



新课程学习能力评价课题研究资源用书

主编 刘德 林旭

编写 新课程学习能力评价课题组

中国教育学会《中国教育学刊》推荐学生用书

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING
STUDY

配青岛版

数学 八年级下册

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记



光明日报出版社



新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主 编 刘 德 林 旭

本册主编 鞠立杰

本册编委 黄海涛 韩茂义 王淑芳

数学 八年级下册

配青岛版

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手. 数学. 八年级. 下册/刘德, 林旭主编. —北京: 光明日报出版社, 2009. 11
配青岛版

ISBN 978-7-5112-0247-5

I. 学… II. ①刘… ②林… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159725 号

学习高手

数学/八年级下册(青岛版)

主 编: 刘 德 林 旭

责任编辑: 温 梦

策 划: 聂电春

版式设计: 邢 丽

责任校对: 徐为正

责任印制: 胡 骑

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市崇文区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078249(咨询)

传 真: 010-67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbbs@gmw.cn

法律顾问: 北京市华沛德律师事务所张永福律师

印 刷: 山东滨州明天印务有限公司

装 订: 山东滨州明天印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社发行部联系调换。

开 本: 890×1240 1/32

字 数: 290 千字

印 张: 10

版 次: 2009 年 11 月第 1 版

印 次: 2009 年 11 月第 1 次

书 号: ISBN 978-7-5112-0247-5

定价: 16.90 元

版权所有 翻印必究

目录

第7章 二次根式 1

本章要点导读 1

7.1 二次根式及其性质 2

高手支招1 细品教材 2

高手支招2 归纳整理 5

高手支招3 典例精析 5

高手支招4 链接中考 9

高手支招5 思考发现 10

高手支招6 体验成功 10

7.2 二次根式的加减法 14

高手支招1 细品教材 14

高手支招2 归纳整理 16

高手支招3 典例精析 16

高手支招4 链接中考 20

高手支招5 思考发现 20

高手支招6 体验成功 21

7.3 二次根式的乘除法 23

高手支招1 细品教材 23

高手支招2 归纳整理 25

高手支招3 典例精析 26

高手支招4 链接中考 29

高手支招5 思考发现 30

高手支招6 体验成功 30

本章总结 35

第8章 平面图形的全等与相似 ...

..... 40

本章要点导读 40

8.1 全等形与相似形 41

高手支招1 细品教材 41

高手支招2 归纳整理 42

高手支招3 典例精析 42

高手支招4 链接中考 45

高手支招5 思考发现 46

高手支招6 体验成功 46

8.2 全等三角形 49

高手支招1 细品教材 49

高手支招2 归纳整理 50

高手支招3 典例精析 50

高手支招4 链接中考 52

高手支招5 思考发现 53

高手支招6 体验成功 54

8.3 怎样判定三角形全等 58

高手支招1 细品教材 58

高手支招2 归纳整理 60

高手支招3 典例精析 60

高手支招4 链接中考 64

高手支招5 思考发现 65

高手支招6 体验成功 66

8.4 相似三角形	70	9.1 锐角三角比	113
高手支招 1 细品教材	70	9.2 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角比 ...	
高手支招 2 归纳整理	72		113
高手支招 3 典例精析	72	高手支招 1 细品教材	113
高手支招 4 链接中考	75	高手支招 2 归纳整理	117
高手支招 5 思考发现	76	高手支招 3 典例精析	118
高手支招 6 体验成功	76	高手支招 4 链接中考	121
8.5 怎样判定三角形相似	80	高手支招 5 思考发现	122
高手支招 1 细品教材	80	高手支招 6 体验成功	123
高手支招 2 归纳整理	83	9.3 用计算器求锐角三角比 ...	
高手支招 3 典例精析	83		127
高手支招 4 链接中考	89	高手支招 1 细品教材	127
高手支招 5 思考发现	90	高手支招 2 归纳整理	129
高手支招 6 体验成功	91	高手支招 3 典例精析	129
8.6 相似多边形	96	高手支招 4 链接中考	132
高手支招 1 细品教材	96	高手支招 5 思考发现	133
高手支招 2 归纳整理	97	高手支招 6 体验成功	134
高手支招 3 典例精析	97	9.4 解直角三角形	137
高手支招 4 链接中考	100	9.5 解直角三角形的应用 ...	137
高手支招 5 思考发现	101	高手支招 1 细品教材	137
高手支招 6 体验成功	101	高手支招 2 归纳整理	142
本章总结	106	高手支招 3 典例精析	142
第 9 章 解直角三角形	112	高手支招 4 链接中考	148
本章要点导读	112	高手支招 5 思考发现	149

高手支招 6 体验成功	150
本章总结	155
第 10 章 数据离散程度的度量	161
本章要点导读	161
10.1 数据的离散程度	162
10.2 极差	162
高手支招 1 细品教材	162
高手支招 2 归纳整理	163
高手支招 3 典例精析	163
高手支招 4 链接中考	166
高手支招 5 思考发现	167
高手支招 6 体验成功	167
10.3 方差与标准差	172
高手支招 1 细品教材	172
高手支招 2 归纳整理	173
高手支招 3 典例精析	174
高手支招 4 链接中考	179
高手支招 5 思考发现	180
高手支招 6 体验成功	180
10.4 用科学计算器计算方差和 标准差	186
高手支招 1 细品教材	186
高手支招 2 归纳整理	187

高手支招 3 典例精析	188
高手支招 4 链接中考	191
高手支招 5 思考发现	191
高手支招 6 体验成功	192
本章总结	195
第 11 章 几何证明初步	201
本章要点导读	201
11.1 定义与命题	202
高手支招 1 细品教材	202
高手支招 2 归纳整理	204
高手支招 3 典例精析	205
高手支招 4 链接中考	209
高手支招 5 思考发现	209
高手支招 6 体验成功	210
11.2 为什么要证明	214
高手支招 1 细品教材	214
高手支招 2 归纳整理	215
高手支招 3 典例精析	215
高手支招 4 链接中考	218
高手支招 5 思考发现	219
高手支招 6 体验成功	219
11.3 什么是几何证明	225
高手支招 1 细品教材	225
高手支招 2 归纳整理	227

高手支招 3 典例精析	228
高手支招 4 链接中考	230
高手支招 5 思考发现	231
高手支招 6 体验成功	231
11.4 三角形内角和定理	236
高手支招 1 细品教材	236
高手支招 2 归纳整理	237
高手支招 3 典例精析	237
高手支招 4 链接中考	240
高手支招 5 思考发现	240
高手支招 6 体验成功	241
11.5 几何证明举例	245
高手支招 1 细品教材	245
高手支招 2 归纳整理	246

高手支招 3 典例精析	246
高手支招 4 链接中考	250
高手支招 5 思考发现	250
高手支招 6 体验成功	251
11.6 反证法	255
高手支招 1 细品教材	255
高手支招 2 归纳整理	256
高手支招 3 典例精析	257
高手支招 4 链接中考	260
高手支招 5 思考发现	260
高手支招 6 体验成功	260
本章总结	263
附录 教材习题点拨	268

第7章 二次根式



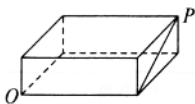
本章要点导读

BENZHANGYAO DIANDAODU

知识要点	课标要求	学习策略
二次根式及其性质	1. 理解二次根式的意义和性质,会运用二次根式的定义和性质判断二次根式是否有意义,即找出二次根式有意义的条件; 2. 会化简$\sqrt{a^2}$,能运用$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$进行有关的计算; 3. 会用积和商的算术平方根的性质化简二次根式; 4. 理解最简二次根式的概念,会把一个二次根式化为最简二次根式.	1. 在找二次根式有意义的条件时,要注意$\sqrt{a}$的非负性,$a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$; 2. 应用积和商的算术平方根的性质化简时,应考虑公式的使用条件; 3. 化简时要分解因式(数),化去根号内的分母时,要找出分子、分母同乘以的最简数(式).
二次根式的加减及应用	1. 理解同类二次根式的概念,会合并同类二次根式; 2. 理解二次根式的加减法法则,并熟练地进行二次根式的加减法运算.	1. 判断同类二次根式前首先把各二次根式化为最简二次根式; 2. 二次根式的加减即合并同类二次根式,类似于合并同类项,只把系数相加减即可,被开方数不变.
二次根式的乘除及应用	1. 理解二次根式乘除法公式及运用条件,熟练地进行二次根式的乘除运算及乘除混合运算; 2. 能熟练地进行二次根式的加、减、乘、除、乘方的混合运算.	1. 应用二次根式的乘除法公式时,应注意公式的使用条件; 2. 混合运算的运算顺序同有理数的运算顺序一致; 3. 二次根式的乘除法公式和积、商的算术平方根的性质互为逆运算,计算和化简时要灵活应用.



7.1 二次根式及其性质



爱整洁的小丽天天在家里打扫卫生.有一次小丽打扫房间时,发现一只壁虎在房间地面上的一角的 O 点,紧盯着天花板上另一角的 P 点的一只苍蝇,垂涎欲滴,如图所示.又好奇又爱动脑筋的小丽想:这只壁虎按什么路线走才能尽快捕到猎物呢?如果请你帮助解决,你有什么办法呢?这要用到本节的知识.



高手支招① 细品教材

一、二次根式的概念 ★★★

一般地,我们把形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式.“ $\sqrt{\quad}$ ”叫做二次根号,二次根号下的“ a ”叫做被开方数.

学习理解二次根式的概念要从以下四个方面把握:

1. 二次根式必须含有“ $\sqrt{\quad}$ ”,像 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{(-2)^2}$ 、 $\sqrt{a^2+1}$ 、 $\sqrt{3m}(m \geq 0)$ 等都是二次根式.

2. 含有“ $\sqrt{\quad}$ ”的式子不一定是二次根式,这是因为当被开方数大于或等于零时,是二次根式;当被开方数小于零时,就不是二次根式.

3. 在二次根式 $\sqrt{a}$ 中, a 可以是数也可以是代数式,但必须是非负的数或代数式.

4. 二次根式 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 是 a 的算术平方根,所以 $\sqrt{a} \geq 0$.

【示例】判断下列各式哪些是二次根式.

(1) $\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{-2}$; (3) $\sqrt{x^2+1}$.

思路分析: 判别一个式子是不是二次根式,就看它是否满足两个条件:

①含有“ $\sqrt{\quad}$ ”; ②被开方数是非负数. 显然(1)满足这两个条件;对于(3),由于 $x^2 \geq 0$,则 $x^2+1 > 0$ 恒成立,所以(3)也满足这两个条件;只有(2)被开方数小于

判断一个式子是不是二次根式,一定要紧扣定义,看所给的式子是否同时具备二次根式的两个特征:

- (1)带二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”;
- (2)被开方数大于或等于0.只有同时满足这两个特征,才是二次根式;否则,它就不是二次根式.

零,不满足条件②.

解:(1)(3)是二次根式.

二、二次根式的性质 ★★★

1. $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$.

根据平方根的定义,若 $x^2 = a$, 则 x 是 a 的平方根. 反之, 如果 x 是 a 的平方根, 则有 $x^2 = a$. 因为 $\sqrt{a}$ 是 a 的一个平方根, 所以 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$.

这个二次根式的基本性质从两个方面说明被开方数与算术平方根之间的关系: 一方面说明: 一个非负数的算术平方根的平方还是这个数; 另一方面说明: 这个式子反过来可以写成 $a = (\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$, 也就是说: 一个非负数可以写成它的算术平方根的平方的形式.

【示例】计算: $(2\sqrt{5})^2$.

思路分析: 先利用积的乘方的性质 $(ab)^2 = a^2 b^2$ 变形, 再利用二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 进行计算.

解: $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$.

2. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ 从这个等式的左右两边可知: $\sqrt{a^2}$ 中 a 的取值

范围是全体实数, 即不论 a 取什么实数, $\sqrt{a^2}$ 一定有意义.

比较 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 与 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 可知, 两者的最大区别是

被开方数不同: 前者被开方数是非负数; 后者被开方数的底数可为全体实数.

【示例】计算: $\sqrt{(-10)^2}$.

思路分析: 可根据 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 进行化简.

解: $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$.

3. 积的算术平方根的性质

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$, 也就是说: 积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

在这个性质中, a, b 可以是数, 也可以是代数式, 无论是数, 还是代数式, 都必须满足 $a \geq 0, b \geq 0$. 只有满足这个条件, 才能运用这个性质进行计算或化简; 否则, 等式右边就没有意义了, 等式也就不成立了.

1. $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根, 因为非负数才有算术平方根, 所以总有 $a \geq 0$;

2. 化简 $\sqrt{a^2}$ 时, 一定要先化为 $|a|$ 的形式, 再根据 a 的正负性确定结果, 这是简化计算的重要过程, 也是防止出错的有效方法.



这个性质的应用是化简二次根式,如果一个二次根式的被开方数(式)中有开得尽方的因数(式),将其移到根号外,以达到化简的目的,化简时常常需要分解因式(数).

【示例】计算:(1) $\sqrt{16 \times 9}$;

(2) $\sqrt{81 \times 121}$.

思路分析:利用积的算术平方根等于积中各因数的算术平方根这个性质,可直接计算,如果被开方数是完全平方数,就要移到根号外.

解:(1) $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$;

(2) $\sqrt{81 \times 121} = \sqrt{81} \times \sqrt{121} = 9 \times 11 = 99$.

4. 商的算术平方根的性质

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$,也就是说商的算术平方根等于被开方数中被除式的

算术平方根除以除式的算术平方根.

(1)在运用商的算术平方根的性质解决相关计算问题时,要注意成立的条件,即被开方数的分子为非负数,分母大于零.

(2)把根号里的分母移到根号外时,必须仍旧写在分母的位置上,不能错误地写在分子的位置上.

【示例】计算:(1) $\sqrt{\frac{7}{144}}$; (2) $\sqrt{\frac{9a}{169}}$.

思路分析:利用商的算术平方根等于被开方数中被除式的算术平方根除以除式的算术平方根这个性质,直接计算,如果被开方数是完全平方数,就要进行化简.

解:(1) $\sqrt{\frac{7}{144}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{144}} = \frac{\sqrt{7}}{12}$;

(2) $\sqrt{\frac{9a}{169}} = \frac{\sqrt{9a}}{\sqrt{169}} = \frac{\sqrt{3^2 a}}{\sqrt{13^2}} = \frac{3\sqrt{a}}{13}$.

三、最简二次根式 ★★

定义:如果一个二次根式被开方式中都不含分母,并且被开方式中不含有能开得尽方的因式,这样的二次根式称为最简二次根式.

(1)最简二次根式的两个条件:①被开方式中不含分母;②被开方式中不含有能开得尽方的因式.两个条件缺一不可.

(2)在开方时常常需要分解因式(数).

(3)当被开方式中含有分母,并且不是完全平方式时,化去根号内的分母需要根据分式的基本性质把分子、分母同乘以一个数(式)把分母化为完全平方式,便

于开方.

【示例】把下列根式化成最简二次根式.

$$(1) \sqrt{12}; (2) x^2 \sqrt{\frac{y^3}{x}}.$$

思路分析: (1) 把 12 分解因数为 $2^2 \times 3$, 进行开方; (2) 把被开方数分子分母都乘以 x , 分母化为完全平方数.

$$\text{解: } (1) \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}; (2) x^2 \sqrt{\frac{y^3}{x}} = x^2 \sqrt{\frac{xy^3}{x^2}} = xy \sqrt{xy}.$$



高手支招 ② 归纳整理

本节主要内容是二次根式的概念和基本性质. 二次根式的概念是在回顾算术平方根的基础上引出的, 对于概念只要了解形如 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式就可以, 重点是理解与运用二次根式的基本性质: $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 是一个非负数, 它的平方等于 a . 在运用二次根式的基本性质时要注意区别 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 与 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 之间的不同点, 在运用积和商的算术平方根的性质时, 注意条件.

二次根式	{	定义: 一般地, 形如 ① 的式子, 叫做二次根式
		$(\sqrt{a})^2 =$ ②
		$\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a, & \text{③} \\ -a, & \text{④} \end{cases}$
		积的算术平方根的性质: $\sqrt{ab} =$ ⑤ ($a \geq 0, b \geq 0$)
		商的算术平方根的性质: $\sqrt{\frac{a}{b}} =$ ⑥ ($a \geq 0, b > 0$)

答案

① $\sqrt{a} (a \geq 0)$ ② a ③ $a \geq 0$ ④ $a < 0$ ⑤ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ⑥ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



高手支招 ③ 典例精析

一、基础知识题型

【例 1】下列各式哪些是二次根式, 哪些不是? 为什么?

$$(1) \sqrt{15}; (2) \sqrt{-17}; (3) \sqrt[3]{4}; (4) -\sqrt{-5x}.$$

思路分析: 根据二次根式的概念来判断.

解: (1) $\because 15 > 0, \therefore \sqrt{15}$ 是二次根式.



(2) $\because -17 < 0, \therefore \sqrt{-17}$ 不是二次根式.

(3) $\because \sqrt[3]{4}$ 中不含“ $\sqrt{\quad}$ ”, $\therefore \sqrt[3]{4}$ 不是二次根式.

(4) 当 $-5x \geq 0$, 即 $x \leq 0$ 时, $-\sqrt{-5x}$ 是二次根式; 当 $x > 0$ 时, $-\sqrt{-5x}$ 不是二次根式.

技术化提示 当被开方数是一个实数时可直接判断; 当被开方数含有字母, 且字母的取值情况不明时, 要分情况讨论.

【例 2】当 x 取何值时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{4-3x}$; (2) $\sqrt{(3-x)^2}$; (3) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

思路分析: 二次根式的被开方数必须是非负数, 如果式子的分母中含有字母, 则字母的取值不能使分母为零.

解: (1) $\because 4-3x \geq 0$, 解得 $x \leq \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 当 $x \leq \frac{4}{3}$ 时, $\sqrt{4-3x}$ 在实数范围内有意义;

(2) $\because$ 无论 x 取何值, 总能保证 $(3-x)^2 \geq 0$,

$\therefore x$ 取任意实数, $\sqrt{(3-x)^2}$ 在实数范围内都有意义;

(3) $\because x-1 \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 解得 $x > 1$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ 在实数范围内有意义.

技术化提示 (1) 二次根式的被开方数必须是非负数, 因为负数没有平方根;
(2) 当二次根式中有分母时, 既要满足被开方数是非负数, 又要满足分母不为零.

【例 3】计算: (1) $\sqrt{(-16) \times (-9)}$; (2) $\sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)}$.

思路分析: 这两题中被开方数都有两个因数是负数, 要先利用有理数乘法法则将它们化为正数, 再计算.

解: (1) $\sqrt{(-16) \times (-9)} = \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$;

(2) $\sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)} = \sqrt{4 \times \frac{25}{9} \times 169} = \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{25}{9}} \times \sqrt{169} = 2 \times \frac{5}{3} \times 13 = \frac{130}{3}$.

【技术化提示】

像这类被开方数有负因数时,必须先将负因数转化为正因数,才能运用积的算术平方根的性质计算.

二、综合拓展题型

【例4】当 $x < 5$ 时,二次根式 $\sqrt{(x-5)^2} =$ _____.

思路分析: 根据二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 可得结果.

$$\because x < 5, \therefore x - 5 < 0.$$

$$\therefore \sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = -(x-5) = 5-x.$$

【答案】

$$5-x$$

【技术化提示】

化简形如 $\sqrt{a^2}$ 的二次根式,一定要先化为 $|a|$ 的形式,再根据字母 a 的正负性来求值.

【例5】已知 $1 \leq x \leq 3$, 化简 $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$.

思路分析: 要将式子 $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$ 化简,应先将被开方式分解因式,看被开方式是否是完全平方式,若是,便可利用二次根式的性质化简.经观察,两个被开方式都是完全平方式,因此不难化简.

$$\text{解: } \because 1 \leq x \leq 3, \therefore x-1 \geq 0, x-3 \leq 0.$$

$$\therefore \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

$$= |x-1| + |x-3|$$

$$= x-1+3-x=2.$$

【技术化提示】

此类题应先将被开方式变形为完全平方式,再根据 x 的取值范围,判断出被开方数的底数是负数还是非负数,然后运用公式 $\sqrt{a^2} =$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases} \text{ 进行化简.}$$

【例6】求将二次根式 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 中根号外的字母移到根号内的结果.

$$\text{错解: } x\sqrt{-\frac{1}{x}} = \sqrt{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{-x}.$$



错解分析: $\because$ 二次根式 $\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 有意义,

$$\therefore -\frac{1}{x} > 0, \text{ 也就是 } x < 0.$$

上面的错解是将根号外的 x 作为非负数移到根号内的.

$$\text{正解: } \because -\frac{1}{x} > 0,$$

$$\therefore x < 0.$$

$$\therefore x \sqrt{-\frac{1}{x}} = -\sqrt{(-x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = -\sqrt{-x}.$$

【技术化提示】 当 $x < 0$ 时, 向根号内移时将 x 化为 $-(-x)$, 再根据 $-x = \sqrt{x^2}$ 移入根号内, 即 $-(-x) = -\sqrt{x^2}$.

【例 7】如图 7.1-1 所示, 飞行员在飞机 B 上用雷达测得飞机与目标城市 A 的距离 c 为 4.5×10^2 m, 且测得对这个目标的俯角 $\alpha = 45^\circ$, 设地面是平的, 求飞机此时的高度 h .

思路分析: 要求飞机的高, 问题可转化为在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, 求直角边 BC 的长, 由斜边 $c = 4.5 \times 10^2$ m, 问题不难求解.

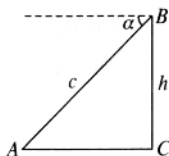


图 7.1-1

$$\text{解: } \because \alpha = 45^\circ, \therefore \angle A = 45^\circ.$$

在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

$$\because \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = BC = h.$$

在直角 $\triangle ABC$ 中, 有 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$\text{即 } 2h^2 = c^2.$$

$$\therefore h^2 = \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} \times (4.5 \times 10^2)^2 = \frac{81}{8} \times 10^4.$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{81}{8} \times 10^4} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \times 10^2 (\text{m}) = 225\sqrt{2} (\text{m}).$$

$\therefore$ 飞机此时的高度为 $225\sqrt{2}$ m.

【技术化提示】 这是二次根式积的算术平方根的性质在解决实际问题中的应用.

三、探究创新题型

【例 8】若 $a^2 + \sqrt{b-2} = 4a - 4$, 试求 $\sqrt{ab}$ 的值.

思路分析：观察可以发现，将已知等式移项后 $a^2 - 4a + 4$ 可以化为完全平方形式，这样通过巧妙变形把原式化为两个非负数的和等于零的形式，可使问题转化为解简单的方程组的问题。

$$\text{解：} \because a^2 + \sqrt{b-2} = 4a - 4,$$

$$\therefore a^2 - 4a + 4 + \sqrt{b-2} = 0, \text{ 即 } (a-2)^2 + \sqrt{b-2} = 0.$$

$$\text{又} \because (a-2)^2 \geq 0, \sqrt{b-2} \geq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a-2=0, \\ b-2=0. \end{cases} \therefore \begin{cases} a=2, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

技术化提示

像这类问题通常利用“几个非负数的和等于零，则每个数必为零”这个性质，将问题转化为解简单的方程组的问题。



高手支招④ 链接中考

二次根式的概念和性质是二次根式化简与计算的重要依据，因此它是中考的重点，考查形式以填空题、选择题为主。学习这部分内容时，关键是要掌握二次根式的概念和性质，一定要理解并记住公式及其应用条件。在将被开方数中开得尽方的因式移到根号外，或根号外的因式移到根号内时，一定要注意字母的符号。二次根式的化简和计算，尤其要注意符号问题。

【例1】（浙江宁波）使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义的 x 的取值范围是 …（ ）

- A. $x \neq 2$ B. $x > 2$ C. $x \leq 2$ D. $x \geq 2$

答案：D

点拨 由二次根式的意义可知，被开方数大于或等于0，即 $x-2 \geq 0$ ，解得 $x \geq 2$ 。

【例2】（湖北武汉）二次根式 $\sqrt{(-3)^2}$ 的值是 ……………（ ）

- A. -3 B. 3 或 -3 C. 9 D. 3

答案：D

点拨 由二次根式的性质，得 $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 。

【例3】（山西太原）计算 $(\sqrt{2})^2$ 的结果等于_____。

答案：2



点拨 由二次根式的性质, 当 $a \geq 0$ 时, $(\sqrt{a})^2 = a$, 得 $(\sqrt{2})^2 = 2$.



高手支招 5 思考发现

1. 判断一个式子是不是二次根式, 就看它是否同时满足两个条件:

- (1) 必须含有“ $\sqrt{\quad}$ ”;
- (2) 被开方数是非负数.

2. 利用二次根式的性质 $\sqrt{a^2} =$

$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 化简时, 关键是要先判断 a 的取值范围, 再根据 a 的正负性去掉绝对值符号.

3. 求代数式中字母的取值范围时应考虑: (1) 二次根式的被开方数大于或等于零; (2) 分母的值不能为零; (3) 零指数幂、负整数指数幂的底数不等于零. 分别根据这三方面情况, 将问题转化为解方程(组)或不等式(组)问题.

4. 在应用二次根式的性质 $\sqrt{a^2} =$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases} \text{ 时, 若 } \sqrt{a^2} = a, \text{ 则}$$

$a \geq 0$; 若 $\sqrt{a^2} = -a$, 则 $a \leq 0$. 解题时注意不要漏掉 $a = 0$ 这种特殊情况.

5. 若已知的被开方数为含有字母的二次根式, 则隐含着被开方数大于或等于零的条件, 由此可将问题转化为解方程或不等式的问题, 从而可确定其中字母的取值范围.

6. 当运用积(或商)的算术平方根的性质进行计算时, 如果积(或商)中有偶数个因数是负数, 就必须先将这偶数个负因数化为正因数, 再计算.

7. 把一个二次根式化为最简二次根式时, 首先把能开方的因式开出来, 再化去根号内的分母.



高手支招 6 体验成功

基础巩固

1. 下列各式是二次根式的有 ()

① $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ② $\sqrt{-3}$ ③ $-\sqrt{x^2+1}$ ④ $\sqrt{8}$ ⑤ $\sqrt{(-\frac{1}{3})^2}$ ⑥ $\sqrt{1-x} (x > 1)$

⑦ $\sqrt{x^2+2x+3}$

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

2. 若 $\sqrt{\frac{3}{x-1}}$ 是二次根式, 那么 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq 1$ B. $x \leq 1$
C. $x > 1$ D. $x < 1$