中国科技大学
北京景山学校
中国少年报社

北京地区少年数理竞赛试题及答案分析

原子能出版社

中 国 科 技 大 学
北 京 景 山 学 校
中 国 少 年 报 社

北京地区少年数理竞赛
试题及答案分析

北京景山学校编

原 子 能 出 版 社

1 9 8 5

中 国 科 技 大 学
北 京 景 山 学 校
中 国 少 年 报 社
北京地区少年数理竞赛试题及答案分析
北京景山学校编
原子能出版社出版
（北京2108信箱）
北 京 印 刷 一 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
☆
开本787×1092 1/32·印张2.5·字数51千字
1985年8月北京第一版·1985年8月北京第一次印刷
印数：1—80,000 统一书号：7175·700
定价：0.45元

前　言

祖国正在进行历史上最宏伟的事业——向现代化进军。现代化建设急需知识，现代化建设急需人才！开发知识，开发技术，开发智力，开发人才，这是我国重要的战略目标。

人脑不但是信息的宝库，而且是知识运行、知识生产的“宝箱”。开发智力，就要开发人脑。人的脑细胞在3～6岁时就已大部形成，因此要重在早期开发。国内外瞩目的中国科技大学少年班的试验为此提供了成功的经验。这种早期开发事业也是我国现代化建设事业带战略性的重要组成部分。

我国广大少年儿童中蕴藏着无穷的聪明才智，构成了不可估量的智力资源。因此，广大少年儿童应当少年立志，尽早吸取各种知识，开发自己的大脑。邓小平同志讲得好，儿童要成为“有理想，守纪律”的好孩子。这就要求少年儿童为祖国的四化勤奋学习，勇攀高峰，早期成才，少年得志。

本书是北京景山学校、中国科技大学、中国少年报主办由原子能出版社等单位支持和协助的北京地区1985年数理竞赛的题目、题解和优秀题例，参加竞赛者都是十三岁以下具有初中毕业程度的少年儿童。题目不离开基本知识、基本技能，但又是灵活多变、重于能力测验的题目。既守住基础，又训练能力、发挥特长、开阔领域，这就是少年儿童学习的方向。这些题大家都可以试试，经过努力，是可以练好，可以做好的。

前不久，邓小平同志给北京景山学校题词：“教育要面向

现代化，面向世界，面向未来。”这给少年儿童的学习指引了无限广阔的前景。

少年儿童朋友们，努力吧！祝愿你成为开拓型、创造性的人才，为祖国的社会主义建设贡献出你闪光的才华！

北京景山学校校长　崔孟明

1985年4月5日

目　　录

北京地区少年数理竞赛数学试题……………………………(1)

数学试题解答……………………………………………………(4)

数学试卷分析……………………………………………………(19)

北京地区少年数理竞赛物理试题…………………………(37)

北京地区少年数理竞赛物理试题解答及初步分析………(47)

北京地区少年数理竞赛数学试题

1．计算 $\left(-0.25+\frac{1}{7}-3^4\right)\left(-0.125+\frac{1}{8}\right)$

（本题满分 5 分）

2．设 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$

求 $\frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}$之值。（本题满分 5 分）

3．把分式 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$中的分母有理化，且使分式的值不变。（本题满分 5 分）

4．化简$\sqrt{4(\lg 3)^2-\lg 81+\lg 10}$ （本题满分 5 分）

5．含盐 $p\%$的盐水 a 公斤，加入多少盐才能使含盐量达到$q\%$？（这里 $100>q>p>0$）。（本题满分 5 分）

6．已知一个等边三角形的面积是 a，求其内切圆的面积。（本题满分 5 分）

7．已知 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$

求 $ab+cd$之值。（本题满分 5 分）

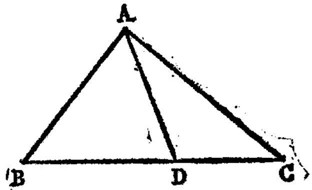
8．设 a、b、c、d 都是非零实数，试证$-ab$、cd、ac、bd这四个数中，至少有一个取正值，且至少有一个取负值。（本题满分 5 分）

9．对于任意给定的自然数 n，证明有无穷多个（意即有无数个）自然数 a，使 n^4+a 是合数。（本题满分 5 分）

10．试证　四边形$ABCD$的对边AB、CD的中点连线段EF小于或等于对边AD与BC的和的一半。（本题满分5分）

11．设对数$\lg a$的首数为p，尾数为r，求对数$\lg\frac{1}{a^2}$的首数和尾数。（本题满分7分）

12．在$\triangle ABC$中，$\angle B=45^\circ$，D是BC上的一点，又$AD=5$，$AC=7$，$DC=3$，求AB。（本题满分7分）



13．二次函数　$y=ax^2+bx+c$，当$x=1$时有最小值-1，方程$ax^2+bx+c=0$的两个解α与β满足关系式$\alpha^3+\beta^3=4$，求此二次函数。（本题满分9分）

14．为使从联立方程

$$\begin{cases} y=|x^2-2\sqrt{3}\,x+1| \\ y=k \end{cases}$$

中消去y所得的关于x的方程有四个相异的实数解，求k的变化范围。（本题满分9分）

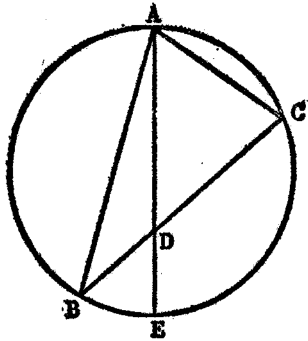
15．设　a、b为满足不等式$a>b>2$的整数，而$2a+2b+ab-1$能被$2ab$整除。

（1）试证$(2a-1)(2b-1)(ab-1)$也能被$2ab$整除；

（2）求所有的a，b。

（本题满分9分）

16．如图，$\triangle ABC$的外接圆的直径AE与弦BC交于D，且$AE:AD=7:5$，$\angle B=30°$，求 $\mathrm{tg}C$ 的值。(本题满分 9 分)



数学试题解答

北京景山学校　徐望根

1. 此题在于考查少年对有理数的四则运算的能力，有一定的灵活性。

分析　纵观全题，此题第二个括号内的两个数的代数和恰为零，故给计算带来方便。如果先算第一个括号内的三个数的代数和，则计算量稍大。

解 1　原式$=\left(-0.25+\frac{1}{7}-3^4\right)\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$

$$=\left(-0.25+\frac{1}{7}-3^4\right)\cdot 0$$

$$=0$$

解 2　原式$=\left(-0.25+\frac{1}{7}-3^4\right)(-0.125+0.125)$

$$=\left(-0.25+\frac{1}{7}-3^4\right)\cdot 0$$

$$=0$$

2. 此题主要考查代数式的求值计算的能力。

分析　由于$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，容易得出$x+y=4$、$xy=1$、$x-y=2\sqrt{3}$的简单关系，而分式$\frac{x^2}{y}-\frac{y^3}{x}$可以通过适当的恒等变形和$x+y$、$xy$、$x-y$发生关系，从而使求值计算简化。

解 $\because x+y=4,\ xy=1,\ x-y=2\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}=\frac{x^4-y^4}{xy}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{xy}$$

$$=\frac{[(x+y)^2-2xy](x-y)(x+y)}{xy}$$

$$=(4^2-2)\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4$$

$$=112\sqrt{3}$$

3．此题是考查灵活运用公式的能力，并能熟练地寻找$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$的有理化因子。

分析 此题是公式$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$的活用，善于把$\sqrt[3]{2}$看成$x$，把$\sqrt[3]{3}$看成$y$，看出$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$的有理化因子是$(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$并能利用根式运算进行化简。

解 原式$=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

$$=-\frac{(\sqrt[3]{3})^2+(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})[(\sqrt[3]{3})^2+(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{2})^2]}$$

$$=-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$$

4．此题是考查学生关于对数的运算能力和对算术根意义的理解。

分析 解这类化简问题时，要根据具体题目的特点，常常想到把被开方数化成某数平方的形式，即把原式化成$\sqrt{x^2}$的形式，然后根据x的值的符号和算术根的概念，再对$\sqrt{x^2}$

进行化简。

解 原式$=\sqrt{4(\lg 3)^2-\lg 3^4+\lg 10}$

$$=\sqrt{4(\lg 3)^2-4\lg 3+1}$$

$$=\sqrt{(2\lg 3-1)^2}$$

$$=1-2\lg 3$$

5．此题主要是考查学生解有关浓度问题及解含有字母系数的一元一次方程的能力。

分析 此题利用“含盐量的百分比$=\dfrac{\text{盐量}}{\text{盐水量}}$”的基本关系，从多种角度（实质是一样的）考虑，来列出有关的等量关系（方程）：盐量不变（如解1）；含盐量的百分比不变（如解2）；盐水量不变（如解3）。

解1 设加入的盐量为x公斤，依题有

$$a\cdot p\%+x=(a+x)\cdot q\%$$

得
$$x=\frac{a(q\%-p\%)}{1-q\%}$$

即
$$x=\frac{a(q-p)}{100-q}\quad(100>q>p>0)$$

答 加入$\dfrac{a(q-p)}{100-q}$公斤盐才能使含盐量达到$q\%$。

解2 设加入的盐量为x公斤，依题有

$$q\%=\frac{a\cdot p\%+x}{a+x}$$

得
$$x=\frac{a(q-p)}{100-q}\quad(100>q>p>0)$$

答 加入$\dfrac{a(q-p)}{100-q}$公斤盐才能使含盐量达到$q\%$。

解 3　设加入的盐量为 x 公斤，依题有

$$a+x=\frac{a\cdot p\%+x}{q\%}$$

得
$$x=\frac{a(q-p)}{100-q}$$

答　加入$\frac{a(q-p)}{100-q}$公斤盐才能使含盐量达到 $q\%$。

6．此题主要考查从特殊三角形的面积转化到其内切圆的面积的计算推导能力。

分析　由正三角形的面积可以求出其边长，由边长能求出其高长，而高长的三分之一就得内切圆的半径长，由半径长就可以求内切圆的面积。

解　设等边三角形的边长为 x，那么其高长为$\frac{\sqrt{3}}{2}x$，其内切圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}x$。依题有

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=a$$

得
$$x^2=\frac{4a}{\sqrt{3}}$$

故
$$S_{内切圆}=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2=\pi\cdot\frac{x^2}{12}$$

$$=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{4a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a$$

答　内切圆面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a$。

7．此题主要考查利用因式分解进行求值的技巧及整式的恒等变形的能力。

分析 从分解因式的角度考虑，利用条件，想法把$ab+cd$分解因式，进行一些试探性的工作。

解 $\because$ $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$

$\therefore$ $ab+cd=ab\cdot 1+cd\cdot 1$

$$
\begin{aligned}
&=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)\\
&=abc^2+abd^2+cda^2+cdb^2\\
&=(a^2cd+abc^2)+(abd^2+b^2cd)\\
&=ac(ad+bc)+bd(ad+bc)\\
&=(ad+bc)(ac+bd)\\
&=0
\end{aligned}
$$

8．此题主要考查学生分析数的符号的能力。

分析 在$-ab$、cd、ac、bd这四个数中，a、b、c、d这四个字母都分别出现两次。要证这四个数至少有一个取正值且至少有一个取负值，就是要证这四个数不能全正或全负，因此不妨考虑它们的积的符号（如解1），也可以从反面进行判断（如解2）。

解1 考察 $(-ab)(cd)(ac)(bd)=-a^2b^2c^2d^2$

$\because$ a、b、c、d都是非零实数，

$\therefore$ $-a^2b^2c^2d^2$为负数

由于$-ab$、cd、ac、bd这四个数的积为负数，故至少有一个取正值，且至少有一个取负值。

解2 i．如果$-ab$、cd、ac、bd这四个数全正，即$-ab>0$，$cd>0$，$ac>0$，$bd>0$。由此可知：

① a与b异号；

② c与d同号；

③　a 与 c 同号；

④　b 与 d 同号。

由①、④得 a 与 d 异号；由②、③得 a 与 d 同号，故矛盾。因此，这四个数不可能全正。

ii. 如果 $-ab$、cd、ac、bd 这四个数全负，即 $-ab<0$，$cd<0$，$ac<0$，$bd<0$。由此可知：

①　a 与 b 同号；

②　c 与 d 异号；

③　a 与 c 异号；

④　b 与 d 异号。

由①、④得 a 与 d 异号；由②、③得 a 与 d 同号，故矛盾。因此，这四个数不可能全负。

综合 i 、ii可知，在 $-ab$、cd、ac、bd 这四个数中，至少有一个取正值，且至少有一个取负值。

9. 此题考查学生关于自然数、特别是合数的基本知识和证题技巧。

分析　想法找一个与自然数 m 有关的整式（其值要取自然数）作为 a，使 n^4+a 能分解因式，且每个因式的值都是大于 1 的自然数。

解　取 $a=4m^4$（m 为大于 1 的自然数），显然这样的 a 有无穷多个。因此有

$$\begin{aligned} n^4+a &= n^4+4m^4 \\ &= (n^2+2m^2)^2-4m^2n^2 \\ &= (n^2+2m^2-2mn)(n^2+2m^2+2mn) \end{aligned}$$

这里　n^2+2m^2-2mn，n^2+2m^2+2mn 都是自然数。

$\because$　$m>1$

$\therefore$　$n^2+2m^2-2mn=(n-m)^2+m^2>1$

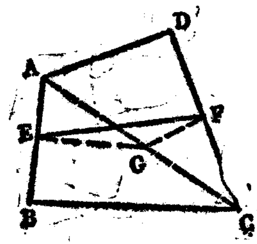
又 $$n^2+2m^2+2mn>1$$

故有无穷多个自然数 a，使 n^4+a 是合数。

10．此题考查学生添加辅助线及由此来证平面几何问题的能力。

分析 能不能使 $\frac{1}{2}AD$、$\frac{1}{2}BC$、EF 这三者的关系转化为某一个三角形的三边的关系呢？如果能是这样的话，就可利用"三角形的两边之和大于第三边"来证明。因此，考虑三角形的中位线作为辅助线是比较自然的。

证 如图，连结 AC，G 为 AC 的中点，连 EG、FG，可得 $GF=\frac{1}{2}AD$，$EG=\frac{1}{2}BC$。



i．如果 G 在 EF 上，就有

$$EF=EG+GF$$
$$=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

ii．如果 G 不在 EF 上，那么在 $\triangle EFG$ 中，有

$$EF<EG+GF=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

从 i、ii 可知，四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 的中点连线段 EF 小于或等于对边 AD 与 BC 的和的一半。

11．如何分情况来确定对数首数和尾数，是此题考查的主要目的。

分析 利用对数的性质，使 $\lg\frac{1}{a^2}$ 与 $\lg a$ 发生关系，从而可用 p、r 来表示 $\lg\frac{1}{a^2}$。由于对数的首数是一个整数，

尾数是正的纯小数或零，故在$\lg\frac{1}{a^2}$的表示式中，要对字母p、r进行仔细分析，要照顾到首数和尾数这两个方面。

解 依题 $\lg a = p + r$，有

$$\lg\frac{1}{a^2} = -2\lg a$$

$$= -2(p+r)$$

$$= -2p - 2r$$

i．当$r=0$时，$\lg\frac{1}{a^2}$的首数为$-2p$，尾数为0

ii．当$0<r\leqslant 0.5$时，有$0\leqslant 1-2r<1$，而

$$\lg\frac{1}{a^2} = -2p-2r$$

$$=(-2p-1)+(1-2r)$$

故 $\lg\frac{1}{a^2}$的首数为$-(2p+1)$，尾数为$1-2r$

iii．当$0.5<r<1$时，有$0<2-2r<1$，而

$$\lg\frac{1}{a^2} = -2p-2r$$

$$=(-2p-2)+(2-2r)$$

故 $\lg\frac{1}{a^2}$的首数为$-2(p+1)$，尾数为$2(1-r)$

12．如何用正弦定理、余弦定理来解三角形，是此题的考查目的。

分析 在$\triangle ABD$中，如果知道$\angle ADB$，就可用正弦定理来求出AB。要知道$\angle ADB$，就得先求$\angle ADC$，因为这两个角互成补角。已知$\triangle ADC$的三条边长，用余弦定理可求$\angle ADC$。