純粹史學

（續 集）

林 大 茅 著

一九六四年十二月十五日

第一章　假借的創造

哲學是思想的內容，而數學則為思想的形式，當我們用文字，圖畫，或符號把思想的形式確定以後，若要更進一步，假借數學的符號來取代這些初步的形式，便把本來的面目改變了。這種翻譯的工作，即是假借的創造。

1. 故事複合形

史書傳記是故事式的類型，其中每一故事的發展，脫不了人物，地域，文物，……等要素。在藝術或文學裏，便是怎樣運用文字的技巧或精妙的技術，以求達到表現的目的。所以數學工作者的任務，也就在乎怎樣利用複合形的項點來取代這些要素，也就在乎怎樣使這些故事一一翻譯為故事複合形。在這些項點之中，若某一項點與另一項點有關係的，便可聯成一個稜道，至於沒有關係的，便沒有聯結稜存在。因此，在這些稜道之中，有的互相聯結成為單純形，但也有互相隔離而成為複合形的。

根據史書的分類，不外分為編年體，紀傳體和斷代體三種，究其實這三者乃是上述複合形之三種界面罷了。因編年體係把時間縮為極短，從而成為無時間項點之界面。紀傳體則為限制人物之項點數，從而成為缺乏人物之界面。至於斷代體，則為限制時間點數的界面罷了。

由上所述，可知利用單純形數目及其各種各維界面數，便可推知純史的因果，分佈，結構，及典型等關係。

設複合形的項點為：V_1, V_2,…, V_{n+1} 因得：

$$(V_1, V_2, \cdots, V_{n+1}) = g_1\ \sigma_o^{\ n} + \sum_{i=1}^{{}_{n+1}C_n} g_{2i}\sigma_i^{\ n-1} +$$

$$\sum_{i=1}^{{}_{n+1}C_{n-1}} g_{3i}\sigma_i^{\ n-2} + \cdots + \sum_{i=1}^{{}_{n+1}C_1} g_{ni}\sigma_i^{\ o} \qquad (A)$$

上式 $\sigma_o^{\ n}$，$\sigma_i^{\ n-1}$，…，$\sigma_i^{\ o}$ 各表種種 n 維，n－1維，…，0維單純形；g_1，g_{2i}，…，g_{ni} 各表等于0或1之係數，故上式乃表由不同維數的單純形所組成之複合形。由此可知，當：

a) $g_1 = 1$，則所有 $g_{ji} = 0$，此卽表所求之複合形應為一個 n 維單純形。

b) $g_1 = 0$，則 g_{2i} 可為1或0，但當一個 $g_{2i} = 1$ 時，除僅有一個 $g_{ni} = 1$ 外，所有 g_{2i} 須為0，及所有 $g_{ji} = 0$ $(2<j<n)$. 當 g_{2i} 皆為0時，卽表所有 $\sigma_i^{\ n-1}$ 皆不存在。餘倣此。

上式若再用求界手續（boundary operation），便可得：

$$\partial(V_1, V_2, \cdots, V_{n+1}) = g_1 \left(\sum_1^{n+1}{}'\right)\sigma_o^{\ n-1} +$$

$$\sum_{i=1}^{nC_2} g_{2i}\left(\sum_1^{n}{}'\right)\sigma_i^{\ n-2} + \cdots + \sum_{i=1}^{nC_{n-1}} g_{n-1\,i}\left(\sum_1^{2}{}'\right)\sigma_i^{\ o}.$$

這裏 $\sigma_o^{\ n-1}$，$\sigma_i^{\ n-2}$，…，$\sigma_i^{\ o}$ 各表其 n－1，n－2，…，0維界面。而其係數各為 g_1，g_{2i}，g_{3i}，…，$g_{n-1\,i}$。此卽表界面 $\sigma_o^{\ n-1}$，$\sigma_i^{\ n-2}$，…，$\sigma_i^{\ o}$ 的個數各為 g_1，g_{2i}，g_{3i}，…，$g_{n-1\,i}$，其中 Σ' 表不計其正負號之項和。

$$\partial^2(V_1, V_2, \cdots, V_{n+1}) = g_1\left(\sum_1^{n+1}{}' \sum_1^{n}{}'\right)\sigma_o^{\ n-2} + \sum_{i=1}^{nC_2} g_{2i}\left(\sum_1^{n}{}'\right)$$

$$\left(\sum_{1}^{n-1}{}'\right)\sigma_i^{n-3}+\cdots+\sum_{i=1}^{nCn-2} g_{n-2\,i}\left(\sum_{1}^{3}{}'\right)\left(\sum_{1}^{2}{}'\right)\sigma_i。$$

同理，可推求這裏界面σ_o^{n-2}，σ_i^{n-3}，…，σ_i^{o}之個數。

一般得：

$$\partial^m(V_1, V_2, \cdots, V_{n+1})=g_1\left(\sum_{1}^{n+1}{}'\sum_{1}^{n}{}'\cdots\sum_{1}^{n-m+2}{}'\right)\sigma_o^{n-m}$$

$$+\sum_{i=1}^{nC_2} g_{2i}\left(\sum_{1}^{n}{}'\cdots\sum_{1}^{n-m+1}{}'\right)\sigma_i^{n-m-1}+\cdots$$

$$+\sum_{i=1}^{nCn-m} g_{n-m\,i}\sum_{1}^{m+2}{}'\cdots\sum_{1}^{2}{}'\sum_{1}^{1}{}'\sigma_i^{o}$$

在上式裏，各界面之係數愈大，則其界面個數也愈多，而其所表的故事單純形也愈重要。又設各界面的個數愈大，則所表的故事單純形在歷史上之結構力也愈强，因而所表的意義也愈深刻。那麼，這類係數的特徵便可表現了故事的全部意義，也就把握了歷史的全部意義。因此，它便被翻譯而為數學的符號了。因稱這些係數為純史特徵係數。

除了上述具有完整界面的單純形外，更有缺界單純形，茲設 $n+1$ 為複合形的項點個數，則 $n-l$ 為某界面的維數，i 表同項點之某一界面，h_{ij}^{m} 表對應界面的係數，此係數可為0或1，m 表維數之降低數，j 表同維數之某一界面，因得缺界單純形公式如次：

$$\sigma_i^{n-l}\longrightarrow\sigma_i^{n-l}-\sum_{m=1}^{n-l+1}\ \sum_{j=1}^{n-l+1}{}^{C_m} h_{ij}^{m}\ \sigma_{ij}^{n-m-l}\quad\cdots(B)$$

$$(i, j, l, m=0, 1, 2, 3, \cdots, n)$$

假使我們把公式(B)使公式中(A)的σ_i^{n-1}發生變換，便可得複合形的缺界情況，當其中$\sum h_{ij}^{m}=0$,卽表其界面σ_{ij}^{n-m-1}不存在，那麼，這便是缺界了。因更設$\sigma_{ij}^{n-m-1-1}\subset\sigma_{ij}^{n-m-1}$，而$\sigma_{ij}^{n-m-1-1}$不存在，則其對應係數$\sum h_{ij''}^{m+2}=0$；同樣，當$\sigma_{ij}^{n-m-2-1}$不存在時，其對應係數$\sum h_{ij''}^{m+2}==0,\cdots$，但最終必有一個界面$\sigma_{ij}^{n-r-1}$存在，卽必有一個對應係數$\sum h_{ij(r)}^{r}\neq 0$。否則可設$\sigma_{ij}^{0}$不存在，則其複合形的頂點應為n個而非n+1個，此與假設矛盾。因得係數組如次：

$$\sum h_{ij}^{m}=0,\ \sum h_{ji'}^{m+1}=0,\cdots,\text{而}\ \sum h_{ij}^{r}(r)\neq 0.$$

這些缺界便形成一個洞，故上式稱為洞的形式。

最後我們尚須利用求界手續，把原有空間變換而為界面：∂, ∂^2, $\cdots$, ∂^m從這些界面裏，先求出∂界面中最大係數之單純形，那麼，這單純形卽為其純史的主要中心，倘其最大係數不僅一個時，可再求其∂^2中最大係數之單純形，那麼，要看與這最大係數有關之單純形是誰的界面，才可斷定誰是歷史重心。倘其最大係數仍非一個時，可如法逐次求之，直至求得重心為止。

因此，更得當σ^{n-k-1}, σ^{n-k}各為最大係數的單純形若$\sigma^{n-l-1}\subset\sigma^{n-l}$，則稱$\sigma^{n-l-1}$及$\sigma^{n-l}$為統一的$\sigma$

否則稱為矛盾的。

又若 $\sigma^{a} \subset \sigma^{n-1} \subset \sigma^{n}$，而 σ^{a} 不 $\subset (\sigma^{a+1}, \sigma^{a+2}, \ldots \sigma^{n-2})$ 則 σ^{a} 稱為不穩狀態，可用作決定第一否定及第二否定的標準。

又若 σ^{n-2} 為 $\sigma_{1}^{n-1}, \sigma_{2}^{n-1}, \cdots, \sigma_{r}^{n-1}$ 的公界，而其係數為 O，可知其歷史重心為散亂的。

2. 近似反映

孜証法的目的是把煩雜的材料，變換為真言真事。這種變換當然是一種反映。但其所得的結果，往往是近似的事實，因稱為近似反映。

近似反映既具歷史與數學的意義，那麼，便可用數學的方法來說明它。茲以 ξ 表口耳相傳的錯誤平均值，即得第一次可靠數 $1-\xi$，同理，可得第二次的可靠數為 $(1-\xi)^{2}$，逐次如斯，便得 η 次可靠數為 $(1-\xi)^{\eta}$。

言語傳播的可靠性，是依時間的增加而減少的，所以應用 Laurent 級數形式來表示：

$$f(t) = a_{o} + \frac{a_{1}}{t} + \frac{a_{2}}{t^{2}} + \cdots$$

當孜証法選取 m 個條件時，即得 m 個級數 $f_{i}(t)$，從而得重反映函數如次：

$$F(r, \xi) = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{i}(t) \ (1-\xi)^{i}}{m}$$

故當 $m \longrightarrow \infty$ 時，則 F 為無盡的集。但實際上 m 往往不是無盡，故其 F 為有盡的集。

3. 進化與退化

進化的意義可分為質與量兩種，萬事萬理之由簡單進至繁複，則為量的進化。又若由粗野進至文明，則為質的進化。現在我們要用數學的意義來取代這種歷史的意義，可得：

定義一：設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 各為簡練集，若 $A_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} A_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} A_3 \cdots \underset{\rightarrow}{\subseteq} A_n$, 則稱 $A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots A_n$ 為質的進化。

定義二：設 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1} \cdots, a_n$ 各為互不相同的元素，且在 $\left[a_1, a_2 \cdots a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \cdots a_n \right] = \left[a_1, a_2 \cdots a_{i-1}\ b\ a_{i+2} \cdots a_n \right]$ 時，若 $a_i \subset b$, $a_{i+1} \subset b$, 則為質的進化。

定義三：設 $A = \left[a_1\ a_2 \cdots a_m \right]$, $B = \left[b_1\ b_2 \cdots b_n \right]$ 則 $C = \left[a_1\ a_2 \cdots a_m\ b_1\ b_2 \cdots b_n \right]$ 為量的進化。

關于上述的退化意義，不難反求而得。

茲設 a_i 為集 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 中任一元素，χ_i 為集 $X' = (\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_w) \subset X$ 中任一元素，若所有 $a_i\ \chi_j$ 成 X; 並設 b_i 為集 $B = (b_1, b_2, \cdots b_l)$ 中任一元素，所有 $b_i\ \chi_j$ 成 X, 且 $l < N < m < P < n$; 則 $A \longrightarrow B$ 為質的進化，而 $B \longrightarrow A$ 為質的退化。（n 為 x 的元素數目）

當多心反映時，則 A, B 應擴充為反映集。

$F = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 及 $G = (g_1, g_2, \cdots, g_l)$, $X' = (\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_w) \subset X$, 因此，當所有 $f_i\ \chi_j$ 成 X 及

$g_i\ \chi_j$ 成X時（$I<N<m<P<n$）則知 $F \longrightarrow G$ 為質的進化，而 $G \longrightarrow F$ 為質的退化。

設 $A \equiv (a_1, a_2, \cdots, a_m)$，$B \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_m)$，當所有 $\{a_i\ x_j\}$ 成 X，而所有 $\{b_i\ x_j\} \supset X$ 時，則知 $A \to B$ 為量的進化。同樣，當 $F \equiv \{f_1, f_2, \cdots, f_l\}$，$G \equiv \{g_1, g_2, \cdots, g_l\}$ 時，所有 $\{f_i\ \chi_j\} \equiv X$，及所有 $\{g_i\ \chi_j\} \supset X$，則 $F \to G$ 為量的進化，而 $G \to F$ 為量的退化。

設所有 $\{f_i\ \chi_j\}$ 成 X，及所有 $\{g_i\ \chi_j\}$ 成 X，則 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 及 $\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ 是同時的。

設兩複合形：$(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r) \subset (\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_l, \cdots \chi_n)$ $A \equiv (a_1, a_2, \cdots, a_N)$，及 $B \equiv (b_1, b_2, \cdots, b_p)$（$N<P$）均為反映函數，當複合形 $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r)$ 經A及B反映後所得之兩複合形 $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_l, \cdots, \chi_n)$，不僅項點相同，且相當界面亦相同，及界面之次序位置亦相同。則 $A \to B$ 稱為質的進化，反之，$B \to A$ 稱為質的退化。

$$(f_i \circ g_j \circ h_k \circ \cdots \circ y_l)(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m) \longrightarrow$$

$$[(f_i\ \chi_1), (g_j\ \chi_2), \cdots (y_l\ \chi_m)] \equiv (y_1, y_2, \cdot\ y_m)$$

且 $|i+j+k+\cdots+l| \leqq N$，則 $(f \circ g \circ h \circ \cdots \circ y)$ 稱為輪迴反映函數。

此係由許多元素 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ 等所組成的集，$f, g, h, \cdots, y$ 等各為對于某特殊元素會生影響的函數，$i, j, \cdots, l$ 等稱為某階段中各函數之指數。例如把 f 從 o 至僅小于N間分成若干段落，其在第 i 段落中則為 f_i，因此，$f, g, h, \cdots, y$ 各函數中

指數之升降顯然在循環中。

在這裏，我們可以看出當 f 為 f_N 時，則 $g, h, \cdots, y$ 等指數不能不降為 0，又當 f 之指數降低時，則在 $g, h, \cdots, y$ 中至少有一個函數之指數升高，當 f 之指數為 0 時，則各函數之指數可以升高，但亦可為 0，至其總和則須 $\leqq N$，各指數間乃有升降，亦係彼此間互相循環而已。

4. 繪畫變換

繪畫是把實物變換為畫面的一種變換，它不是一個單獨的變換，而是變換的乘積。

自然環境是本空間，畫面是象空間，而在這兩空間之中更有一個概念空間存在，這概念空間决不是實物而係主觀意識。它是把本空間 S 變換為主觀意識 $f_1(S)$，此卽美的主要作用。然後再從技術的變換作用，把象空間 $f_2 f_1(S)$ 表現出來。

我們知道顏色是易于感受的，因此，我們可用心理學實驗的方法去測定各人對于顏色感應的速率和愛惡的情況而求其反應函數 $\mu_1(t)$，其次更求其形狀之反應函數 $\mu_2(t)$，餘則類推，直至求盡為止。因得反應函數集，那麼，便可以此集為基礎，進求函數複合形：

$$f_1 \equiv (a_1\mu_1, a_2\mu_2, \cdots, a_m\mu_m)\ (a_1, a_2, \cdots = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

此函數 f_1 的作用卽反映其主觀意識。

接着的問題便是怎樣把色光形態各情調誇張歪曲而為畫面，這便是第二反映函數 f_2 了。當除去複合形 f_1 中之為 0 的係數 a_i 後便可進求其第一級界面 ∂f_1 中為 0 之係數，以至第二級界面 $\partial^2 f_1$，第三級界面 $\partial^3 f_1$，……等為 0 之係數，更須除去與

畫法畫理中不合之係數，而最終則用技術的條件而使之成為新項點，即得新的複合形，此新複合形實可解釋為畫面中任何意義。

設除去各級為0的係數之項點為：$a_1\mu_1, a_2\mu_2, \cdots, a_r\mu_r$，技術上新添的項點為：$b_1\lambda_1, b_2\lambda_2, \cdots, b_c\lambda_c$，故得畫面複合形為：

$$f_2f_1 \equiv (a_1\mu_1, a_2\mu_2, \cdots a_r\mu_r; b_1\lambda_1, b_2\lambda_2, \cdots, b_c\lambda_c)$$

5. 反映出函數之和積公式

反映函數有兩種形式，即和與積，例如：

$$F(x) \equiv f_1(x) + f_2(y) + \cdots + f_m(z),$$

表 m 維空間的變換，即X點的坐標為：$x, y, \cdots, z$，當其變換為 $F(x)$ 時，其坐標則為：$f_1(x), f_2(y), \cdots, f\ (z)$

就變換的次序來說，它們都是同時的，彼此間沒有先後次序的意義。

至於積的公式則為：

$$F(x) \equiv f_1f_2\cdots f_m(x)$$

其變換的次序不是同時的，而是有先後次序的。起初為 f_m，次為 $f_{m-1}, \cdots$，最終至 f_1 為止，其間次序固有先後而不可凌亂的。

a）在乘積 $F = f_1 f_2 \cdots f_m$ 中，可知 $m \geqq l$，故 m 可以為無盡的。

b）在乘積 $F = f_1 f_2 \cdots f_m$ 中，若 $f' = f_i f_{i+1}$，則得 $F = f_1 \cdots f_{i-1} f' f_{i+2} \cdots\cdots$.

c）若 $f' = f_i \cdots f_l$，則 $F = f_1 \cdots f_{i-1} f' f_{l+1} \cdots f_m$.

d）設z在A,B兩集中間，且z不$\in A\cup B$，又$F: A\to B$，則必有另一集Z存在，使$F=f_1 f_2$且$f_2: A\to Z$及f_i：$Z\to B$及$z\in Z$.

e）設我們由集A出發，選出一個函數中心f; $A\to Z_1$次再選出另一函數中心g使$Z_1\to Z_2$，逐次如斯，便得函數中心 h，…，l使$Z_2\to Z_3$，…，最終得：$l\ldots hgf$：

$A\xrightarrow{f} Z_1\xrightarrow{g} Z_2\xrightarrow{h}\ldots Z_n\xrightarrow{l} B$ 因得F的變換可任以乘積$l\ldots hgf$來表示。

這個作法，可見任何作家當其從事寫作或創造時，起初其法非常紛亂，至其成功，而又變為簡單的方法。

6. 一個意識之能由模糊的影象進而為明顯的概念，其進展的情狀可以一方法集來表示。

若把意識的情狀視為一個曲面，則當所認識的內容僅取三點時，那麼，以這三點所作的圓周來代表整個的曲面，當然偏差太大，因此，所表的意識自極模糊。但若取得表面上五點時，則此五點也不過表示一條曲線，那麼，以這樣簡單的曲線，當然不克代表整個曲面，假使勉强取用，那麼，所表的意識也是不很顯明的。

可見表面的點數，實係抓住意識的條件，有了三點，便有了三個條件，因而决定了反映函數f_1。有了五點，便有了五個條件，因而决定了反映函數f_2。逐次如斯，當有了n點時，那麼，便有了n個條件，從而决定反映函數f_n。故得：$f_1, f_2,\ldots f_n$所成的方法集。

當$n\to\infty$時，則此集為無盡集，故所表之意識也是永不顯

明的，而係近於幻想的。

上述係利用代數曲面來表現意識，但若不用代數曲面來表示時，那麼，只好求諸 Hausdorff 空間了。

a) $(f\cup g)(\chi_1,\chi_2\cdots,\chi_l)=f(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup g(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

証：$(f\cup g)(\chi_1,\chi_2\cdots,\chi_l)=[(f\cup g)\chi_1,(f\cup g)\chi_2,\cdots,(f\cup g)\chi_l]$

$=[f\chi_1\cup g\chi_1,f\chi_2\cup g\chi_2,\cdots,f\chi_l\cup g\chi_l]$

$=[(f\chi_1,\ f\chi_2,\cdots,\ f\chi_l)\cup(g\chi_1,\ g\chi_2,\cdots,g\chi_l)]$

$=f(\chi_1,\ \chi_2,\cdots,\chi_l)\cup g(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

b) $(f\cap g)(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)=f(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cap g(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

証：$(f\cap g)(\chi_1,\chi^2,\cdots\chi_l)=[(f\cap g)\chi_1,(f\cap g)\chi_2,\cdots,(f\cap g)\chi_l]$

$=[f\chi_1\cap g\chi_1,f\chi_2\cap g\chi_2,\cdots,f\chi_l\cap g\chi_l]$

$=(f\chi_1,f\chi_2\cdots f\chi_l)\cap(g\chi_1,\ g\chi_2,\cdots,\ g\chi_l)$

$=f(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cap g(\chi_1,\chi,\cdots,\chi_l)$

由此看來，(a) 式實與曲面中函數加法相當，而 (b) 式則與函數乘法相當。同樣，可得：

(c) $(f\cup g)(f'\cup g')=ff'\cup gf'\cup g'f\cup gg'$

証：$(f\cup g)(f'\cup g')(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

$=(f\cup g)[f'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup g'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)]$

$=f[f'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup g'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)]$

$\cup g[f'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup g'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)]$

$=[ff'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup fg'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)]$

$\cup[gf'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup gg'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)]$

$=ff'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup fg'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

$\cup gf'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)\cup gg'(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l)$

(d) $(f\cap g)\cap(f'\cap g') = ff'\cap gf'\cap g'f\cap gg'$

(e) $(f\cup g)^n = f^n\cup nf^{n-1}g\cup \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{n-2}g^2\cup\cdots\cup g^n$

(f) $(f\cap g)^n = f^n\cap nf^{n-1}g\cap \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{n-2}g^2\cap\cdots\cap g^n$

第二章　反映中心

1. 反映意義的翻譯

同為物理現象，可分為光、聲、熱、電等部門；同為經濟現象，又可分為資本經濟，商業經濟，農業經濟，手工業經濟等等，這不僅是人意所欲，蓋亦係事物內在不變之至理。因此，我們若把一般事物分門別類，每門每類各有一個中心，故一切反映均屬多心反映。茲設多心函數集為：$U_1(t)$, $U_2(t)$, …, $U_r(t)$, 為簡單計，以 $U_1, U_2, \cdots, U_r$ 表之。

（註：t 表發展中之次序。）

設以 U_1, U_2, …, U_r 為軸，便得 r 維純史空間。設在純史空間上任取一點 $P(U_1, U_2, \cdots, U_r)$，則當 t 變動時，P 點之軌跡為複合形或曲面 $F(U_1, U_2, \cdots, U_r)$，此 F 為U之齊次坐標，必要時 U_i 實可用 Laurent 級數展開。

定義：$|t-t_o|<\delta$，$|U_i-U_i^0|<\delta'$（$i=0,1,2,\cdots$）使 $|F(t)-F(t_o)|<\xi$，（$\delta>0$，$\delta'>0$，$\xi>0$）則 $F(t)$ 稱為在 $U_1^\circ, U_2^\circ, \cdots, U_r^\circ$ 點連續。

定義：設F在某區內為連續，而在另一區內不連續，則稱F為局部連續。

1. 連續函數的象集之為連續，局部連續或不連續，則視其本空間之為連續，局部連續，或不連續而定。

2. 局部連續函數的本空間若為連續的，則其象空間亦為局部連續。

3. F的奇點數為函數集 $U_1, U_2, \cdots, U_r$ 的奇點數及諸 $\dfrac{1}{\Sigma U_1 U_2 \cdots U_i - A}$ 形式奇點數之和。

2. 幾個純史術語的解釋

設 $F_o(\chi, y, \cdots, z)$表在本空間上一個曲面，以 $f(u)$ 表由此曲面反映出來而得的一個象空間$F(\chi, y, \cdots z, u)$的函數，則此象空間表另一曲面 若在象空間上任取一點$P(\chi_i, y_i, \cdots z_i, u_i)$。那麼，P是合于F的了。若沒有P點，則F不克成立，反之，若沒有 F，則P點不能存在。又若所有的 i，都能使兩者相合時，則稱它們是統一的。

又 F 係因$P(\chi_i, y_i, \cdots, z_i, u_i)$的存在而存在的，但若有有限個的P不能滿足F時，這也就是說，當特別的P使F不克通過時，便發生矛盾了。就代數曲面的意義來說，這特別的P既不存在于F上，那麼，F因要維持其本身之存在不能不消除特別的P，而特別的P也要維持其本身的存在，不能不否定了原來的F，因此，造成了矛盾。

又當特別的 i 之數相當多，而要否定原來的F而組織新曲面時，這特別的P與F間便造成了對立的關係。

定義：設兩事物之關係是互相存在，則稱這兩事物是肯定的，以$A \| B$表之。

定義：設因A的存在，從而不許B的存在，則稱為A否定B。以$A \# B$表之。

定義：設所有的（χ_i, y_i, …, z_i, u_i）屬于F，即其矛盾數為O，則稱所有的（χ_i, y_i, …, u_i）具有統一性。

定義：設有許多（χ_i, y_i, …, z_i, u_i）不屬于F，即其矛盾數不為O而存在時，則稱所有的（χ_i, y_i, …, u_i）具矛盾性。

定義：設（χ_i, y_i, …, z_i, u_i）不屬于F係無盡的，且必有許多（x_i, y_i …, z_i, u_i,）$\subset F$ 是存在的，則稱所有的F（x_i, y_i …, z_i, u_i）為對立的。

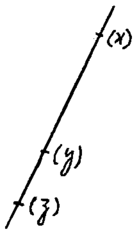
定義：設 $F_1, F_2, \cdots, F_j$ 為 F 中具有統一性的函數集，且 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_j$, 則稱 F_1 為 F 中最簡的統一性。

設有多元中心（f, g, …, h, l）對一本空間（χ_1, χ_2, …, χ_m）發生作用，而得象空間（$f\chi_1$, $g\chi_1$, … $h\chi_1$, $l\chi_1$; $f\chi_2$, $g\chi_2$, … $h\chi_2$ $l\chi_2$,……），若所有 $j\chi_i$ 均在象空間內，則顯然這象空間被任一元素所肯定。

又若有一個元素 $j\chi_i$ 不屬于象空間內，顯然 $j\chi_i$ 便否定了象空間。此外，若矛盾數為 O, 自然是統一的。同樣，可得矛盾及對立的意義。

又當各中心：f, g, …, h, l 均為連續時，則表象空間為連續。否則為不連續。

3. 長度空間



設 (x), (y), 及 (z), 為一枝射線上三點，z_i, y_i, x_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 為其坐標，且設(z)為反映中心，(y)為在本空間上一點，及 (x) 為在象空間上。則得：

$$\frac{x_i - z_i}{y_i - z_i} = f(u) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\therefore \chi_i = f(u)y_i - f(u)z_i + z_i$$
$$= [1-f(u)]z_i + f(u)y_i \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

定義：設(χ°)為 S_n 的定點，(χ^k)為 S_n 上的點列，若 $\left|\chi_i^\circ - \chi_i^k\right| < \xi$ ($\xi > 0$, i, $k = 1, 2, \cdots$)，則(χ°)稱為在 S_n 上連續點。

又當(χ°)為 S_n 上任意點時，則 S_n 稱為均勻連續。

(1)　(χ)之為連續的充要條件為：(y), (z) 及 f(u) 均連續。

(2)　(χ)之為均勻連續的充要條件為：(y), (z) 及 f(u) 為均勻連續。

由此可見純史現象的決定，決不是一個因素，而係由于現實界，反映函數，及反映中心如何而定。

(3)　設 (χ)及所有(χ^k) ($k=1, 2, \cdots m$)為 S 之子集，且 $\left|\chi_i - \chi_i^k\right| < \xi$ ($\xi > 0$) ($i=1, 2, \cdots n$)，則(χ^k)為(χ)的極限點。故(χ)成為閉集。又當(χ^k)不屬于(χ)，則(χ)成為開集。

(4) （χ）為一集，（$\chi°$）為一定點，如有一個 i 軸使 $\left| \chi_i - \chi_i^{\circ} \right| > C$，（C 為定數）則（$\chi°$）為非連續點。

(5) 奇點是永遠不能到達的幻想點，連續點是一個可能到達的理想點。

(6) 開集的極限點是幻想點，閉集的極限點是理想點。

(7) 啣接集經Laurent級數變換後，其象集為不啣接的。

因設 a 為啣接點，則其象點當為：

$$\chi_i = \cdots + \frac{1}{z_i - a_i} + \cdots$$

中，必有一個坐標 $a_i = z_i$（$i=1, 2, \cdots n$）則其象點為奇點，故不可啣接。又當其啣接點不只一點或成線段時，則其象點可以

$$\chi_i = \cdots + \frac{1}{z_i - < y_k <} + \cdots$$

變換之。式中 $< y_k <$ 表 y_k 之值大于定數而又小于另一定數。故係表象點在此線段內不存在的。

又 $\chi_i = z_i + \Sigma y_k$ $[\leq y_k \leq]$ 表其象點是存在于大小二定數之間。

由上所述，可知極限點與連續點在純史上的意義，要知歷史現象槪係連串產生，因若把這些現象列成一集，倘其中有一極限點而且這極限點係在集內，那麼，便表示了確有一個可以實現的目標。又若這極限點不在集內，那麼，便表示了這是永不能到達的目標，確係幻想。至若其係一孤立點時，則其近旁决無其他史實存在，而這種神話式的幻想條件，當然與真情實事越離越遠了。