



方 磊 编 著

自然辩证法 与中学数学



陕西科学技术出版社

自然辩证法与中学数学

方 磊 编著

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 80,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—3,500

统一书号: 7202·86 定价: 0.38 元

序

当前的中学数学教育中，大家都在探讨如何培养和提高学生能力的问题。我们认为，这里面关键的一点是教育者必须有一个科学的教学思想，必须能在自然辩证法的指导下，认识和总结出中学数学里的一些基本规律，能从“联系”和“转化”的角度来钻研、安排、处理中学数学的各个分支和课题，教育者站的高了，受教育者才能得到相应的提高。

在这方面，作者结合自己近二十年的教学实践，作了一些可喜的尝试。他试着用自然辩证法的思想来寻找和归纳出中学数学教材中的某些带规律性的东西；试着分析了一些数学课程里存在的辩证思想；注意了中学数学各平行分支间的联系及其在“一定条件”下的转化等等。收在本书中的二十余篇文字，思想比较活，立意比较新，讲数学深入浅出，讲哲学通俗易懂，读后对我们从事中学数学教育和辩证法普及工作的同志会是有所启发的。

李珍焕、梁慧中

一九八一年二月于西安

目 录

序.....	李珍煥、梁慧中
自然辩证法是学习自然科学唯一正确的指导思想.....	(1)
中学数学中充满着辩证法.....	(4)
在中学阶段渗透自然辩证法思想的重要意义.....	(8)
零的丰富内容	
——不能“遗忘”数的物质性.....	(11)
负数浅谈	
——正和负的对立统一及负数在数域开拓中的促进作用.....	(15)
有理数和无理数	
——人们总是通过有限来认识无限的.....	(19)
运算法则的发展	
——谈谈否定之否定规律.....	(23)
“1”与“多”的相互包含.....	(27)
位数概念的推广	
——这样可以简化常用对数的性质.....	(30)
函数概念的理解	
——它们是一对矛盾.....	(34)
不等式和方程	
——相等和不等、一般和特殊之间的辩证关系.....	(38)
函数与图象	
——要重视同一内容不同形式间的联系和转	

化	(45)
三角形里的辩证法	
——决定因素, 特殊与一般, 本质与现象	(50)
概念和感觉	
——感性知识的“飞跃”, 产生概念	(58)
万能公式的启发	
——再谈事物的特殊性和一般性	(63)
三角诱导公式的归纳	
——找出规律性的东西才能由特殊到一般	(69)
解不定方程的启发	
——抓“特殊性”是解决问题的关键	(74)
抛物线	
——谈“取得支配地位的矛盾的主要方面”	
和量变质变规律	(78)
椭圆和圆	
——量变质变规律及特殊和一般的辩证关系	(82)
双曲线和直线	
——“在一定条件下, 直线和曲线应当是一回事”	(86)
如何看待复数	
——数的发展道路上的必然产物	(91)
谈解题的思想方法	(96)
杠杆及其使用范围	
——再谈解题思想方法中抓矛盾的转化	(108)
用自然辩证法思想认识中学数学的规律	(113)
后记	(121)

自然辩证法是学习自然科学 唯一正确的指导思想

马克思和恩格斯创立的唯物辩证法为我们提供了人类历史上最科学的认识方法。这种方法不但使我们正确地认识了人类社会的各种现象和它的发展的全部历史，也使我们能够比较客观地、比较本质地认识自然界的各种现象和规律。而自然辩证法，正是运用唯物辩证法来研究自然界和各门自然科学发展规律的一种正确的思想和方法。因之，学习、研究自然科学的各门课，应当以自然辩证法为自己的指导思想。

无论古今中外的科学家和在自然科学的各个方面有突破能力、有所成就的人，都是自觉或不自觉地把自然辩证法的思想作为指导思想，并运用辩证法的方法进行研究而得到成果的，包括那些在世界观和哲学思想上属于唯心主义体系而在自然科学研究上却具有辩证思想的人在内。

这样的例子，是很多的。

古代的，如中国数学家刘徽(公元三世纪)和祖冲之(公元五世纪)求圆周率所应用的“割圆术”，就是用折线逼近

曲线，应用有限量（圆周长）的无限可分（表示为边数无限的圆内接正多边形边长之和），而让“无限”来表现“有限”的，这是古人具有辩证思想的很好例证。

近代的，如俄国化学家门捷列夫，在研究元素性质的时候，意识到同一个元素在两个方面的表现——它的质量和化学性质之间，一定存在着内在的联系，从而在进行了大量的艰巨的运算之后，发现了元素化学性质周期出现的重要规律，创立了元素周期表。再如法国工人出身的物理学家法拉第，在别人发现了电流产生磁场的现象之后，产生了“既然电流能转化成磁，磁也一定可以转化成电流”的想法，从而经过多年的试验，终于发现了导线切割磁力线时，便能产生感应电流的现象，并制成了世界上第一架磁感应发电机。

这样的例子，在近现代的科技史上比比皆是，数不胜数，证明了辩证法对于自然科学的巨大威力。在这一方面，新中国的科学家更有着得天独厚的优越条件，因为毛主席的一系列哲学著作，对对立统一规律，量变质变规律等辩证法的基本规律作了空前深刻的揭示和精辟的分析。在毛主席哲学思想的指导下，数学家杨乐和张广厚在函数论研究中，一反前人把“亏值”和“奇异方向”两个概念分割开来单独研究的传统，认识到两个概念正好构成既对立又统一的一对矛盾，而从研究两者的必然联系着手，揭示了其中的奥秘，求出了“亏值”数目和“奇异方向”数目之间的数量关系式，取得了超越前人的成绩。

当前中学数学教育中，存在着一个普遍问题是学生记了不少定理、公式，即学了不少数学知识，但缺少运用这些知识去解决实际问题的能力，甚至面对一些构题灵活，稍带综合

性的习题时就束手无策。也就是通常所说的知能脱节问题。这除了对概念理解不深，基本运算能力稍差等因素之外，最主要的原因是思想方法里缺少辩证的思想，总是习惯于割裂地，不从联系和转化入手来理解概念和方法造成的。倘若我们注意到这一点，有意地向学生渗透自然辩证法的思想，强调数的物质性和抽象性的对立统一；强调不同概念之间的联系和转化的条件；强调数和形的统一及其转化；强调中学数学各分支的相互穿插和综合应用，提倡一题多解，提倡寻求最优解等等，那末，这个问题是可以解决的。培养、提高学生运用知识的能力，才是数学教育的首要目的，那种停留在仅仅传递了知识的教学方式，是很不符合数学教学的根本要求的。

因之，自然辩证法的思想不但是学习和研究自然科学唯一正确的指导思想，同时也是数学教育工作者为了提高学生能力，提高教学质量必须掌握的科学思想。

中学数学中充满着辩证法

中学数学的每一个概念，几乎都存在另一个概念与之相对立，比如，加和减，乘和除，有和无，整数和分数，正数和负数，有理数和无理数，实数和虚数，相等和不相等，方程和不等式，有限和无限，自变量和因变量，函数和曲线，曲线和直线，平行和相交，乘方和开方，指数和对数，幂指数和根指数，函数和反函数，和差化积和积化和差等等，真是枚不胜举。这一对对概念的“对立”，即两者之间的差异，是如此明显。但是，这一对对“截然不同”的概念，又如何是“同一的”呢？这个问题就是自然辩证法所要探讨的主要内容。

列宁说：“辩证法是这样的一种学说，它研究对立是怎样能够是同一的，（怎样变成同一的）——在怎样的条件下它们互相转化，成为同一的——为什么人的头脑，不应当把这些对立看作死的凝固的东西，而应当看作生动的、有条件的、可变动的、互相转化的东西”（列宁《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》）。如果我们学一点辩证法，上面这个问题，

就不难回答了。比如，加和减，对小学生来说，简直是截然不同的两回事，而在学了负数，把数域开拓到有理数数域以后，我们知道，减去一个数等于加上这个数的相反数，即 $a - b = a + (-b)$ ，在这里，加和减的“对立”消失了，它们在有理数四则运算里简直成了“一回事”，在掌握了“相反数”这个概念后，它们可以互相转化，这种既对立又统一，并且在一定条件下，可以互相转化的关系就是加和减“同一性”的含义。又如，一元二次方程和一元二次不等式，一个是含有未知数的式子等于 0，一个是不等于 0，差异是如此明显，但在研究函数时，这个差异的含义仅仅是函数值处于不同的数值上而已。显然，方程和不等式之间存在着特殊和一般的辩证关系，不等式的性质（一般性）寓于方程的性质（特殊性）之中。很显然，中学数学里充满了“具有同一性的对立”，充满了对立的一方，在“一定的条件”下向另一方转化的生动例子。

一般地说，主要研究变量的高等数学里充满了辩证法，充满了具有同一性的对立，这是比较清楚的，微分和积分就是一个典型的例子。而中学数学的主要部分是初等数学，主要研究的是常量，那末，初等数学的不同概念之间是否就互不联系，互不相关了呢？是否就不能在一定的条件下互相转化了呢？比如本节开始提到的那些对立的观念是否都只有“对立”，而没有“同一”了呢？是否不存在使对立的一方向另一方转化的“一定的条件”了呢？上面所举的两个例子已经可以说明，实际情况远非如此。

而且，我们知道，研究一个既不能变化，也不能参加任何运算的孤立的凝固的常量是没有什么意义的，研究几个，

或许多常量之间的关系和它们之间可能出现的各种运算及其规律，才是有意义的，而这却又是千变万化的。况且，数量的不变，只能是暂时的，有条件的，而变化，即运动却是绝对的，无条件的。事实上，不光是数学研究对象的本身，和由它引起的数学内容的本身时刻都在变化，在发展，在运动着，就是我们认识它的那个过程，那个反复实行“实践，理论，实践”的过程也时刻都在变化，在发展，在运动着。

“因为除了运动的物质之外，世界上什么也没有。”（毛泽东《矛盾论》）而初等数学正是几千年来这种“运动的物质”的数量和空间形式的变化规律在人们头脑中的反映，而且这种反映都是已经为人类的生产实践所证实的正确的概念、判断和法则，因之，我们不能用违背客观事物发展规律的、孤立的、凝固的观点去看待它们，而必须用对立统一的观点，用运动的、发展的观点去看待它们，也就是说，我们必须要用辩证的思想和方法去学习初等数学。如果我们作不到这一点，那就不可能掌握数学的各个内容之间的内在联系和数学本身的发展规律，这样的学习当然是很不深刻的。

反之，如果我们按照辩证法的普遍原则，开始从各个概念的联系中去寻找事物的变化规律，那末，在初等数学里，我们不但能够看到前面提到的那些具有“同一性”的对立，我们还能看到，任何质变总是从量变开始，任何量变的积累在某一点上都要引起质变。这条辩证法的基本规律，在这里也有许许多多极为形象的例证。比如，椭圆短轴的长度趋向0的时候，椭圆将变成一条线段，而趋向长轴的时候，椭圆又将变为圆，在这里，椭圆，圆，线段这些截然不同的概念可以同处在“一回事”里。再比如，幂 a^x ($a > 0$) 当 x 为非零整数

时，表示乘方或乘方的倒数， x 为分数时，又表示根式， $x=0$ 时，甚至表示常数1（ $a \neq 0, a^0=1$ ）。这里，乘方、根式、常数1这些截然不同的概念也处在“一回事”里了。这生动地说明，这些概念的差异，只不过是同一个量处在变化过程中的某个数值上而已，任何质变总是从量变开始，而且成为量变积累的必然结果。

此外，我们还将看到，充满了对立即矛盾的初等数学中，也充满了那个“矛盾着的两个方面，因为一定的条件而各向着和自己相反的方面转化了去”（《矛盾论》）的丰富多采的过程：有了坐标系这个“一定的条件”，函数或方程可以变成一条曲线，根据曲线的性质，也能写出它所代表的函数或方程，在这里，坐标系这个“一定的条件”，使得函数的两种不同的形式可以进行各种人为的转化；有了对数这个“一定的条件”作为工具，开方、乘方可以变成简单的乘除，乘除又能变成更加容易的加减；有了诱导公式这个“一定的条件”，各种角的三角函数都可以变成正锐角的三角函数，等等。须知，“这种从一个形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一。如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。”（恩格斯《自然辩证法》）恩格斯的这段话，生动地告诉我们，初等数学中也充满了辩证法，而且正是这种不同概念之间的对立统一，它们在一定的条件下的转变，才是数学的本来面目，只有敢于和能够认识这个变来变去的过程，才可以认识数学的本来面目。事实上，在以后的更进一步的学习中，也正是通过掌握和创造那个矛盾转化所需要的“一定的条件”，来让数学为人类改造世界的目的服务的。

在中学阶段渗透自然辩证法 思想的重要意义

当小学生开始学习自然数和四则运算时，往往是孤立地、静止地、一个一个概念地学，但到了四、五年级，陆续学习了除法变乘法、小数化分数、四则应用题中的由已知求未知等等的内容，这就开始接触辩证法的某些范畴了。这里的除和乘，小数和分数，分数和整数，已知和未知，实际上都是一对具有同一性的对立的观念。这里的变、化、求，实际上就是对立的一方在“一定的条件”下转化成另一方的过程，但是由于年龄和知识方面的局限，不容易接受这些哲学的观念，因之给学生讲述辩证法还是不大合适的。但教师应该有辩证的思想，并给学生初步渗透一些。比如，在“倒数”这个条件下，任何一个除法实际上都可变成一个乘法；分数和小数则都是除法的一种存在形式，分母是10的整数次幂的时候，分数成为小数，而整数又是分母为1的分数，因之，小数、整数都仅仅是分数的一种特殊形式，它们和分数之间都存在着特殊和一般的关系等等。学生在小学毕业时，如果能够知道学习内容之间存在着许多“联系”，就可以比

较灵活地运用自己的知识。

学生进入中学阶段的学习后，辩证法的学习就相当重要了。这是因为，在中学里，开始广泛地接触自然科学的各个方面，如数学，物理，化学，生物等等，随着学习中时刻都在进行着的思考，和对各门功课的理解，随着逻辑思维能力的提高，随着人生观的基本定型，他的思想方法和自然观也就逐步形成。因之，中学阶段的教育有着一个无形的但是极为重要的任务：就是要使学生树立起唯物辩证法的思想，并初步学会用辩证的方法来分析问题；培养学生认识不同的事物间的内在联系，和在同一事物发展的各个不同阶段中发现规律的能力；培养学生比较分析和综合归纳的能力；从而使得学生具有一些对形而上学的免疫力，为在以后的学习、工作中逐步使马列主义的哲学思想在头脑中扎下根来打好基础。

不少中学生在升入大学，刚开始学习高等数学时，往往感到吃力，感到思想方法和学习方法都不能适应，这也是由于在中学阶段的学习，总是局限在形式逻辑的范畴之内，不注重探求对立的同一性、常常忽视事物之间的联系所造成的。如果他们在中学就能逐步运用运动的、变化的观点和方法来学习，从而渐渐形成辩证的思想方法，那对升入大学后进一步的学习，无疑是一个良好的基础。这就要求我们，在中学数学和其他各门自然科学课程中，把马克思主义的哲学原理，首先是辩证法的普遍原则和教材的具体内容恰当地结合起来。而如果作到了这一点，那对一个学生一生的学习和实践都将是受惠无穷的。

综上所述，在中学数学教育中，应强调用自然辩证法的

思想作为指导思想，应大力提倡教师自己学好《自然辩证法》，并随时渗透给学生，这是在新时期里，中学数学教育的一个重要任务。

零的丰富内容

——不能“遗忘”数的物质性

问一个小学生：“0”表示什么？立刻会得到回答：“是没有”，但对于学习了有理数的中学生来说，“0”就不能理解成“没有”了，因为“有”已经包括“有正的”、“有负的”、和“有一个0”三种情形，“0”只是其中的一个界限点，一个从“有正的”到“有负的”之间的一个必然的过度点，在实数轴上是那个首先要确定的原点。因之，这个“无”是“有”的一个特殊情况，是一种特殊的“有”，而在实践中，在描述任何一种量的变化时，总是“有”和“无”并用的，二者缺一不可，它们本来就处在一个统一体中，二者有同一性。

但是，“无”毕竟在本质上不同于“有”，这个在数轴上最了不起的原点所对应的“0”，与其他的任何一点所对应的数迥然不同。在加减法中，它的作用可以小到“有等于无”；但在乘除法中，它的作用又可以大到使与它相乘的任何数统统“化为乌有”，同时，也因为这个性质，决定了它没有资格去当除数。（因为当 x 是非零实数时， $\frac{x}{0}$ 不代表任

何数，而 $\frac{0}{0}$ 也不是一个确定的数。）这说明“有”和“无”，二者又是对立的。因之，“0”的存在，正体现了有和无的对立统一关系。

再从生产实践和生活中的量来看待这个“0”，如果你把“今天的最低温度是 0°C ”说成“最低温度是没有度”的话，那就成了一个大笑话，因为 0°C 是温度的一个特定量，是一个确定地存在着的量，正像恩格斯在《自然辩证法》中说的：“任何一个一定的量得出的无，本身还是有量的规定的”那样，“0”对于它所表示的任何具体量来说，都是“具有非常确定的内容的”，是有实际含义的。各种仪表上，指针指示“0”时，都有着各自特定的含义，或者表示“起点”，或者表示“完了”，或者表示“平衡”等等。公路边里程碑上刻着一个“0”的地方，表示着这条公路从此开始。可以设想，如果筑路工人不首先把刻着“0”的路碑立上的话，那1公里、2公里等等的路碑就不知该立在什么地方了。年终结账时，结存为“0”，表示这一年的收支刚好平衡。就连速度、加速度为0等等概念也都描述了一种特定的运动状态，速度为0，表示相对静止，加速度为0，表示匀速运动等等。上述种种，都说明“无”是“有”的一种特定情形，表示“无”，总是为着表示“有”服务的，“无”总是有着其特定的“量的规定”的。可以想见，离开了路程、气温、财政决算这些量的物质的含义，最初的“0”是不能被认识的。

再从数的发展来看，“0”的出现比其他数字出现要迟，而且还是颇费了一番周折。中国是古算学非常发达的国