依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

代數學

乙組用

下冊

榮方舟編著

商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

代數學

乙組用

下冊

榮方舟編著

商務印書館發行

目　錄

第十二章　指數論

第十三章　對　數

第十四章　對稱式
待定係數法　分項分式

第十五章　級　數

第十六章　比　比例

第十七章　變數法

第十八章　順列　組合　或然率

第十九章 數學歸納法

第二十章 二項式定理

第二十一章 複素數

第二十二章　行列式

第二十三章　一元高次方程式解法

第二十四章

一元三次四次方程式之通解

第十二章　指數論

§ 111. 指數意義之推廣　以前所謂指數,常專指正整數,蓋在

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots \quad [\text{共有 } n \text{ 個 } a \text{ 相乘}]$$

中,n 必爲正整數方有意義可言也.若指數非正整數時,究有何意義.而指數律諸公式,可以同樣適合.玆於以下數節中分別討論之.

§ 112. 負指數　依除法指數律

$$a^m \div a^n = a^{m-n},$$

若 $m=3$, $n=7$ 代入上式,則得

$$a^8 \div a^7 = a^{-4}.$$

然
$$a^3 \div a^7 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}.$$

故 a^{-4} 之意義應與 $\frac{1}{a^4}$ 同.

$$\therefore \quad a^{-4} = \frac{1}{a^4}.$$

同理
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

§113. 零指數 在公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 中,設 $m=n$,則得

$$a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0.$$

然 $$a^n \div a^n = 1.$$

故 a^0 之意義應爲1.

$$\therefore \quad a^0 = 1.$$

§114. 分指數 依乘法指數律 $(a^m)^n = a^{mn}$, 若 $mn=p$, 則 $m=\frac{p}{n}$. 代入上式,則得

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n = a^p.$$

然 $$(\sqrt[n]{a^p})^n = a^p.$$

故 $a^{\frac{p}{n}}$ 之意義應與 $\sqrt[n]{a^p}$ 同.

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

§115. 指數律適用於非正整指數 以上三種非正整指數,皆可應用指數律運算之.

(例一) $$3^{-2}\times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3 = 27.$$

[證] $$3^{-2}\times 3^5 = \frac{1}{3^2}\times 3^5 = 3^3 = 27.$$

(例二) $$(2^{-2})^{-3} = 2^{-2\times(-3)} = 2^6 = 64.$$

[證] $$(2^{-2})^{-3} = \frac{1}{(2^{-2})^3} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2^2}\right]^3} = \frac{1}{\frac{1^3}{2^6}} = 2^6 = 64.$$

(例三) $$2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$$

［證］ $2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}.$

（例四） $2^{-\frac{1}{5}}\times\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{-2}=2^{-\frac{1}{5}}\times 2^{\frac{2}{5}\times(-2)}=2^{-\frac{1}{5}}\times 2^{-\frac{4}{5}}=2^{-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}$

$$=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

［證］ $2^{-\frac{1}{5}}\times\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{-2}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{5}}}\times\dfrac{1}{\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\times\dfrac{1}{(\sqrt[5]{2^2})^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{2^4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{1}{2}.$$

注意：由以上諸例觀之，可見以負指數表分數，以分指數表不盡根數而直接應用指數律計算之，較前爲便利.

（例五） 簡約 $\dfrac{\sqrt{x^3}\times\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^2}\times\sqrt[4]{x^6}}.$

［解］ 原式 $=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\times y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{6}}\times x^{\frac{6}{4}}}=x^{\frac{3}{2}}\times y^{\frac{2}{3}}\times y^{-\frac{1}{3}}\times x^{-\frac{3}{2}}$

$$=x^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$=x^0y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{y}.$$

（例六） $a\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^3}\sqrt[4]{a^3}}=a[a^{-3}a^{\frac{3}{4}}]^{\frac{1}{4}}$

$$=a[a^{-3+\frac{3}{4}}]^{\frac{1}{4}}$$

$$=a\times a^{\left(-3+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}}$$

$$=a^{1+\frac{1}{4}\left(-3+\frac{3}{4}\right)}$$

$$=a^{1-\frac{9}{16}}$$

$$=a^{\frac{7}{16}}$$

$$=\sqrt[16]{a^7}.$$

(例七)　$(x^2+2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}=[(x+y)^2]^{\frac{3}{2}}=(x+y)^3.$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

注意：　$(a+b)^m\neq a^m+b^m$，故多項式有非正整指數時，亦當依乘方法，開方法展開之.

(例八)　$(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})$

$$=[(a^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{1}{3}})+(b^{\frac{1}{3}})^2][(a^{\frac{1}{3}})-(b^{\frac{1}{3}})]$$

$$=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3=a-b.$$

注意：　多項式相乘，仍須應用配分律.唯合於乘法公式者，亦可以公式求之.

(例九)　$(3x^{-1}+2y^{\frac{1}{2}})^4$

$$=(3x^{-1})^4+4(3x^{-1})^3(2y^{\frac{1}{2}})+6(3x^{-1})^2(2y^{\frac{1}{2}})^2$$

$$+4(3x^{-1})(2y^{\frac{1}{2}})^3+(2y^{\frac{1}{2}})^4$$

$$=81x^{-4}+216x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+216x^{-2}y^{\frac{1}{4}}+96x^{-1}y^{\frac{1}{8}}+16y^{\frac{1}{16}}$$

$$=\frac{81}{x^4}+\frac{216\sqrt{y}}{x^3}+\frac{216\sqrt[4]{y}}{x^2}+\frac{96\sqrt[8]{y}}{x}+16\sqrt[16]{y}.$$

習題三十六

簡約以下各式:—

1. $(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^5 \div (a^{-3}b^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}}$.

2. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \div (ab^{-7})^{\frac{1}{12}}$

3. $\sqrt[5]{\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \times b^{-2} \times c^3}{a^{-\frac{1}{3}} \times b^3 \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}}}$.

4. $\left\{\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{3}}} \times \dfrac{a^{-1}}{b^{\frac{5}{6}}} \div \dfrac{b^{-\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}\right\}^{-24}$.

5. $\left\{(xy^2)^3\left(\dfrac{x}{y}\right)^4\right\}^9 \div \left\{(x^2y)^4\left(\dfrac{y}{x}\right)^5\right\}^2$.

6. $\dfrac{4^n \times 6^5}{2^3 \times 12^n \times 3^{-n}}$.

7. $\dfrac{5^3 \times 2^{\frac{3}{4}} \times 10^{-\frac{1}{4}}}{15^{\frac{3}{4}} \times 6^{-\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{5}{8}}}$.

8. $\dfrac{15x^{m+n} \times 2x^{m-n}}{35x^{2m}}$.

9. $\dfrac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} \times \dfrac{1}{4^{-n}}$.

10. $\left(1\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(22\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

11. $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{4}{1+x}$.

12. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \times \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \times \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6$

13. $(x^{\frac{5}{6}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}})(3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}})$.

14. $(e^{-x} + e^{x})(e^{-x} - e^{x}) + (e^{x} + e^{-x})^2$.

15. $\dfrac{x - x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}y^{-1}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{3}}}$.

16. $\dfrac{x - 7\sqrt{x}}{x - 5\sqrt{x} - 14} \div \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$.

第十三章　對數

§116. 對數　甲數之x次冪等於乙數時,則此指數x名曰甲數爲底時乙數之對數.

設a, n, x三數有$a^x=n$之關係,則n曰a之x次冪;a曰n之x次冪根;而x則曰a爲底時n之對數.寫作$x=\log_a n$.故　$n=a^x$, $a=\sqrt[x]{n}$, $x=\log_a n$三個等式之意義相同.例如$8=2^3$, 即　$2=\sqrt[3]{8}$, 亦即$3=\log_2 8$.

(例一)　求2爲底時,32之對數.

〔解〕　因$32=2^5$.　$\therefore\quad \log_2 32=5$.

(例二)　求$\log_{27} 81$之值.

〔解〕　因$27=3^3, 81=3^4=(3^3)^{\frac{4}{3}}=(27)^{\frac{4}{3}}$.

$$\therefore\quad \log_{27} 81=\frac{4}{3}.$$

(例三)　求$\log_5 \frac{1}{125}$之值.

〔解〕　因$\frac{1}{125}=\frac{1}{5^3}=5^{-3}$.　$\therefore\quad \log_5 \frac{1}{125}=-3$.

習題三十七

求以下各值:—

1. $\log_{10} 100$.　　2. $\log_{10} 1000$.

3. $\log_3 27$.　　4. $\log_2 64$.

5. $\log_5 125$.　　6. $\log_7 7$.

7. $\log_{10} 1$.　　8. $\log_{10} 0.01$. $= -2$

9. $\log_{27} 3$.　　10. $\log_8 4$.

11. $\log_9 27$.　　12. $\log_{27} 9$.

13. $\log_{27} \frac{1}{3}$.　　14. $\log_8 \frac{1}{128}$.

15. $\log_{10} 0.0001$.　　16. $\log_{10} 0.00000001$.

§ **117. 對數律** 對數之運算應用,根據以下諸公式:—

公式一: $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$.

[證] 設 $\log_a m = x,\ \log_a n = y$.

則 $m = a^x,\ n = a^y$.

故 $mn = a^x \times a^y = a^{x+y}$.

即 $\log_a(mn) = x + y$.

故 $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$.

公式二: $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

[證] 由公式一, $\log_a p + \log_a n = \log_a pn$. 設 $pn = m$, 則 $p = \frac{m}{n}$, 代入上式,得

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)+\log_a n=\log_a m.$$

$$\therefore\quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n.$$

公式三: $\log_a(m^p)=p\log_a m.$

log a(m^p)
p log a m

[證] 由公式一, $\log_a(m_1 m_2)=\log_a m_1+\log_a m_2$, $\log_a(m_1 m_2 m_3)=\log_a(m_1 m_2)+\log_a m_3=\log_a m_1+\log_a m_2+\log_a m_3$. 同理推之,可得 $\log_a(m_1 m_2 m_3\cdots m_p)=\log_a m_1+\log_a m_2+\cdots\cdots+\log_a m_p$. 設 $m_1=m_2=\cdots=m_p=m$, 代入上式,即得

$$\log_a(m^p)=p\log_a m.$$

公式四: $\log_a(\sqrt[r]{m})=\frac{1}{r}\log_a m.$

log 1/2

[證] $r\log_a n=\log_a n^r$. 設 $n^r=m$, 則 $n=\sqrt[r]{m}$, 代入上式,得

$$r\log_a(\sqrt[r]{m})=\log_a m.$$

$$\therefore\quad \log_a(\sqrt[r]{m})=\frac{1}{r}\log_a m.$$

註: 公式四即公式三中 $p=\frac{1}{r}$, 即云公式三中之指數 p 可爲分數也. 當 p 爲負數或零時, 公式三均可適合. 學者試討論之.

(例一) 已知 $\log_{10}2=0.30103$, $\log_{10}3=0.47712$, 求 $\log_{10}12$ 之值.

[解]
$$\begin{aligned}\log_{10}12&=\log_{10}(2^2\times 3)=\log_{10}(2^2)+\log_{10}3\\&=2\log_{10}2+\log_{10}3\\&=2\times 0.30103+0.47712\\&=1.07918.\end{aligned}$$