

不分明化拓扑空间

张广济 编著

大连海事大学出版社

不分明化拓扑空间

张广济 编著

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不分明化拓扑空间/张广济编著. — 大连:大连海事大学出版社, 1999.3

ISBN 7-5632-1261-2

I.不… II.①张… III.拓扑空间 IV.0189.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40542 号

大连海事大学出版社出版

(大连市凌水桥 邮政编码 116026 电话 4684394)

大连海事大学印刷厂印刷 大连海事大学出版社发行

1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:8

字数:194 千字 印数:1~500 册

责任编辑:刘宗德 封面设计:张 娜

定价:20.00 元

本书由

中共大连市委、大连市人民政府资助出版

The published book is sponsored
by the Dalian Municipal Government

大连市学术专著资助出版评审委员会

名誉主任 楼南泉 林纪方

主 任 司玉琢

副 主 任 高春武 吴厚福 何 杰

委 员 梁宗巨 王子臣 李寿山 王逢寿 汪榕培

夏德仁 罗均炎

自然科学专家评审组

组 长 钟万勰(大连理工大学 院士、博导、教授)

副组长 王关林(辽宁师范大学 博导、教授)

成 员 权伍畅(大连海事大学 硕导、教授)

张玉奎(中科院大连化学物理研究所 博导、研究员)

张鸿庆(大连理工大学 博导、教授)

张耀光(辽宁师范大学 硕导、教授)

前 言

1965年 L. A. Zadeh 首先引入了不分明集,在此基础上 1968年 C. L. Chang 提出了 Fuzzy 拓扑空间概念的第一篇论文,展开了对 Fuzzy 拓扑学(即不分明拓扑学)的研究。其后的二十年间,经过 C. K. Wong, R. Lowen, R. H. Warren, R. Hutton 以及我国的蒲保明、刘应明、王国俊等海内外学人的共同努力,分别讨论了 Fuzzy 拓扑学的各个专题,使 Fuzzy 拓扑学从起初的模仿性研究走上了创新的道路。层次结构的特点使它具有了不同于一般拓扑学的特有风格,与完备格代数结构的紧密联系又赋予了它以新的生命力。它从幼稚变得成熟,从肤浅走向深度。作为一门独立的学科,可以说它已经是根深叶茂了。

然而,在上述学者的论文中,一个 Fuzzy 拓扑空间都被定义为对于有限交和任意并运算封闭的不分明集族。不难看出,他们还是以传统的方式来研究不分明专题的。一个新奇的方法是使用不分明化的方法,更确切地说,是用不分明逻辑的语义方法来讨论不分明拓扑。不分明化拓扑便是近年来在此基础上发展起来的一个新的研究领域。

集合是现代数学的基本概念,点集拓扑把几何图形看作点的集合,再把集合看作一个用某规律连结其中元素的空间。不分明集合一提出,“不分明”观念也渗透到许多数学分支。不分明拓扑便是经典点集拓扑向不分明集范畴移植的结果,不分明拓扑在国内有众多的研究者,发展很快。其他还有不分明线性空间,不分明逻辑,不分明映射,不分明控制等等,不一而足。

集合论可看作为数理逻辑的一个分支,也是一门现代数学,是

各个数学分支的共同语言和基础。数理逻辑是研究推理逻辑的,采用数学符号化的方法给出推理规则来建立推理体系。在数理逻辑中研究的主要对象是各种演算。演算这一概念包括这样的基本成份:此演算的(形式)语言,此演算的公理、推理规则。演算的这一概念容许我们对证明这个概念给出严格数学定义,并获得关于证明某理论的这个或那个命题的不可能性的精确叙述。演算的研究组成了数理逻辑的语法部分。在演算中证明的(语法)概念的更深入研究形成了数理逻辑的一个独立分支,通常称为证明论。与演算的语法研究的同时,还有数理逻辑的形式语言的语义研究。语义的基本概念是一个形式语言的表达式(公式、矢列等等)的真性这一概念。语义概念也得到了精确的数学定义,它使得有可能对各种真性概念作出系统的严格的研究。谓词演算语言的传统的语义组成了数理逻辑的一个很丰富的分支。演算使得数学和其他科学的很多部分能够形式化。上面提到的命题演算和谓词演算是有关正确推理规律最古老的科学逻辑的形式化。这些形式化的创立和研究在逻辑作为一门科学的发展中是一个重要的阶段。正是集合理论形式刻划的可能性对数学显得特别重要。形式刻划“素朴”集论的基本结构的演算原来是如此的丰富,以致使得出现在现实数学实践中的任意集论的论证都可在这个演算中形式地重新构造出。经典逻辑称为二值逻辑。取不分明命题的真值为 $[0, 1]$ 中的数的不分明逻辑称为连续值逻辑。基于连续值逻辑上的拓扑便称为不分明化拓扑。不分明化拓扑是用对于不分明谓词所规定的逻辑演算来构造点集拓扑中集论的论证。这些逻辑演算的基本公式我们将在第零章:不分明逻辑中予以介绍。

不分明化拓扑的成果属于我国数学家应明生和沈继忠等人,不分明化拓扑学也是数学领域中的一个年轻的分支。应明生于1991年发表在《Fuzzy Sets and System》的第一篇论文“A new approach for fuzzy topology”开创了不分明拓扑的一个新的方向。其

后,应明生、沈继忠的多篇论文在逻辑的语义的框架下分别深入地讨论了紧性、分离性、连通性、一致性、仿紧性、拓扑群等拓扑学中的重要内容。作者也用逻辑的语义的方法刻划了拓扑学中半开集、半连函数, θ -闭包、 S -紧性、 S -闭性、 S -分离性等内容。尽管不分明化拓扑的研究方兴未艾,但短短的五、六年间,不分明化拓扑已形成了较完整的体系。能较系统地介绍不分明拓扑学中这样一个新的方向——不分明化拓扑是作者的心愿。但以作者的水平而论,实不敢担当撰写第一本介绍不分明化拓扑的专著。几经犹豫,终下定决心写出了这本小册子。本书的内容是参照应明生、沈继忠等人发表在国内外的不分明化拓扑学的学术论文(本书直接引用了他们公开发表的许多重要成果)及作者本人的某些研究成果综合而成的,疏漏之处一定不在少数,所以作者恳切希望各位学者多多赐教,特别是本书介绍的理论有许多都正在发展之中。作者非常希望本书能起到抛砖引玉的作用,以期在近年内能见到更好的专著出版。

我们在上面谈到,不分明化拓扑是用逻辑的语义的方法来讨论不分明拓扑,是不分明拓扑的一个新的方向。同时也谈到出现在现实数学实践中的任意集论的论证都可在逻辑的演算中形式地重新构造出来。因此,逻辑的语义的方法也适用于其他一些不分明数学分支的讨论。比如应用于不分明群的讨论中便产生了不分明化群的理论(我们也做为附录安排在书末)。我们相信,这一理论将在现代数学领域中产生较大的影响。我们期待着更多的关于不分明化理论的数学论文和专著问世。

大连市学术专著资助出版评审委员会对本书给予了肯定并列入大连市(1998年上半年)优秀学术专著给予出版资助。本书的出版同时也得到了大连大学的资助,在此作者表示衷心的感谢!

目 录

第零章 不分明逻辑	(1)
§ 1 预备知识	(1)
§ 2 不分明命题与逻辑演算	(10)
§ 3 不分明逻辑公式的化简	(14)
§ 4 不分明逻辑的演绎推理	(19)
第一章 不分明化拓扑空间与连续函数	(24)
§ 1 不分明化拓扑空间	(24)
§ 2 不分明化拓扑的基	(27)
§ 3 导集和闭包	(30)
§ 4 内部和边界	(37)
§ 5 Moore-Smith 收敛	(40)
§ 6 子空间	(45)
§ 7 连续函数	(48)
§ 8 不分明化拓扑中的半开集和半连续函数	(54)
§ 9 θ -闭包和 θ -连续函数	(61)
§ 10 Kuratowski 十四集定理	(72)
第二章 积空间, 商空间	(76)
§ 1 积空间	(76)
§ 2 商空间	(84)
第三章 不分明化拓扑空间的可数性公理	(87)
§ 1 不分明集合的不分明可数性	(87)
§ 2 第一和第二可数的不分明化拓扑空间	(90)
§ 3 可分的空间和 Lindelöf 空间	(96)

第四章	不分明化拓扑空间中的连通性	(99)
§ 1	隔离子集	(99)
§ 2	连通空间	(102)
§ 3	局部连通空间	(108)
第五章	不分明化拓扑空间中的分离性公理	(116)
§ 1	分离性公理	(116)
§ 2	分离性公理之间的关系	(127)
第六章	不分明化拓扑空间中的紧致性	(135)
§ 1	紧致性	(135)
§ 2	某些紧致性质	(143)
§ 3	Tychonoff 定理的推广和应用	(148)
第七章	不分明化拓扑空间中的仿紧性、S-紧性和 θ -紧性 ...	
		(153)
§ 1	不分明化拓扑中的局部有限性	(153)
§ 2	不分明化拓扑中的仿紧性	(160)
§ 3	S-紧性和 θ -紧性	(166)
第八章	不分明化一致空间	(177)
§ 1	不分明化一致空间	(177)
§ 2	不分明化一致拓扑	(179)
§ 3	不分明化一致连续和积不分明化一致结构	(186)
第九章	不分明化拓扑群	(193)
§ 1	不分明化拓扑群	(193)
§ 2	子群和商群	(199)
§ 3	同态与同构	(204)
§ 4	不分明化拓扑群的积	(207)
§ 5	连通群	(212)
附录	不分明化群	(216)
§ 1	不分明化群	(216)

§ 2 不分明化正规子群	(220)
§ 3 同态基本定理	(229)
参考文献.....	(233)

第零章 不分明逻辑

§ 1 预备知识

在介绍不分明逻辑之前,首先回顾一下普通逻辑中关于命题及其逻辑演算的基本知识。

意义明确且能判断其真假的陈述句叫做命题,常用大写字母 P, Q, R, S 等表示,如 P :张君是大学生,就是个命题。

设 $\mathcal{U}$ 为一些命题的集合,作映射

$$T: \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}, P \mapsto T(P) = \begin{cases} 1, P \text{ 真} \\ 0, P \text{ 假} \end{cases}$$

称 $T(P)$ 为命题 P 的真值。

考虑这样一个陈述句:“ x 是大学生”。由于 x 是变元,无法判定其真假,它不是个命题;如果将某一个具体对象 x_0 赋于 x ,那么“ x_0 是大学生”便是个命题。这种陈述句叫做谓词, x 称为个体变元,它是句子的主语,“是大学生”是谓语,可用符号 $H(x)$ 来表示“ x 是大学生”。

谓词可视为一个命题函数:

$$H: X \rightarrow \mathcal{U}, x_0 \mapsto H(x_0)$$

其中 X 为与之有关的对象集,它是个体变元的变化范围,通常我们称其为论域。令

$$H^* := \{x \in X \mid T(H(x)) = 1\}$$

显然 $H^* \in \mathcal{P}(X)$, 称集合 H^* 为谓词 H 的集合表示或称为真域,为了简便将 H^* 仍记为 H 。

同理,陈述句“ x 与 y 谈话”也是一个谓词,它的个体变元(即

主语)是 x 和 y , 谓语是“谈话”, 可用符号 $R(x, y)$ 来表示, 称之为二元谓词, 它的集合表示是一个二元关系:

$$R := \{(x, y) \in X \times Y \mid T(R(x, y)) = 1\}$$

显然 $R \in \mathcal{P}(X \times Y)$, 这里 X, Y 均为论域。

类似地还有三元谓词, 四元谓词等。

设 $\mathcal{U}$ 为一些命题组成的集合, 在 $\mathcal{U}$ 中规定逻辑演算: 非运算, 记为 $\neg$; 或运算, 记为 $\vee$; 且运算, 记为 $\wedge$; 蕴涵运算, 记为 $\rightarrow$; 等价运算, 记为 $\leftrightarrow$; 除了 $\neg$ 为一元运算外, 其它四种均为二元运算:

(1) $\neg: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, P \mapsto \neg P$, 其真值表达式为

$$T(\neg P) := 1 - T(P)$$

(2) $\vee: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, (P, Q) \mapsto P \vee Q$, 真值

$$T(P \vee Q) := T(P) \vee T(Q)$$

(3) $\wedge: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, (P, Q) \mapsto P \wedge Q$, 真值

$$T(P \wedge Q) := T(P) \wedge T(Q)$$

这三个运算的演算法则可由下面的真值表 1 和表 2 唯一确定。

表 1 真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 2 真值表

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

此外, 不难验证 $(\mathcal{U}, \vee, \wedge, \neg)$ 构成一个布尔代数。

(4) $\rightarrow: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, (P, Q) \mapsto P \rightarrow Q$, 读作“若 P 则 Q ”, 其真值表见表 3。注意, 真值表相同的命题被看作相等的命题。从表 3 可以看出:

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q = \neg P \vee (P \wedge Q)$$

(5) $\leftrightarrow: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, (P, Q) \mapsto P \leftrightarrow Q$, 读作“ P 等价于 Q ”, 其真值表见表 4, 从该表可以看出:

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\ &= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \end{aligned}$$

表 3 真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee (P \wedge Q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

表 4 真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

如同上述命题逻辑演算一样, 亦可规定谓词的逻辑演算 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。当它们的个体变元取定值时, 就变成命题的逻辑演算。谓词可由集合来表示, 谓词的逻辑演算 $\vee, \wedge, \neg$ 与集合运算 $\cup, \cap, \sim$ 相对应。比如, $H(x) \wedge P(x)$ 对应集合 $H \cap P$, $H(x) \vee R(x, y)$ 对应集合 $(H \times Y) \cup R$, $\neg S(x, y) \wedge R(y, z)$, 对应集合 $((\sim S) \times Z) \cap (X \times R)$ 。

下面介绍命题公式与谓词公式。

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ 这些逻辑演算称为联结词。不包含任何联结词的命题叫做原子命题, 至少包含一个联结词的命题称为复合命题。

设 P 和 Q 是任意两个命题, 则 $\neg P, P \vee Q, (P \vee Q) \vee (P \rightarrow Q), P \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$ 等都是复合命题。

若 P 和 Q 都是命题变元, 则上述各式均称作命题公式, P 和 Q 叫做命题公式的分量。

命题公式是没有真假值的, 只有当一个命题公式中的命题变元用确定的命题代入时, 才得到一个命题。这个命题的真值依赖于代换变元的那些命题的真值。

此外, 并不是由命题变元, 联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式。下面是命题演算的合式公式的递归定义:

- (1) 单个命题变元本身(即原子命题)是一个合式公式;
- (2) 如果 P 是合式公式, 那么 $\neg P$ 也是合式公式;
- (3) 如果 P 和 Q 是合式公式, 那么 $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 都是合式公式;

(4) 当且仅当能够有限次使用上述(1), (2), (3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。

由原子命题 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 生成的合式可记作 $F(P_1, P_2, \dots, P_n)$, 其中 P_i 是命题变元($i = 1, 2, \dots, n$)。

谓词不同于命题在于谓词有个体变元 $x, y, \dots$ 。在介绍谓词公式之前, 先介绍两种量词, 它们是对个体变元的约束:

- (1) 全称量词 $\forall: \forall x$ (对所有的 x);
- (2) 存在量词 $\exists: \exists x$ (存在一个 x)。

我们来看几个例子:

(1) 设 $P(x, y)$ 表示“ x 与 y 有关系 P ”, 则 $(\forall x)P(x, y)$ 表示“对任意 x, x 与 y 有关系 P ”, 即“所有的 x 都与 y 有关系 P ”, 这里 x 是约束变元, y 是自由变元; 只要对自由变元取一固定值 y_0 , 那

么 $(\forall x)P(x, y_0)$ 就是一个命题,即“所有的 x 都与 y_0 有关系 P ”。

(2)设 $P(x)$ 表示“ x 是人”, $F(x, y)$ 表示“ x 是 y 的父亲”, $M(x, y)$ 表示“ x 是 y 的母亲”,那么谓词“ x 是 y 的外祖父”可表示为

$$(\exists z)(P(z) \wedge F(x, z) \wedge M(z, y))$$

其中 z 是约束变元, x, y 是自由变元;只要取定 $x = x_0, y = y_0$,上式便是一个命题,即“ x_0 是 y_0 的外祖父”。

(3)假设 $M(x)$ 表示“ x 是人”, $A(x)$ 表示“ x 步行”, $B(x)$ 表示“ x 骑自行车”, $C(x)$ 表示“ x 口渴”, $W(x, y)$ 表示“ x 饮 y ”, $H(y)$ 表示“ y 是泉水”,则命题“任何人,如果他步行或骑自行车且口渴,那么他一定饮泉水”,可用如下的谓词公式表示:

$(\forall x)((M(x) \wedge (A(x) \vee B(x)) \wedge C(x)) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge W(x, y)))$ 因为, x, y 都是约束变元,故以上谓词公式是一个命题,可以把命题视为不具有自由变元的谓词。

n 元谓词公式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为原子谓词公式,如果它不能分解,其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为客体变元,因此原子谓词公式包括下述形式的各种特例,如: $Q, P(x), P(x, y), P(f(x), y), P(x, y, z), P(a, y)$ 等。

下面给出谓词演算的合式公式的递归定义:

(1)原子谓词公式是合式公式。

(2)若 P 是合式公式,则 $\neg P$ 也是一个合式公式。

(3)若 P 和 Q 都是合式公式,则 $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 都是合式公式。

(4)若 P 是合式公式, x 是 P 中出现的任何变元,则 $(\forall x)P$ 和 $(\exists x)P$ 都是合式公式。

(5)只有经过有限次地使用规则(1), (2), (3), (4)所得到的公式是合式公式。

谓词合式公式简称为谓词公式。

设 $F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为命题公式, $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为命题变元, F 的真值 $T(F)$ 可表示为一个布尔函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $x_i = T(p_i) \in \{0, 1\} (i = 1, 2, \dots, n)$, 即

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

如果对于 $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, 恒有

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

那么相应的命题公式 $F_1(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 与 $F_2(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 对一切变元 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 来说, 它们的真值相等, 这时我们称 $F_1(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 与 $F_2(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 是等价命题; 等价命题被视为同一命题, 记为 $F_1(p_1, p_2, \dots, p_n) = F_2(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 。

对于谓词公式, 当取定个体变元后, 它对应一个布尔函数。

设 $F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为命题公式, $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为命题变元。若将命题变元代入任何确定的命题, 均有 $T(F) = 1$, 则称 F 为永真式(重言式, 即定理); 若将命题变元用任何确定的命题取代, 恒有 $T(F) = 0$, 则称 F 为永假式(矛盾式)。

永真式对应的布尔函数 $f \equiv 1$, 永假式对应的布尔函数 $f \equiv 0$ 。

设 $F(P_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, p_n(y_1, y_2, \dots, y_m))$ 为谓词公式, $P_1(y_1, y_2, \dots, y_m), P_2(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, P_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 为谓词变元, $y_1, y_2, \dots, y_m$ 为个体变元。如果对所有谓词变元都取确定的谓词, 且对所有个体变元都代以确定的对象, 那么就叫做给出谓词公式的一次指派。我们用 E 表示 F 的一切指派所组成的集合。

如果对于 E 中的一切指派, 所得到的命题都真, 则称 F 是永真谓词公式(定理); 若对 E 中一切指派, 所得到的命题都假, 则称 F 是永假谓词公式, 永真谓词公式 F , 表示为 $\models F$ 。

如果对于 E 有一个子集 E' 中的一切指派, 所得到的命题都