1-x)^2}{2!}, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!} [f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!} [f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2} [x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2} (2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \text{ 绝对收敛.}$$

【证】因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{故 } u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{从而 } |u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a] (a > 0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证】令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【另证】因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ (其中 $\lambda \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$).

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$

由 f 的凸性及连续性, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \cdot \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

思维定势二: 在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时, 则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$.

证明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足洛尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用洛尔定理, 于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是} \quad \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故} \quad \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

令 $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\
 &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0).
 \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) \geq F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

思维定势三: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

$$\text{或 } f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

$$\text{若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } \begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$$

【例7】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则
 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\
 &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M.
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例8】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

于是 $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$

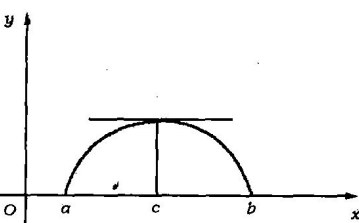
$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有惟一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上, $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$.



由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), \quad x \in [c, b].$$

于是 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c], \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}, x \in [c, b].$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

思维定势四: 对定限或变限积分, 若被积函数或其大部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例10】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$(1) \quad F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{求 } F'(y); \quad (2) \quad F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt, \text{求 } F'(x);$$

$$(3) \quad F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{求 } F'(x); \quad (4) \quad F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt, \text{求 } F'(x).$$

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$(2) \quad F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) = -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} u f(u) du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)]$$

$$+ (1 - 2x)(x - x^2)f(x - x^2) - xf(x)$$

$$= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x - 1)f(x - x^2).$$

$$(3) \quad F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \quad \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{【解】} \quad \int_0^x tf(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u) du = -\int_0^{-x} uf(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$$

$$\text{于是原方程变为} \quad x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} uf(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得} \quad 1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$$

$$\text{整理, 得} \quad 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$$

$$\text{两边再对 } x \text{ 求导, 得} \quad 0 = f'(x) - f(-x)(-1),$$

$$\text{即} \quad f'(x) = -f(-x), \quad \text{①}$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得} \quad f''(x) = f'(-x), \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①, ② 得} \quad f''(x) = -f(x),$$

$$\text{即} \quad f''(x) + f(x) = 0,$$

$$\text{解此方程得} \quad f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 1, f'(0) = -1, \text{ 故 } f(x) = \cos x - \sin x.$$

【注】思维定势四可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

$$\text{例如: } f[\varphi(x)] \xrightarrow{\text{令 } u = \varphi(x)} f(u).$$

【例 12】设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x) dx$.

$$\text{【解】} \quad \text{令 } x^2 - 1 = t, \quad \text{则 } f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}, \quad f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{故} \quad \int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + C.$$

第1节 函数



知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x},$$

$$D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[n]{x},$$

$$D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x,$$

$$D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$$

$$y = \tan x,$$

$$D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \cot x,$$

$$D_f: x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x), \quad D_f: |x| \leq 1, \quad [-1, 1]$$

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为: $x = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为: $y = f^{-1}(x)$.

- ① $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合; $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.
- ② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \supset Z_\varphi$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数: 幂函数 $y = x^\mu (\mu \in R)$; 指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 三角函数如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等; 反三角函数如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数. 常见的分段函数:

$$\textcircled{1} \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

② y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.

$$\textcircled{3} \text{ 狄利克莱(Dirichlet)函数 } y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征: 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- ① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- ② 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.
- ③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.
- ④ 奇函数的导数是偶函数, 偶函数的导数是奇函数.
- ⑤ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的原函数

(i) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数

(ii) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 是奇函数的充要条件为 $a = 0$.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2} , ...

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} , $\arcsin x$, $\arctan x$, ...

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

④ 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 则原函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 为周期函数的充要条件为

$$\int_0^T f(x) dx = 0.$$

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有: $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 $M > 0$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $(-\infty, +\infty)$

$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leq \pi$, $[-1, 1]$

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arccot} x| < \pi$, $(-\infty, +\infty)$

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调增加 (或严格单调减少) 的; 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加 (或单调减少) 的.