理论力学

下　册

吴永祯
张本悟　编
陈定圻

河海大学出版社

理论力学

（下　册）

吴永祯　张本悟　陈定圻　编

河海大学出版社

责任编辑：吴俊燕
特约编辑：陈乃巽
责任校对：张世立

*

理　论　力　学
（下　册）
河海大学出版社出版
（210024 南京西康路 1 号）
江苏省新华书店发行
句容县江南印刷厂印装
*
开本 850×1168 毫米　1/32　印张 10.5　字数 273 千字
1990 年 12 月第一版　1990 年 12 月第一次印刷
印数 1—1000 册

ISBN　7—5630—0305—3/O·31

定价：2.14 元

目　录

第三篇　动　力　学

第三篇　动　力　学

绪　言

在静力学里，我们研究了物体在力的作用下保持平衡的条件；但是，如果作用于物体的力**不满足**平衡条件，则物体将**如何**运动？静力学不能回答这个问题。

在运动学里，我们从几何学的观点研究了物体的运动，就是说，只研究物体**怎样**运动；但是，物体**为什么会**这样运动？运动学则不能回答。

上述问题将由动力学来回答。动力学研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

可以说，静力学和运动学都只研究物体机械运动的一个方面，而动力学则把两方面结合了起来。

随着生产的发展，工程技术中提出的动力学问题愈来愈多。机器和机械设计中的均衡问题、动反力问题、振动问题等，固不必说，属于动力学问题；就是在土建、水利工程的结构物的设计中，也愈益需要考虑动力学方面的问题，如振动、抗震等；在许多尖端科学技术中，如人造地球卫星和宇宙火箭的发射和运行等，更包含着许多动力学问题。虽然我们不可能在理论力学中讨论这些专门问题，但理论力学中的动力学基本理论，却是研究这些问题的必需基础。由此可见，掌握动力学基本理论，至为重要。

在动力学中，我们将把实际物体抽象成为质点、刚体和质点系三种模型。质点是指具有一定质量，但其大小和形状对所讨论的问题无关紧要，可以略而不计的物体。刚体的概念在静力学和运动

学里都曾讲到过，不同的是，在动力学里需要考虑刚体的质量及其分布情况。质点系则是一个广泛得多的概念，它是相互间有一定（几何的或力学的）联系的一些质点的总称。刚体可以认为是不变形的质点系。由若干质点和（或）刚体组成的系统也是质点系，有时就一般地称为系统。

质点系（包括刚体）动力学是我们将要讨论的主要问题和重点，而质点动力学却是基础。所以，在以后的讨论中，一般是先讨论质点动力学，然后加以推广，建立质点系动力学理论。

第十一章　动力学基本定律
质点运动微分方程

§11-1　牛顿运动定律　惯性坐标系

动力学的基本定律是牛顿在其《自然哲学之数学原理》一书中提出的三个定律，即通称的牛顿运动定律。这几个定律是：

第一定律　任何物体，如不受外力作用，将保持静止或作匀速直线运动。

第二定律　质点受到外力作用时，所产生的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。这一定律可用熟知的数学公式表示为：

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}, \tag{a}$$

其中 m 为质点的质量。

第三定律（即作用与反作用定律）　两物体间相互作用的力（作用力与反作用力）同时存在，大小相等，作用线相同而指向相反.

不受外力作用时，物体将保持静止的或匀速直线运动的状态，这是物体的属性，这种属性称为**惯性**。所以第一定律也称**惯性定律**，而匀速直线运动也称**惯性运动**。

由式(a)可见，设以相等的力作用于不同的质点，则质量 m 愈大的质点所产生的加速度 a 愈小，即愈不容易改变其运动状态，这就表示，质点的质量愈大，它的惯性也就愈大。所以，质点的质量是它的惯性的量度。

在古典力学里，一个物体的质量 m 被看作是一个常量，不因为物体的运动状态不同而改变。但是，根据相对论力学，物体的质

量将随运动速度而变①．不过，只有当物体运动的速度可与光速相比时，变化才显著．在古典力学里，所考察的物体的运动速度都远远小于光速，因而将物体的质量看作常量足够精确．

任一物体的质量 m 与它的重量 P 之间存在着如下关系：

$$P=mg \text{ 或 } m=P/g,$$

其中 g 是重力加速度．

应当注意，质量与重量是两个不同的概念．一个物体的质量是一定的，而它的重量则随着它在地面上的位置而变，因为地面上各地的 g 值不同——平地与高山不同，纬度 ϕ 不同的地区也不同．考虑到纬度的变化，国际上采用公式

$$g=9.7803(1+0.005288\sin^2\phi-0.000006\sin^2 2\phi)\mathrm{m/s^2}$$

来计算海拔为零处的 g 值．如要求很高，可通过实测来确定 g 值．在我国首都北京（$\phi\doteq 40°$），根据实测结果，$g=9.8012\mathrm{m/s^2}$，与由公式算得者很接近．在本书中，为了计算简便，取 $g=9.80\mathrm{m/s^2}$．

作用与反作用定律对于研究质点系的动力学问题特别重要．因为第二定律是就一个质点而言的，要将根据第二定律建立起来的质点动力学的理论推广应用于质点系，就必须利用作用与反作用定律．

除了第三定律外，第一定律和第二定律都涉及静止和加速度．而在运动学里曾指出，同一个物体，对于不同的坐标系来说，运动情况是不同的．于是就产生了这样的问题：牛顿定律里所说的静止或运动、速度和加速度，是对什么坐标系来说的？

牛顿在提出各定律之前，先引进了“绝对空间”的概念．所谓“绝对空间”，是与物质无关的、绝对不动的空间．按照牛顿的意见，他提出的定律只适用于质点在“绝对空间”内的运动，即质点在绝对

① 根据相对论力学，物体以速度 v 在一参考系内运动时，它的质量与速度的关系是：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

其中 m_0 是物体相对于参考系处于静止状态时的质量（称为**静止质量**），$\beta=v/c$，而 c 是光速。

静止的坐标系内的运动。当然，“绝对空间”是不存在的，宇宙间根本找不到绝对静止不动的坐标系。但牛顿引进“绝对空间”这一概念，就清楚地告诉我们，牛顿定律并不是对任何坐标系都适用，而只适用于某种坐标系。

适用牛顿定律的坐标系称为惯性坐标系。或者反过来说，牛顿定律只有在惯性坐标系中才成立。既然不可能找到绝对静止不动的坐标系，那末，什么样的坐标系可以作为惯性坐标系呢？只有靠观察和实验来验证。

实践结果证明，在绝大多数工程问题中，可取固结于地球的坐标系为惯性坐标系。只是对于某些必须考虑地球自转的影响的问题（如由地球自转而引起的河流冲刷，落体对铅直线的偏离等）才选取以地心为原点而三个轴指向三个“恒星”的坐标系作为惯性坐标系，即所谓地心坐标系。在研究太阳系行星运动时，则取日心坐标系为惯性坐标系，即，以太阳中心为坐标原点，三个坐标轴指向三个“恒星”。后面还将证明，凡是相对于惯性坐标系作匀速直线运动的坐标系，也是惯性坐标系（见§17-1）。在以后的论述中，如果没有特别指明，则所有运动都是对惯性坐标系而言的。并且约定，物体在惯性坐标系中的运动称为绝对运动，还习惯地将惯性坐标系称为固定坐标系或静坐标系，以区别于某些需要考虑其运动的坐标系。在实际问题中，除少数特别指明者外，都以固结于地球的坐标系为惯性坐标系。

§11-2 单位制和量纲

力学中有许多物理量，每个物理量都必须用一适当的单位来量度。由于某些物理量之间具有一定的关系，因而并不是每个物理量的单位都是可以任意规定的。在许多物理量中，我们以某几个量作为**基本量**，它们的单位称为**基本单位**，其它量的单位都可由基本单位导出，称为**导出单位**，而那些量也相应地称为**导出量**。

选取不同的基本单位，就形成不同的单位制。本书采用国际

单位制(SI)，以长度、时间和质量为基本量，它们的单位米(m)、秒(s)、千克(公斤，kg)为基本单位；其它量均为导出量，它们的单位则是导出单位。目前工程上也常用工程单位制，以长度、时间和力为基本量，单位是米(m)、秒(s)、公斤力(kgf)。

在国际单位制中，力是导出量，等于质量与加速度的乘积。设一个力使1千克质量产生1米/秒^{2}的加速度，则该力的大小为1牛顿，代号为牛(N)，即

$$1\mathrm{N}=1\mathrm{kg}\times 1\mathrm{m/s^2}=1\mathrm{kg\cdot m/s^2}。$$

在工程单位制中，质量是导出量，质量的单位是 $\mathrm{kgf\cdot s^2/m}$，这一单位并无特殊名称，通常就称为工程质量单位。

无论采用哪种单位制，导出量都可用几个基本量的组合表示出来．表示某一物理量是由哪几个基本量按什么规律组成的式子，称为该物理量的**量纲**或**因次**①．在国际单位制中，长度、时间和质量是基本量，它们的量纲分别用$[L]$、$[T]$、$[M]$表示，其它量的量纲都可表示为这三个量纲的函数。例如，速度的量纲是$[v]=[L][T]^{-1}$，加速度的量纲是$[a]=[L][T]^{-2}$，而力的量纲是$[F]=[M][L][T]^{-2}$．

对于工程单位制，各个量的量纲可以类似地得到。

应当注意，量纲与单位是两个不同的概念。一个物理量的量纲是一定的，但它的大小却可用不同的单位来量度。例如长度的量纲是$[L]$，但可用米、毫米、千米(公里)等作为量度长度的单位；时间的量纲是$[T]$，单位则可用秒、分、小时等；质量的量纲是$[M]$，却可用千克、克等作为单位。相似地，速度单位可以是米/秒、公里/小时等；而力的单位可以是牛、千牛等。

知道一个物理量的量纲，就不难确定它的单位并进行单位换算。例如，速度的量纲是$[L][T]^{-1}$，如长度以米计，时间以秒计，则速度的单位是米/秒，而1米/秒$=1$[千米/1000][小时/3600]$^{-1}$$=3.6$千米/小时。

① 有的把这种式子称为量纲式，而把基本量的指数称为量纲。

物理量的量纲还有一个重要作用，就是检验力学方程的正确性。因为在同一个方程中，各项的量纲必须相同（在作数字计算时，还必须单位相同）。虽然一个方程的各项的量纲相同时，并不能判定该方程是否正确；但如一个方程的各项的量纲不尽相同，则可以断定该方程必然是错误的。

§ 11-3　质点运动微分方程

设有一质点 M，质量为 m，作用于该质点的所有的力的合力为 $\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$，命质点的加速度为 $\boldsymbol{a}$，则

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i. \tag{11-1}$$

由运动学已知，当用质点 M 对于坐标原点 O 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表时它的位置时，质点的加速度是

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是质点的速度。于是方程(11-1)可改写为：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F}_i \text{ 或 } m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum\boldsymbol{F}_i. \tag{11-2}$$

这就是矢量形式的质点运动微分方程。

过原点 O 取直角坐标系 $Oxyz$，将方程(11-1)投影到各坐标轴上，有

$$ma_x=\sum X_i,\ ma_y=\sum Y_i,\ ma_z=\sum Z_i. \tag{11-3}$$

写成微分方程的形式，就得到直角坐标形式的质点的运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\sum X_i, m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sum Y_i, m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\sum Z_i. \tag{11-4}$$

设已知质点运动的轨迹曲线，以轨迹曲线上质点所在处为原点，取自然轴系 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$，将方程(11-1)投影到自然轴系上，有：

$$ma_\tau=\sum F_{i\tau},\ ma_n=\sum F_{in},\ ma_b=\sum F_{ib}. \tag{11-5}$$

但

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},\ a_n=\frac{v^2}{\rho};$$

而加速度在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影 $a_b=0$，于是

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_{i\tau},\ m\frac{v^2}{\rho}=\sum F_{in},\ \sum F_{ib}=0. \qquad (11\text{-}6)$$

这就是自然轴系形式的质点运动微分方程。

当质点作平面曲线运动时，如采用极坐标表示法，则质点的加速度为[公式(5-36)]

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta,$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分别为沿径向及横向的单位矢量，代入方程(11-1)，并将方程两边投影到 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向，就得到

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=\sum F_{ir}, \qquad m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=\sum F_{i\theta}. \qquad (11\text{-}7)$$

自然，所有的力在垂直于曲线平面的轴上的投影之和应等于零。

可以看出：

① 设已知质点的运动规律，须求质点所受的力，则不难用微分法求得解答。

② 设已知作用于质点的力，须求质点的运动规律，则归结为求解运动微分方程。在一般情况下，作用于质点的力可能是时间、质点的位置坐标、速度的函数，只有当函数关系较简单时，才能求得微方分程的精确解。如果函数关系复杂，求解将非常困难，有时只能满足于求出近似解。此外，求解微分方程时将出现积分常数，这些积分常数，须根据质点运动的初条件即初速度和初位置坐标来决定。所以，对于这一类问题，除了作用于质点的力以外，**还必须知道质点运动的初条件**，才能完全确定质点的运动。

顺便说明，对于受约束的非自由质点，微分方程中自然应包括质点所受的约束力，除此以外，质点的运动还必须满足约束对它施加的限制条件。关于约束力的方向，同在静力学中一样，决定于约束的性质；而约束力的大小则是未知量，应根据动力学方程求得。

对于质点系，原则上可以就每个质点写出运动微分方程。但是，由于各质点的运动以及所受的力都是互有关联的，就所有各

质点写出的不论什么形式的微分方程，必然是联立微分方程，在大多数情况下，要求得这些联立微分方程的精确解是非常困难的。因此，对于质点系的问题，只有在最简单的情况下才用本节讲述的方法求解，一般则将应用以后各章讲述的定理求解。

例 11-1 物体 A、B、C 质量分别为 m_1、m_2、m_3，用不能伸长的柔索与滑轮连接如图 11-1a 所示。物体 A 与斜面之间的摩擦系数为 f。不计滑轮与柔索的质量以及轮轴处的摩擦，设各物体由静止开始运动，求各物体的加速度。

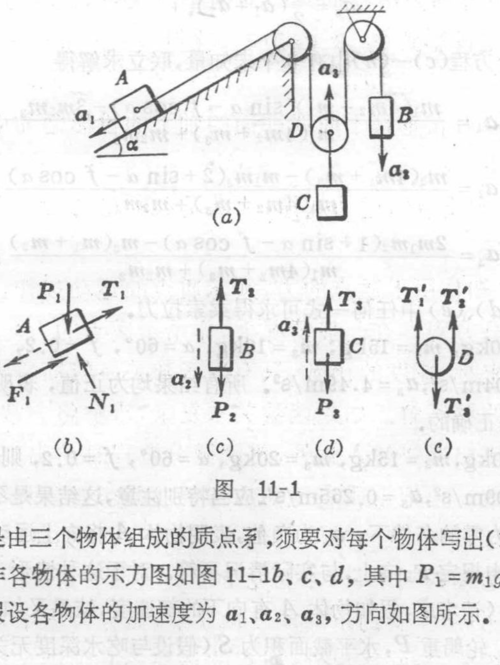

图 11-1

解 这是由三个物体组成的质点系，须要对每个物体写出(11-1)形式的方程。分别作各物体的示力图如图 11-1b、c、d，其中 $P_1 = m_1g$，$P_2 = m_2g$，$P_3 = m_3g$。假设各物体的加速度为 a_1、a_2、a_3，方向如图所示。三物体的动力学方程为

$$m_1a_1 = P_1\sin\alpha - T_1 - F_1, \tag{a}$$

$$0 = P_1\cos\alpha - N_1, \tag{b}$$

$$m_2a_2 = P_2 - T_2, \tag{c}$$

$$m_3a_3 = T_3 - P_3. \tag{d}$$

由方程(b)得 $N_1 = P_1\cos\alpha$，而 $F_1 = fN_1 = fP_1\cos\alpha$，于是($a$)成为

$$m_1a_1 = P_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - T_1. \tag{e}$$

方程(c)、(d)、(e)中有6个未知量，还须补充3个关系式才能求解。

首先，由于不计滑轮质量及轮轴处摩擦，滑轮两边柔索的拉力相等，所以$T'_1=T_1, T'_2=T_2, T'_1=T'_2$，从而有

$$T_1=T_2。\tag{f}$$

再由滑轮D的受力情况(图e)可知

$$T_3=T'_1+T'_2=T_1+T_2。\tag{g}$$

此外，因柔索不能伸长，于是由几何关系可得

$$a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)。\tag{h}$$

现在6个方程(c)—(h)中有6个未知量，联立求解得

$$a_1=\frac{m_1(4m_2+m_3)(\sin\alpha-f\cos\alpha)-3m_2m_3}{m_1(4m_2+m_3)+m_2m_3}g,$$

$$a_2=\frac{m_2(4m_1+m_3)-m_1m_3(2+\sin\alpha-f\cos\alpha)}{m_1(4m_2+m_3)+m_2m_3}g,$$

$$a_3=\frac{2m_1m_2(1+\sin\alpha-f\cos\alpha)-m_3(m_1+m_2)}{m_1(4m_2+m_3)+m_2m_3}g。$$

然后由(c)、(d)、(e)中任何一式可求得柔索拉力。

如$m_1=20\text{kg}$，$m_2=15\text{kg}$，$m_3=10\text{kg}$，$\alpha=60°$，$f=0.2$，则$a_1=3.94\text{m/s}^2$，$a_2=5.04\text{m/s}^2$，$a_3=4.49\text{m/s}^2$。所有结果均为正值，表明假设的各加速度之方向是正确的。

如$m_1=10\text{kg}$，$m_2=15\text{kg}$，$m_3=20\text{kg}$，$\alpha=60°$，$f=0.2$，则$a_1=-2.56\text{m/s}^2$，$a_2=3.09\text{m/s}^2$，$a_3=0.265\text{m/s}^2$。应当特别注意，这结果是不合理的。因为，在初速度为零的条件下，a_1为负值，表明物体A将向上运动，摩擦力$\boldsymbol{F}$应向下；而图中规定$\boldsymbol{F}_1$向上，与实际情况不符。对于这种情形，应当重新建立方程求解。(请考虑，假如物体A有向下的初速度，结果又如何？)

例11-2 轮船重P，水平截面积为S(假设与吃水深度无关)。由于某种原因，轮船从其平衡位置下沉一微小距离x_0，而在该位置的速度$v_0=0$，求此后轮船的运动。水的比重γ，不计水的阻力，并假设轮船只有上下运动而无摆动。

解 轮船只有上下运动(平动)，可作为质点看待。

取**平衡时**与船舷边缘同高的空间一点作为坐标原点，x轴铅直向下，如图11-2。设轮船在平衡位置时吃水深度为h，则当离开平衡位置x时的吃水

深度为$(h+x)$. 在平衡位置,水的浮力为$\gamma Sh=P$. 轮船在距离平衡位置x处时,受有重力P及水的浮力F,而$F=\gamma S(h+x)$. 因而轮船的运动微分方程为

$$\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=P-F=P-\gamma S(h+x),$$

即 $$P\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\gamma Sgx.$$

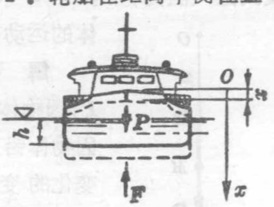

图 11-2

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程,我们可以直接利用微分方程的理论求得它的解,但在这里,我们将用先分离变量再进行积分的方法求解这一方程. 为此,将这方程写成

$$P\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\gamma Sgx.$$

再改写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\gamma Sg}{P}x,$$

即 $$v\mathrm{d}v=-\frac{\gamma Sg}{P}x\,\mathrm{d}x,$$

积分,取初条件$v_0=0$及x_0,于是得

$$\frac{v^2}{2}=-\frac{\gamma Sg}{2P}(x^2-x_0^2),$$

即 $$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\gamma Sg}{P}}\sqrt{x_0^2-x^2}.$$

再分离变量,成为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=\sqrt{\frac{\gamma Sg}{P}}\mathrm{d}t$$

积分,得 $$\sin^{-1}\frac{x}{x_0}\Big|_0^t=\sqrt{\frac{\gamma Sg}{P}}t\Big|_{x_0}^{x}.$$

令$\sqrt{\frac{\gamma Sg}{P}}=p$,最后就得到轮船的运动方程

$$x=x_0\sin\left(pt+\frac{\pi}{2}\right)=x_0\cos pt.$$

可见,轮船沿铅直方向作简谐振动,振幅为x_0,周期$\tau=2\pi/\sqrt{P/\gamma Sg}$. 注意,上面的运动方程是以**轮船平衡位置为坐标原点**得到的;如果取其它位置为坐标原点,虽然轮船的运动仍是简谐振动,但微分方程及最后的运动方程都将与上面的形式不同.

例 11-3 质量为m的物体M在地面附近以初速度v_0降落. 设物体