山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·上册）

宋 枚 主编

石油大学出版社

山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·上册）

主　　编　宋　枚
副主编　张　燕
张玉芬
王爱云

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/宋枚主编. —东营:石油大学出版社,2001.7

ISBN 7-5636-1427-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 06348 号

高等数学(甲种本·上册)

出 版 者: 石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网 址: http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress

电子信箱: upcpress@sunctr.hdpu.edu.cn

印 刷 者: 石油大学印刷厂

发 行 者: 石油大学出版社(电话 0546-8392563)

开 本: 850×1168 1/32 印张:12 字数:312 千字

版 次: 2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

高等数学丛书编委会

主　任　刘晓华

副主任　管恩瑞　陈焕贞
　　　　　李光芹　刘庆华

编　委　（按姓氏笔画为序）
　　　　　王秀红　王爱云　吕蕴霞
　　　　　宋　枚　张　燕　张立琴
　　　　　孟　晗　杨振光　姚炳学
　　　　　钟红心　徐传芳　禚清亮

内 容 提 要

全书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，一元函数积分学，定积分的应用，向量代数与空间解析几何等六章；下册包括多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程等五章。书后均附有习题参考答案。

本书不仅从课程结构上，而且在内容上做了较大的革新，具有结构严谨，系统完整，叙述简洁之特点；其次是注重了联系实际和应用的广泛性，加强了结合实际的内容，数学概念尽量由实际问题引入，尽可能多地将各专业的典型问题选作例题和习题。本书习题数量适当，深度适宜。

本书涵盖了考研高等数学(一)的全部内容。适合师范本科院校物理、计算机类的学生使用。也可供其他有相应数学教学要求的高校使用。

目　　录

第一章　函数　极限　连续 ………………………………… (1)

第一节　函　数 ………………………………………… (1)

一、区间与邻域(1)　二、函数概念(2)　三、函数的几种特性(6)　四、复合函数与反函数(6)　五、初等函数(9)　习题 1-1(11)

第二节　极限的概念 …………………………………… (13)

一、数列的极限(13)　二、函数的极限(17)　三、数列极限与函数极限的关系(22)　习题 1-2(23)

第三节　无穷小与无穷大 ……………………………… (24)

一、无穷小(24)　二、无穷大(26)　习题 1-3(28)

第四节　极限的基本性质及运算法则 ………………… (28)

一、极限的基本性质(29)　二、极限的运算法则(30)　习题 1-4(34)

第五节　极限存在准则及两个重要极限　无穷小的比较 ……………………………………………………… (35)

一、极限存在准则及两个重要极限(35)　二、无穷小的比较(41)　习题 1-5(42)

第六节　函数的连续性 ………………………………… (44)

一、连续函数的概念(44)　二、连续函数的运算、初等函数的连续性(46)　三、函数的间断点及其分类(48)　四、闭区间上连续函数的性质(50)　习题 1-6(52)　第一章总习题(54)

第二章　导数与微分 ………………………………………… (58)

第一节　导数概念 ………………………………………………… (58)
一、引入导数概念的两个例子(58)　二、导数的定义(60)　三、用定义计算导数(61)　四、单侧导数(63)　五、可导与连续的关系(65)　六、导数的几何意义(65)　习题 2-1(66)
第二节　求导法则及基本求导公式 ………………………… (67)
一、导数的四则运算法则(67)　二、反函数的求导法则(70)　三、复合函数的求导法则(71)　四、基本初等函数的导数公式(75)　习题 2-2(76)
第三节　高阶导数 ………………………………………………… (78)
一、高阶导数(78)　二、莱布尼茨(Leibniz)公式(80)　习题 2-3(81)
第四节　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数 ……………………………………………………………… (81)
一、隐函数的导数(81)　二、参数方程所确定的函数的导数(84)　三、相关变化率(87)　习题 2-4(88)
第五节　函数的微分及其应用 ……………………………… (89)
一、微分的概念(89)　二、微分的基本公式及运算法则(92)　三、微分在近似计算中的应用(94)　习题 2-5(96)　第二章总习题(97)
第三章　中值定理与导数的应用 …………………………… (99)
第一节　中值定理 ………………………………………………… (99)
一、预备定理(99)　二、中值定量(100)　三、中值定理的初步应用(104)　习题 3-1(105)
第二节　洛必达法则………………………………………………… (106)
一、洛必达法则的基本定理(106)　二、其他未定型(109)　习题 3-2(111)
第三节　泰勒中值定理………………………………………………… (112)

一、基本定理(112)　二、常用公式(114)　习题3-3(117)
第四节　函数性态的研究……………………………(118)
一、函数单调性的判别法(118)　习题 3-4(1)(121)
二、函数的极值、最大值与最小值问题(121)　习题 3-4(2)(127)　三、曲线的凹凸与拐点　曲线的渐近线(128)　习题 3-4(3)(132)　四、函数图形的描绘(132)　习题 3-4(4)(136)
第五节　弧微分与曲率……………………………(136)
一、弧微分(136)　二、曲率及其计算公式(137)　习题 3-5(138)
*第六节　方程的近似解……………………………(138)
一、弦线法(139)　二、切线法(140)　三、综合法(141)　第三章总习题(142)
第四章　一元函数积分学……………………………(144)
第一节　定积分的概念……………………………(144)
一、定积分问题举例(144)　二、定积分的定义(147)　三、定积分的几何意义(148)　四、可积条件(149)　习题 4-1(150)
第二节　定积分的性质……………………………(150)
一、定积分的等式性质(151)　二、定积分的不等式性质(152)　三、定积分的中值定理(153)　习题 4-2(154)
第三节　微积分学基本定理……………………………(155)
一、积分与微分的联系(155)　二、牛顿-莱布尼茨公式(158)　习题 4-3(161)
第四节　不定积分……………………………(162)
一、不定积分的概念(162)　二、不定积分的基本公式(164)　三、不定积分的性质(165)　习题 4-4

(168)
第五节　基本积分法则……………………………………（169）
一、第一换元法(170)　习题 4-5(1)(177)　二、第二换元法(178)　习题 4-5(2)(187)　三、分部积分法(188)　习题 4-5(3)(195)　四、有理函数和三角函数的有理式的积分(195)　习题 4-5(4)(199)
第六节　广义积分……………………………………………（200）
一、无穷区间上的积分(200)　二、无界函数的积分(202)　习题 4-6(205)
*第七节　广义积分的审敛法　Γ函数…………………（206）
一、广义积分的审敛法(206)　二、Γ函数(209)　习题 4-7(211)　第四章总习题(211)
第五章　定积分的应用……………………………………（215）
第一节　定积分的元素法…………………………………（215）
第二节　平面图形的面积…………………………………（216）
一、直角坐标情形(216)　二、极坐标情形(220)　习题 5-2(222)
第三节　体　积……………………………………………（223）
一、平行截面面积已知的立体体积(223)　二、旋转体的体积(225)　习题 5-3(227)
第四节　平面曲线的弧长　旋转体的侧面积…………（228）
一、平面曲线弧长的概念(228)　二、直角坐标情形(229)　三、参数方程情形(231)　四、极坐标情形(232)　五、旋转体的侧面积(233)　习题 5-4(234)
第五节　定积分的物理应用………………………………（234）
一、变力作功(234)　二、液体的压力(237)　三、引力(238)　习题 5-5(240)
第六节　平均值　均方根…………………………………（241）

一、函数的平均值(241)　二、均方根(242)　习题5-6(243)　第五章总习题(243)
第六章　向量代数与空间解析几何……………………………（245）
第一节　空间直角坐标系…………………………………（245）
一、空间直角坐标系(245)　二、空间点的坐标(246)　三、空间两点间的距离公式(248)　习题6-1(249)
第二节　向量及其运算……………………………………（250）
一、向量的基本概念(250)　二、向量的线性运算(251)　三、向量之间的乘法(253)　四、向量在轴上的投影(257)　习题6-2(261)
第三节　向量的坐标　向量及其运算的坐标表示……（261）
一、向量的坐标(261)　二、向量的模与方向余弦的坐标表示(263)　三、向量运算的坐标表示(266)　四、向量垂直、平行的条件(269)　习题6-3(271)
第四节　曲面及其方程　柱面和旋转面………………（271）
一、曲面方程的概念(272)　二、柱面(273)　三、旋转曲面(275)　习题6-4(280)
第五节　平面及其方程……………………………………（280）
一、平面的点法式方程(280)　二、平面的一般式方程(282)　三、平面的截距式方程(284)　四、两平面间的位置关系(285)　五、点到平面的距离(286)　习题6-5(287)
第六节　曲线及其方程　曲线的投影…………………（288）
一、空间曲线的一般方程(288)　二、空间曲线的参数方程(289)　三、空间曲线在坐标面上的投影(292)　习题6-6(294)
第七节　空间直线及其方程………………………………（295）
一、空间直线的对称式方程与参数方程(295)　二、

空间直线的一般方程(297)　三、两直线的位置关系(298)　四、直线与平面的位置关系(299)　五、平面束(302)　习题 6-7(304)
第八节　二次曲面……………………………………………… (305)
一、椭球面(305)　二、双曲面(307)　三、抛物面(311)　习题 6-8(313)　第六章总习题(314)
附录Ⅰ　基本初等函数的图形及其主要性质……………… (317)
附录Ⅱ　几种常用的曲线…………………………………… (323)
附录Ⅲ　积分表……………………………………………… (328)
习题参考答案与提示……………………………………… (339)

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学的研究对象，它反映了客观世界变量间的依赖关系. 极限作为一种重要的思想方法和工具贯穿于高等数学的始终，它的理论构成了微分学和积分学的基础. 连续函数是高等数学所讨论的主要函数类型. 本章主要介绍函数、极限、连续这些微积分的基础内容.

第一节　函　数

在中学课本中，已讲过函数的概念以及一些初等函数的性质和图形. 由于函数是高等数学的主要研究对象，因此本节将简要地复习一下有关内容，同时作一点必要的补充和提高.

一、区间与邻域

在研究变量间的关系时，常常要考察变量的变化范围，也就是它能取到的全部数值的集合，它往往可用区间表示.

设 a、b 为两个已知常数，且 $a<b$，我们把数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；把数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)；类似地可以定义半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，以上这些区间都称为有限区间，$a$ 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度.

类似地可以定义无限区间 $[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$ 及 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$ 等.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间

还是无限区间的场合，我们常简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是经常用到的概念.

设 a 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，称集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 点 a 的 δ 邻域可以用以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 表示(图 1-1).

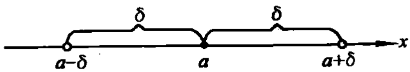

图 1-1

称集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

二、函数概念

当我们考察某个自然现象或工程技术问题时，常常会遇到多个变量，这些变量往往不是彼此独立变化的，而是按照一定的规律互相联系，互相依赖，这种变量之间确定的依赖关系，就是函数关系.

例 1 圆的面积 A 与圆的半径 r 满足关系式 $A=\pi r^2$，当圆的半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，圆的面积就有确定的数值与之对应.

例 2 自由落体运动，设物体下落的时间为 t，落下的路程为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么，s 与 t 之间的对应关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 确定，其中 g 为重力加速度. 假定物体着地时刻为 $t=T$，那么，当 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式 s 就有确定的数值与之对应.

例 3 某气象站用自动记录器记录了某一天 24 小时的气温变化曲线(图 1-2).

这里的气温 T 是随着时间 t 的变化而变化，当 t 在 $[0,24]$ 中

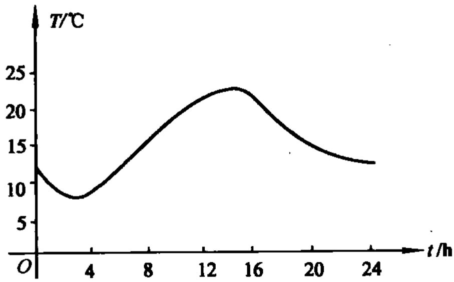

图 1-2

任意取定一个数值时，根据这条曲线，T 都有确定的数值与它对应.

类似的例子很多，虽然它们的具体背景不同，在数学上却有一个共同点：在某变化过程中都有两个变量，并且当其中一个变量在它的取值范围内任意取定一个数值后，按照某种规律，另一个变量都有确定的数值与之对应. 函数概念正是从这样大量事实中抽象出来的.

定义 设 x 和 y 是两个变量，如果变量 x 在它的变化范围 D（数集）内所取的每一个值，按照一定的规律 f，变量 y 都有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 叫做这个函数的定义域.

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域. ▌

关于函数的定义说明以下几点.

(1) 定义域和对应规律是确定函数的两个要素. 对于两个函数，当且仅当它们的定义域和对应规律都相同时，它们才是相同的.

(2) 如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数

值只有一个，称此函数为单值函数. 否则称为多值函数. 如 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 为多值函数. 今后如不作特别声明时，我们所讨论的函数均指单值函数.

(3) 函数关系可用不同的方法来表示. 常用的表示法有公式法、列表法和图像法.

关于函数定义域的求法分两种情况：在实际问题中函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如例 1 中函数的定义域为 $D=(0,+\infty)$，例 2 中函数的定义域为 $D=[0,T]$；如果不考虑实际意义，对于用抽象算式表达的函数，它的定义域就是使算式有意义的自变量的所有值构成的数集.

设函数的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，就在 xOy 平面上确定一点 (x,y)，当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到 (x,y) 的一个集合 C：$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 一般说来，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条或几条曲线. 参见图 1-3.

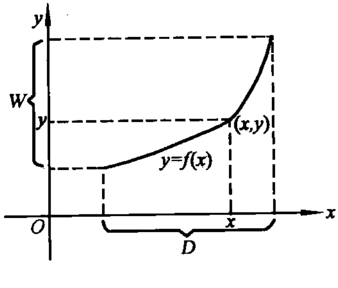

图 1-3

在用公式法表示函数时，常常会遇到对于自变量在不同范围中的值，函数的表达式也不同的情况，通常称这种函数为分段函数.

例 4　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$. 当$x\in[0,+\infty)$时,函数用$y=x$来表达;当$x\in(-\infty,0)$时,函数用$y=-x$表达. 因此,这是一个分段函数. 它的值域$W=[0,+\infty)$,其图形如图1-4所示.

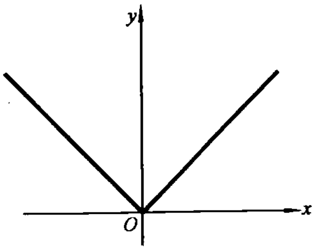

图 1-4

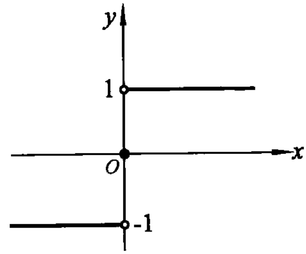

图 1-5

例 5 符号函数$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$也是一个分段函数. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为集合$W=\{-1,0,1\}$,图形由两段直线及一个点组成(图1-5).

例 6 取整函数$y=[x]$表示不超过x的最大整数. 例如$[3.6]=3$,$[-2.5]=-3$,$[12]=12$等等. 它也是一个分段函数. 函数$y=[x]$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为集合$W=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}=\mathbf{Z}$,其图形由无穷多条直线段组成(图1-6).

例 7 在电子技术中经常遇到的三角波,它的一个波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2.\end{cases}$$

这也是一个分段函数. 它的图形如图1-7所示.

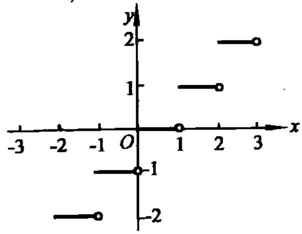

图 1-6

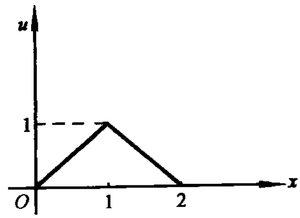

图 1-7

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，对于任一 $x\in I$，均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$，对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任一 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$，在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增（减）. 单调递增（减）函数称为单调函数，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

函数的奇偶性和周期性在中学已学过，这里不再赘述.

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即 $u=$