

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學
教科書
代數
學

乙組用
下冊

第拾貳本

榮方舟編著
商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學
代數學

乙組用
下冊

榮方舟編著
商務印書館發行

目 錄

第十二章 指數論

111.	指數意義之推廣	185
112.	負指數	185
113.	零指數	186
114.	分指數	186
115.	指數律適用於非正整指數	186

第十三章 對 數

116.	對數	191
117.	對數律	192
118.	常用對數 真數	195
119.	常用對數之特長	195
120.	大於1 小於10 諸數之對數 對數表	197
121.	任意正數之對數	198
122.	定位部與定值部	199
123.	求真數法	200

124.	應用對數計算近似值法	201
125.	對數換底公式	205
126.	指數方程式	206

第十四章 對稱式

待定係數法 分項分式

127.	對稱式	209
128.	非對稱形之對稱式	210
129.	對稱式之應用	211
130.	待定係數法	217
131.	分項分式	222

第十五章 級數

132.	級數	226
133.	級數之計算	226
134.	等差級數 ($A. P.$)	232
135.	等比級數 ($G. P.$)	236
136.	調和級數 ($H. P.$)	241
137.	中項	243
138.	無限級數之和	244

139.	$G. P.$ 中 $r < 1$ 時 S_n 之公式	246
------	-------------------------------	-----

第十六章 比 比例

140.	比	249
141.	複比	249
142.	二乘比 三乘比	250
143.	反比	250
144.	比例式	252
145.	比例中項	253
146.	比例之重要定理	253

第十七章 變數法

147.	正變	258
148.	反變	258
149.	聯變	258
150.	互變之量	258
151.	變數法之應用	259

第十八章 順列 組合 或然率

152.	基本定理	262
153.	順列	263

154.	重複順列	264
155.	同物順列	264
156.	組合	266
157.	或然率	269

第十九章 數學歸納法

158.	數學歸納法	272
------	-------------	-----

第二十章 二項式定理

159.	二項式之 n 次冪	276
160.	$(a+b)^n$ 之公項	278

第二十一章 複素數

161.	複素數	281
162.	複素數之基本運算	281
163.	複素數爲零之定義	282
164.	複素數之圖形表示法	285
165.	和與差之圖形表示	285
166.	極坐標表法	287
167.	積與商之圖形表示	288
168.	複素數之冪及冪根	291

第二十二章 行列式

169. 行列式	295
170. 二級行列式	295
171. 三級行列式	297
172. 高級行列式	301
173. 逆式	302
174. n 級行列式之展式	303
175. 關於行列式之定理	305
176. 子行列式	309

第二十三章 一元高次方程式解法

177. 一元高次方程式	316
178. 方程式根之個數	317
179. 重根	318
180. 根與係數之關係	318
181. 求方程式整根法 嘗試法	321
182. 改變方程式法一 倍根法	323
183. 笛卡兒符號律	325
184. 改變方程式法二 減根法	329

185. 根之位置觀察331
186. 求無理根近似值法 Horner's 法332

第二十四章

一元三次四次方程式之通解

187. 以代數式表根339
188. 一元三次方程式通解339
189. 一元四次方程式通解343

第十二章 指數論

§ 111. 指數意義之推廣 以前所謂指數,常專指正整數,蓋在

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots \cdots \quad [\text{共有 } n \text{ 個 } a \text{ 相乘}]$$

中, n 必爲正整數方有意義可言也. 若指數非正整數時,究有何意義而指數律諸公式,可以同樣適合. 茲於以下數節中分別討論之.

§ 112. 負指數 依除法指數律

$$a^m \div a^n = a^{m-n},$$

若 $m=3, n=7$ 代入上式,則得

$$a^3 \div a^7 = a^{-4}.$$

然
$$a^3 \div a^7 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}.$$

故 a^{-4} 之意義應與 $\frac{1}{a^4}$ 同.

$$\therefore a^{-4} = \frac{1}{a^4}.$$

同理

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

§ 113. 零指數 在公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 中, 設 $m=n$, 則得

$$a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0.$$

然

$$a^n \div a^n = 1.$$

故 a^0 之意義應為 1.

$$\therefore a^0 = 1.$$

§ 114. 分指數 依乘法指數律 $(a^n)^m = a^{mn}$, 若 $mn=p$, 則 $m = \frac{p}{n}$. 代入上式, 則得

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n = a^p.$$

然

$$(\sqrt[n]{a^p})^n = a^p.$$

故 $a^{\frac{p}{n}}$ 之意義應與 $\sqrt[n]{a^p}$ 同.

$$\therefore a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

§ 115. 指數律適用於非正整指數 以上三種非正整指數, 皆可應用指數律運算之.

(例一) $3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3 = 27.$

[證] $3^{-2} \times 3^5 = \frac{1}{3^2} \times 3^5 = 3^3 = 27.$

(例二) $(2^{-2})^{-3} = 2^{-2 \times (-3)} = 2^6 = 64.$

[證] $(2^{-2})^{-3} = \frac{1}{(2^{-2})^3} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2^2}\right]^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 2^6 = 64.$

(例三) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$

$$[\text{證}] \quad 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$$

$$\begin{aligned} (\text{例四}) \quad 2^{-\frac{1}{5}} \times (2^{\frac{2}{5}})^{-2} &= 2^{-\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{2}{5} \times (-2)} = 2^{-\frac{1}{5}} \times 2^{-\frac{4}{5}} = 2^{-\frac{1}{5} - \frac{4}{5}} \\ &= 2^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{證}] \quad 2^{-\frac{1}{5}} \times (2^{\frac{2}{5}})^{-2} &= \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} \times \frac{1}{(2^{\frac{2}{5}})^2} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \times \frac{1}{(\sqrt[5]{2^2})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

注意：由以上諸例觀之，可見以負指數表分數，以分指數表不盡根數而直接應用指數律計算之，較前為便利。

$$(\text{例五}) \quad \text{簡約} \quad \frac{\sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^2} \times \sqrt[4]{x^6}}$$

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad \text{原式} &= \frac{x^{\frac{3}{2}} \times y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{6}} \times x^{\frac{6}{4}}} = x^{\frac{3}{2}} \times y^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{3}{2}} \\ &= x^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= x^0 y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{例六}) \quad a^4 \sqrt{\frac{1}{a^3} \sqrt[4]{a^3}} &= a[a^{-3} a^{\frac{3}{4}}]^{\frac{1}{4}} \\ &= a[a^{-3 + \frac{3}{4}}]^{\frac{1}{4}} \\ &= a \times a^{(-3 + \frac{3}{4}) \times \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$= a^{1+\frac{1}{4}(-3+\frac{3}{4})}$$

$$= a^{1-\frac{9}{16}}$$

$$= a^{\frac{7}{16}}$$

$$= \sqrt[16]{a^7}.$$

$$\begin{aligned} \text{(例七)} \quad (x^2 + 2xy + y^2)^{\frac{3}{2}} &= [(x+y)^2]^{\frac{3}{2}} = (x+y)^3. \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

注意： $(a+b)^m \neq a^m + b^m$ ，故多項式有非正整指數時，亦當依乘方法，開方法展開之。

$$\begin{aligned} \text{(例八)} \quad (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) \\ = [(a^{\frac{1}{3}})^2 + (a^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{1}{3}}) + (b^{\frac{1}{3}})^2][(a^{\frac{1}{3}}) - (b^{\frac{1}{3}})] \\ = (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 = a - b. \end{aligned}$$

注意：多項式相乘，仍須應用配分律。唯合於乘法公式者，亦可以公式求之。

$$\begin{aligned} \text{(例九)} \quad (3x^{-1} + 2y^{\frac{1}{2}})^4 \\ = (3x^{-1})^4 + 4(3x^{-1})^3(2y^{\frac{1}{2}}) + 6(3x^{-1})^2(2y^{\frac{1}{2}})^2 \\ + 4(3x^{-1})(2y^{\frac{1}{2}})^3 + (2y^{\frac{1}{2}})^4 \\ = 81x^{-4} + 216x^{-3}y^{\frac{1}{2}} + 216x^{-2}y^{\frac{1}{4}} + 96x^{-1}y^{\frac{3}{8}} + 16y^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{81}{x^4} + \frac{216\sqrt{y}}{x^3} + \frac{216\sqrt[4]{y}}{x^2} + \frac{96\sqrt[8]{y}}{x} + 16\sqrt{y}. \end{aligned}$$

習題三十六

簡約以下各式：一

$$1. (a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^5 \div (a^{-3}b^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}.$$

$$2. \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \div (ab^{-7})^{\frac{1}{12}}$$

$$3. \sqrt[5]{\frac{a^{\frac{1}{2}} \times b^{-2} \times c^3}{a^{-\frac{1}{3}} \times b^3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{c}}}}$$

$$4. \left\{ \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{-1}}{b^{\frac{5}{6}}} \div \frac{b^{-\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}} \right\}^{-24}.$$

$$5. \left\{ (xy^2)^3 \left(\frac{x}{y}\right)^4 \right\}^9 \div \left\{ (x^2y)^4 \left(\frac{y}{x}\right)^5 \right\}^2.$$

$$6. \frac{4^n \times 6^5}{2^3 \times 12^n \times 3^{-n}}.$$

$$7. \frac{5^3 \times 2^{\frac{3}{4}} \times 10^{-\frac{1}{4}}}{15^{\frac{3}{4}} \times 6^{-\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{5}{8}}}.$$

$$8. \frac{15x^{m+n} \times 2x^{m-n}}{35x^{2m}}.$$

$$9. \frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} \times \frac{1}{4^{-n}}.$$

$$10. \left(1\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(22\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$11. \frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+x}.$$

$$\sqrt{12. \left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \times \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \times \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6}$$

$$13. (x^{\frac{5}{6}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}})(3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}).$$

$$14. (e^{-x} + e^x)(e^{-x} - e^x) + (e^x + e^{-x})^2.$$

$$15. \frac{x - x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}y^{-1}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{3}}}.$$

$$16. \frac{x - 7\sqrt{x}}{x - 5\sqrt{x} - 14} \div \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1} :$$

第十三章 對數

§ 116. 對數 甲數之 x 次冪等於乙數時, 則此指數 x 名曰甲數爲底時乙數之對數.

設 a, n, x 三數有 $a^x = n$ 之關係, 則 n 曰 a 之 x 次冪; a 曰 n 之 x 次冪根; 而 x 則曰 a 爲底時 n 之對數. 寫作 $x = \log_a n$. 故 $n = a^x$, $a = \sqrt[x]{n}$, $x = \log_a n$ 三個等式之意義相同. 例如 $8 = 2^3$, 即 $2 = \sqrt[3]{8}$, 亦即 $3 = \log_2 8$.

(例一) 求 2 爲底時, 32 之對數.

[解] 因 $32 = 2^5$. $\therefore \log_2 32 = 5$.

(例二) 求 $\log_{27} 81$ 之值.

[解] 因 $27 = 3^3$, $81 = 3^4 = (3^3)^{\frac{4}{3}} = (27)^{\frac{4}{3}}$.

$$\therefore \log_{27} 81 = \frac{4}{3}.$$

(例三) 求 $\log_5 \frac{1}{125}$ 之值.

[解] 因 $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$. $\therefore \log_5 \frac{1}{125} = -3$.

習題三十七

求以下各值:—

- | | |
|--|---|
| 1. $\log_{10} 100.$ | 2. $\log_{10} 1000.$ |
| 3. $\log_3 27.$ | 4. $\log_2 64.$ |
| 5. $\log_5 125.$ | ✓ 6. $\log_7 7.$ |
| 7. $\log_{10} 1.$ | 8. $\log_{10} 0.01 = -2$ |
| 9. $\log_{27} 3.$ | ✓ 10. $\log_3 4.$ |
| 11. $\log_9 27.$ | 12. $\log_{27} 9.$ |
| 13. $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ | ✓ 14. $\log_3 \frac{1}{128} = -\frac{5}{3}$ |
| 15. $\log_{10} 0.0001.$ | 16. $\log_{10} 0.00000001.$ ✓ |

§ 117. 對數律 對數之運算應用, 根據以下諸公式:—

公式一: $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n.$

[證] 設 $\log_a m = x, \log_a n = y.$

則 $m = a^x, n = a^y.$

故 $mn = a^x \times a^y = a^{x+y},$

即 $\log_a(mn) = x + y.$

故 $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n.$

公式二: $\log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n.$

[證] 由公式一, $\log_a p + \log_a n = \log_a pn.$ 設 $pn = m$, 則

$p = \frac{m}{n}$, 代入上式, 得

$$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) + \log_a n = \log_a m.$$

$$\therefore \log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n.$$

公式三: $\log_a(m^p) = p \log_a m.$

[證] 由公式一, $\log_a(m_1 m_2) = \log_a m_1 + \log_a m_2$,
 $\log_a(m_1 m_2 m_3) = \log_a(m_1 m_2) + \log_a m_3 = \log_a m_1 + \log_a m_2 + \log_a m_3$. 同理推之, 可得 $\log_a(m_1 m_2 m_3 \cdots m_p) = \log_a m_1 + \log_a m_2 + \cdots + \log_a m_p$. 設 $m_1 = m_2 = \cdots = m_p = m$, 代入上式, 即得

$$\log_a(m^p) = p \log_a m.$$

公式四: $\log_a(\sqrt[r]{m}) = \frac{1}{r} \log_a m.$

[證] $r \log_a n = \log_a n^r$. 設 $n^r = m$, 則 $n = \sqrt[r]{m}$, 代入上式, 得

$$r \log_a(\sqrt[r]{m}) = \log_a m.$$

$$\therefore \log_a(\sqrt[r]{m}) = \frac{1}{r} \log_a m.$$

註: 公式四即公式三中 $p = \frac{1}{r}$, 即云公式三中之指數 p 可為分數也. 當 p 為負數或零時, 公式三均可適合. 學者試討論之.

(例一) 已知 $\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$, 求 $\log_{10} 12$ 之值.

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad \log_{10} 12 &= \log_{10}(2^2 \times 3) = \log_{10}(2^2) + \log_{10} 3 \\ &= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 2 \times 0.30103 + 0.47712 \\ &= 1.07918. \end{aligned}$$