



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程配套教材

数学物理方法

【第三版】

姚端正 梁家宝 编著



科学出版社

www.sciencep.com



本书附光盘

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数 学 物 理 方 法

(第三版)

姚端正 梁家宝 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,也是国家精品课程配套教材,由作者在总结多年教学经验的基础上编写而成。

本书本着去粗取精、更新拓宽的思想科学地组织内容,全书突出物理背景、前景和物理意义,密切结合物理实例,特别注重与后续课的联系,并增加了传统教材中没有的非线性方程和小波变换等内容,全书分为复变函数论(第一篇)、数理方程(第二篇)和特殊函数(第三篇)三个部分,在每章后都有小结,每小节后都附有习题,以加深和扩大知识的深度和广度,培养学生分析问题、解决问题的能力和创新能力。

本书可作为高等院校物理专业本科生的教材,也可供相关专业的研究生、教师和科技人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/姚端正,梁家宝编著. —3版. —北京:科学出版社,2010
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-026492-3

I. 数… II. ①姚…②梁… III. 数学物理方法-高等学校-教材
IV. O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第014687号

责任编辑:昌盛 窦京涛 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林科学院有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1992年8月第 一 版 开本:135(720×1000)

1997年7月第 二 版 印张:22 1/2

2010年3月第 三 版 字数:454 000

2010年3月第一次印刷 印数:1—4 000

定价:39.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第三版前言

浮生却似冰底水,日夜东流人不知.不知不觉,本人的拙作《数学物理方法》一书已历经了 20 多年的使用历程.从讲义到出版问世,到再版;从荣获国家教委优秀教材二等奖,到荣获教育部科技进步二等奖,再到入选为普通高等教育“十一五”国家级规划教材;这一路过来,作为一个普通教师,本人心存太多的感慨和感激!我感谢李中辅教授、路见可教授和黄念宁教授在本书编写、修改过程中所作的有益讨论和指教;我感谢保宗悌教授、梁昆森教授、陆全康教授对本书的悉心评审、评阅,特别是老前辈梁昆森教授为第二版所写的序;我感谢广大读者尤其是使用本书的教师、学生对本书的厚爱;我感谢武汉大学教务部历年来对教学工作的重视、扶持;我也感谢科学出版社的昌盛编辑和窦京涛编辑为第三版的出版所付出的辛勤劳动.在第三版即将问世之际,我还要特别感谢金准智教授和熊贵光教授长期以来对本人工作的支持和帮助!我深知,没有大家的帮助和支持,本书不可能一步步地走到今天.

众所周知,数学物理方法是物理类专业的重要基础课,也是一门公认的难教、难学的理论课程.如何将难教、难学的课程变为易教、易学的课程,如何使数学物理方法教材的内容能适应 21 世纪科技发展的需要,这便是本人编写本书的主要宗旨.为此,第三版对第二版的内容大致作了如下更改:

1. 将全书的内容编排进行了调整,取消了原书的第四篇,而将其内容作为“非线性方程”、“积分方程”各一章并入第二篇.全书共含复变函数论、数学物理方程和特殊函数三篇,且为查找方便起见,将全书的 16 章不分篇地统一排序.

2. 受篇幅限制,删去了第二版中的部分章节,将其部分内容并入适当的章节或相关章节的习题中.如,删去了原书第二篇第二章行波法中的 2.2 节反射波,而将其内容作为习题并入习题 7.1 中;删去了原书第二篇第六章保角变换法,而将其中 1.1 节保角变换的主要内容作为新的一节(1.5 节解析函数的几何性质)添加到第一篇中;删去了原书第二篇第七章复变函数法,而将其内容作为两个习题列入第二篇习题 11.4 中;删去了原书中的附录一(高斯方程和库默方程)、附录二(最陡下降法)、附录三(矢量公式和矢量定理),将高斯方程和库默方程的相关内容并入第三篇第十六章中,等等.

3. 对部分章节进行了改写.如,10.5 节含时的格林函数法,13.2 节施密特-希尔伯特理论等.

4. 根据教育部对该课程的要求和近年来科技发展的需要,增加了部分章节或内容.如,2.3 节中含参量积分的内容,4.3 节 B 函数,5.4 节中的含对数函数的积分,9.5 节小波变换导引,等等.

需要说明的几个问题:

1. 本书可供讲授 72~90 学时(不含习题课)和讲授 54~60 学时(不含习题课)的两种需求者使用. 对于讲授 72 学时(不含习题课)的使用者,若学时不够,建议可根据自身的情况或需求删去部分打*的节(而不是打*的章). 对于讲授 54 学时(不含习题课)的使用者,可直接删去打*的章.

2. 本书每小节后的大约一半的习题在其配套的《数学物理方法学习指导》(科学出版社,姚端正,2001 年)中有详细解答和分析(为了培养学生分析问题、解决问题的能力,我们有意没有给出全部习题的解答).

3. 为了方便读者,本书为读者提供了 PDF 格式的电子教案光盘(含习题课),并对以本书为教材的老师赠送可修改格式的授课用电子教案. 需要指出的是,鉴于本课程应特别注重培养学生逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力,建议使用该教案的授课教师,一定要结合适当的板书推演过程,否则其教学效果将是不理想和不完善的. 实际上本电子教案中有些章节已省去了不少推导、证明过程,而第十一章和第十三章,由于完全是通过板书推演来授课,则未录入电子教案.

“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索!”尽管我衷心地希望本书能成为广大学习数理方法读者的良师益友,但由于受水平、时间和篇幅的限制,难免有疏漏和不妥之处,敬请专家和广大读者批评指正!

姚端正

2009 年仲夏夜于珞珈山

第二版序言

多年来,姚端正和梁家宝两位先生先后相继为武汉大学物理类专业讲授“数学物理方法”课程.本书就是他们在长年教学实践的基础上编写出版的优秀教材.

作者十分注意数学与物理的结合,注意阐述有关物理背景和前景.这个特点对于物理类专业是很重要的.

非线性方程和积分方程对于物理学科的一些新进展很有用,但在同类教科书中却往往阙如.本书则将有关内容编为第四篇,体现出课程现代化之精神.

本书选材恰当,文字清晰,要言不繁.尽管增加了第四篇,全书篇幅并不大于同类教材,十分有利于在有限的学时内很好地完成数学物理方法的教学.

在1995年的优秀教材评选中,本书荣获国家教委第三届优秀教材二等奖,我以为正是实至名归.在本书再版之际,谨以此表示祝贺之忱.

梁家宝

1996年丙子仲秋

第二版前言

本书第一版虽然荣幸获得了国家教委第三届优秀教材二等奖,但一本好的教材必须通过在教学实践中的千锤百炼,不断地充实、更新,才能满足读者和迅猛发展的科学技术的需要.故借此再版之机,我们对本书第一版的内容作了如下一些修改:

1. 对部分章、节的写法和内容作了些改动.如第二篇的 § 3.5, § 5.1, § 5.5, § 8.2;第三篇的 § 2.3 等,以使本书能更紧密地结合物理学及相关课程的内容.

2. 在第四篇的非线性方程部分增加了“解析近似解和正则摄动法”一节,以满足近代物理学中解大量非线性方程的需要;在附录中增加了“矢量公式和矢量定理”的内容,以便读者学习本课程时查阅;在部分章节中增加了一些例题和习题,特别是将近些年来美国部分高校的研究生试题及 CUSPEA 考题中与本课程相关的内容分别录入到了相关章节的习题中,以进一步开拓学生视野,提高学生分析问题和解决问题的能力.

3. 删去了第三篇中与高等数学重复的“常微分方程的级数解法”的内容和附录中的“贝塞尔函数表”,仅将所需用到的结论和数据简述在相应章节的附注中.

4. 对习题中可作为公式和结论运用的题加上了公式编号;而对习题中的难题、超纲题打上了 * 标记.

5. 对书中和习题答案中的印刷错误进行了更正.

本书自 1992 年问世以来,得到校内外广大读者和专家的关心与支持,特别是武汉大学物理学 93 级“人才基地班”的同学,为本书的再版提供了许多宝贵的意见,武汉大学出版社为本书的再版给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢.

这次再版,尽管我们倾注了不少心血,但由于水平和时间的限制,错误或不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

1996 年暑期于珞珈山

第一版前言

本书是在多年来武汉大学物理类专业数学物理方法课程所用的自编教材和讲义的基础上修改而成的. 其内容包括复变函数论、数学物理方程、特殊函数、积分方程和非线性方程简介四个部分. 适合物理类专业和相应的专业教学使用.

数学物理方法是物理系基础理论课——四大力学之间的黏合剂, 是解决物理学中各种具体问题的重要工具之一. 为了编写出一本较为理想的数学物理方法教材, 使之不仅局限于叙述知识, 更主要的是引导学生去思考问题, 使他们具有分析问题和解决问题的能力, 在编写时我们注意了以下几点:

一、第二篇是以数学物理方程的各种解法为主线进行编写的. 这样可使读者一目了然地了解数理方程一般有哪些解法, 同时还便于读者将同一问题的不同解法进行对比, 从而选择最佳方法来解决具体问题.

二、在每一小节的内容后都编入了相当数量的习题(在附录中有参考答案), 使读者能及时消化所学知识. 在习题中, 编入了一定量的能开拓学生知识面的内容. 这样, 既不挤占教材篇幅, 又可使学生掌握更多知识.

三、每一章后都附有小结, 使学生对整章内容融会贯通, 加强知识的条理性、系统性. 小结的形式多采用表格或框图, 以便于学生对比和加深印象.

四、考虑到物理类专业的特点, 对有些定理或公式不是单从数学上进行推导, 而是先从物理背景、物理前景方面进行阐述, 使读者易于理解和接受. 书中的内容、例题和习题也都尽量结合物理问题和物理实例.

五、随着学科的新进展, 根据需要, 将传统数学物理方法教科书中没有而对物理学又十分有用的某些积分方程和非线性方程的解法作为第四篇编入到了本书中.

六、为了教学的方便, 将本课程用到的其他课程的部分定理、公式, 编写到了本书相应章节的注释中.

七、书中打“*”的章节, 若受学时限制, 教师可只选讲, 或放入习题课中讲解, 也可不讲.

本书的出版, 得到了武汉大学教务处、物理系、物理系基地班及出版社有关负责同志的大力支持. 保宗悌教授在百忙中对本书进行了审阅; 李中辅教授对本书的编写提出了一些宝贵的意见并作了有益的指教; 龙理老师为本书核对了习题答案, 在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限, 再加之时间仓促, 难免有不妥甚至谬误之处, 敬请读者批评指正.

编 者

1991年10月

目 录

第一篇 复变函数论

第一章 解析函数	3
1.1 复数及其运算	3
习题 1.1	6
1.2 复变函数	7
习题 1.2	9
1.3 微商及解析函数	10
习题 1.3	15
1.4 初等解析函数	16
习题 1.4	22
1.5 解析函数的几何性质	23
习题 1.5	28
本章小结	29
第二章 解析函数积分	30
2.1 复变函数的积分	30
习题 2.1	32
2.2 柯西定理	33
习题 2.2	38
2.3 柯西积分公式	38
习题 2.3	44
本章小结	45
第三章 复变函数级数	46
3.1 复级数	46
3.2 幂级数	49
习题 3.2	51
3.3 泰勒级数	52
习题 3.3	55
3.4 洛朗级数	56
习题 3.4	61
3.5 单值函数的孤立奇点	62
习题 3.5	66
本章小结	68
第四章 解析延拓 Γ 函数	69

4.1 解析延拓	69
习题 4.1	71
4.2 Γ 函数	72
习题 4.2	74
* 4.3 B 函数	75
习题 4.3	76
本章小结	77
第五章 留数理论	78
5.1 留数定理	78
习题 5.1	82
5.2 利用留数理论计算实积分	83
习题 5.2	87
5.3 物理问题中的几个积分	89
习题 5.3	92
* 5.4 多值函数的积分	93
习题 5.4	95
本章小结	97
第二篇 数学物理方程	
第六章 定解问题	101
6.1 引言	101
6.2 三类数理方程的导出	103
习题 6.2	107
6.3 定解条件	108
习题 6.3	112
本章小结	114
* 第七章 行波法	115
7.1 无界弦的自由振动 达朗贝尔公式	115
习题 7.1	119
7.2 无界弦的强迫振动	120
习题 7.2	124
* 7.3 三维无界空间的自由振动泊松公式	124
习题 7.3	130
* 7.4 三维无界空间的受迫振动推迟势	130
本章小结	133
第八章 分离变量法	134
8.1 有界弦的自由振动	134
习题 8.1	141
8.2 非齐次方程 纯强迫振动	143
习题 8.2	146

8.3 非齐次边界条件的处理	146
习题 8.3	150
8.4 正交曲线坐标系	151
8.5 正交曲线坐标系中的分离变量	153
习题 8.5	159
本章小结	161
第九章 积分变换法	162
9.1 傅里叶变换	162
习题 9.1	170
9.2 傅里叶变换法	171
习题 9.2	174
* 9.3 拉普拉斯变换	175
习题 9.3	182
* 9.4 拉普拉斯变换法	182
习题 9.4	184
* 9.5 小波变换导引	185
本章小结	191
第十章 格林函数法	192
10.1 δ 函数	192
习题 10.1	195
10.2 边值问题的格林函数法	196
习题 10.2	201
10.3 稳恒问题的格林函数	202
习题 10.3	205
10.4 电像法与狄氏格林函数	206
习题 10.4	211
* 10.5 含时问题的格林函数法	212
习题 10.5	217
本章小结	218
第十一章 变分法	220
11.1 泛函和泛函的极值	220
习题 11.1	228
11.2 用变分法解数理方程	229
习题 11.2	236
本章小结	237
* 第十二章 非线性方程	238
12.1 非线性方程的某些初等解法	238
习题 12.1	243
12.2 孤波和孤子	243

习题 12.2	248
* 12.3 解析近似解和正则摄动法	249
习题 12.3	252
本章小结	252
* 第十三章 积分方程	253
13.1 积分方程的几种解法	253
习题 13.1	259
* 13.2 施密特-希尔伯特理论	260
习题 13.2	263
* 13.3 维纳-霍普夫方法	263
习题 13.3	265
本章小结	266

第三篇 特殊函数

第十四章 勒让德多项式	269
14.1 勒让德多项式	269
习题 14.1	274
14.2 勒让德多项式的性质	274
习题 14.2	280
14.3 球函数	281
习题 14.3	286
本章小结	287
第十五章 贝塞尔函数	288
15.1 贝塞尔函数	288
习题 15.1	293
15.2 贝塞尔函数的性质	293
习题 15.2	299
* 15.3 其他柱函数	300
习题 15.3	307
本章小结	309
第十六章 特殊函数的一般理论	311
16.1 施图姆-刘维尔本征值问题	311
习题 16.1	314
* 16.2 高斯方程和库默尔方程	315
本篇主要特殊函数性质小结	318
习题参考答案	319
参考文献	338
附录	339
一、傅里叶变换简表	339
二、拉普拉斯变换简表	340

Contents

Part One Theory of Complex Variable Function

Chapter 1 Analytic Functions	3
1.1 Complex numbers and their operations	3
Problem 1.1	6
1.2 Function of a complex variable	7
Problem 1.2	9
1.3 Derivative and analytic function	10
Problem 1.3	15
1.4 Elementary analytic functions	16
Problem 1.4	22
1.5 Geometric properties of analytic functions	23
Problem 1.5	28
Summary for chapter 1	29
Chapter 2 The Integral of the Analytic Function	30
2.1 The integral of the variable function	30
Problem 2.1	32
2.2 The Cauchy theorem	33
Problem 2.2	38
2.3 Cauchy integral formula	38
Problem 2.3	44
Summary for chapter 2	45
Chapter 3 Series of Complex Variable Function	46
3.1 Complex series	46
3.2 Power series	49
Problem 3.2	51
3.3 Taylor series	52
Problem 3.3	55
3.4 Laurent series	56
Problem 3.4	61

3.5 The isolated singularity of the single-valued function	62
Problem 3.5	66
Summary for chapter 3	68
Chapter 4 Analytic Continuation Γ Function	69
4.1 Analytic continuation	69
Problem 4.1	71
4.2 Γ function	72
Problem 4.2	74
* 4.3 B-function	75
Problem 4.3	76
Summary for chapter 4	77
Chapter 5 The Residue Theory	78
5.1 The Residue theorem	78
Problem 5.1	82
5.2 Real integral calculated by the Residue theorem	83
Problem 5.2	87
5.3 Several integrals in physical problems	89
Problem 5.3	92
* 5.4 Integrals of the multi-valued function	93
Problem 5.4	95
Summary for chapter 5	97

Part Two Equations of Mathematical Physics

Chapter 6 Complete Mathematical Models	101
6.1 Introduction	101
6.2 Derivation for three type of equations of mathematical physics	103
Problem 6.2	107
6.3 Boundary conditions and initial conditons	108
Problem 6.3	112
Summary for chapter 6	114
* Chapter 7 Method of Traveling Waves	115
7.1 Solution for the free vibration of the unbounded string D'Alembert formula	115
Problem 7.1	119
7.2 Solution for the pure forced vibration of the unbounded string	120

Problem 7.2	124
* 7.3 The free vibration in three-dimensional unbounded space Poisson formula	124
Problem 7.3	130
* 7.4 The forced vibration in three-dimensional unbounded space Retarded potentials	130
Summary for chapter 7	133
Chapter 8 The Method of Separation of Variables	134
8.1 The free-vibration of the bounded string	134
Problem 8.1	141
8.2 The non-homogeneous equation-the pure forced vibration	143
Problem 8.2	146
8.3 The treatment of the non-homogeneous boundary conditions	146
Problem 8.3	150
8.4 The orthogonal curvilinear coordinates	151
8.5 The separation of variables in the orthogonal curvilinear coordinates	153
Problem 8.5	159
Summary for chapter 8	161
Chapter 9 Integral Variable Method	162
9.1 The Fourier transforms	162
Problem 9.1	170
9.2 Fourier transform method	171
Problem 9.2	174
* 9.3 The Laplace transforms	175
Problem 9.3	182
* 9.4 The Laplace transform method	182
Problem 9.4	184
* 9.5 An introduction to wavelet transforms	185
Summary for chapter 9	191
Chapter 10 Method of Green's Function	192
10.1 δ -function	192
Problem 10.1	195
10.2 Boundary value problems solved by Green's function method	196
Problem 10.2	201

10.3	Stable problem solved by method of Green's function	202
Problem 10.3		205
10.4	Dirichlet Green's function and image method	206
Problem 10.4		211
* 10.5	Time-related mathematical problems solved by Green's function method	212
Problem 10.5		217
	Summary for chapter 10	218
Chapter 11	The Variational Method	220
11.1	Functionals and functional extreme	220
Problem 11.1		228
11.2	Solving equations of mathematical physics by the variational method	229
Problem 11.2		236
	Summary for chapter 11	237
* Chapter 12	Some Solving Methods for Nonlinear Equations and Integral Equations	238
12.1	Some Primary solution method for nonlinear equations	238
Problem 12.1		243
12.2	Isolated wave and soliton	243
Problem 12.2		248
* 12.3	Analytical approximate solution and the regular perturbation method	249
Problem 12.3		252
	Summary for chapter 12	252
* Chapter 13	Integral Equations	253
13.1	Several methods for solving integral equations	253
Problem 13.1		259
* 13.2	Schimidt-Hilbert theory	260
Problem 13.2		263
* 13.3	Wiener-Hopf method	263
Problem 13.3		265
	Summary for chapter 13	266

Part Three Special Functions

Chapter 14	Legendre Polynomials	269
-------------------	-----------------------------	-----

14.1 Legendre polynomials	269
Problem 14.1	274
14.2 The property of Legendre polynomials	274
Problem 14.2	280
14.3 Spherical function	281
Problem 14.3	286
Summary for chapter 14	287
Chapter 15 Bessel functions	288
15.1 Bessel functions	288
Problem 15.1	293
15.2 The property of Bessel functions	293
Problem 15.2	299
* 15.3 Other Column Functions	300
Problem 15.3	307
Summary for chapter 15	309
* Chapter 16 Sturm-Liouville Eigenvalue Problem	311
16.1 Sturm-Liouville Eigenvalue problem	311
Problem 16.1	314
* 16.2 Gauss equation and the Kummer equation	315
Summary for the properties of the principal special functions in part three	318
Reference keys to the problems	319
Bibliography and references	338
Appendix	339
1. Summary table of Fourier transform	339
2. Summary table of Laplace transform	340