全国高等院校规划教材

高等数学

（工科类）

金桂堂　赖展翅　主编

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

全国高等院校规划教材

高等数学

（工科类）

主　编　　金桂堂　赖展翅
副主编　　施伟斌　谢克斌　张喜生
　　　　　韩智劳　吉耀武

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类/金桂堂主编. —北京：北京出版社，
2009.7
ISBN 978-7-200-07788-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 金… III. 高等数学—高等学校—教材
IV.TP3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 084754 号

高等数学（工科类）
GAODENG SHUXUE（GONGKELEI）
主编 金桂堂 赖展翅

*

北京出版社出版集团
北 京 出 版 社 出版

(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100120
网址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
北京市通县华龙印刷厂印刷

*

787×1092 16 开本 20.75 印张 485 千字
2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-07788-9
G·3195 定价：29.80 元

质量监督电话：010-82684773 010-82684553

前　言

本教材编写的指导思想是突出贯彻“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学方针，坚持以学生为主体的教学理念，立足培养高等职业技能型的人才，着眼于学生的全面发展，以基础教学为目标进行高等数学（工科类）教材建设.针对高职学生的特点，努力激发学生的学习兴趣，要以提高课程教学质量为目的，务求学生好学、教师好用.

应要明确高等数学课程在工科类高等职业教育中的基础性地位和基础性作用.明确数学课程的教学基本要求，并深入了解专业课程及专业实践活动对教学课程的需求，有效沟通专业知识和数学知识之间的关系，本着更好地为专业课程服务的宗旨，作为确定高等数学教材内容的主要依据.

1. 教材精选了高等数学中的基本内容，以一元函数微积分为主线，突出基本知识和基本运算，为既注意保持数学教育的素质教育层面，又注意基本理论以“必需、够用为度”.教材注意分散教学难点，对一些重要概念作了深入浅出的讲述，突出直观描述和几何、物理解释，淡化理论证明和推导，降低了学生掌握同等程度知识的难度；引导学生认识数学知识的实际背景和应用价值，引导学生领悟微积分学的本质；教材编写在通俗易懂的前提下，尽可能体现数学的严谨性，适当考虑知识的系统性.

2. 教材内容的选择注意与专业职业应用结合，以知识应用为目的，以工程实际问题建立数学模型为主线，对高等数学课程经典内容经行整体优化组合、加工与创新，突出数学理念与工程实际的结合，处理好数学知识的“精”与工程专业应用的“博”之间的关系，在保持高等数学教学内容科学性与完整性的同时，注意突出高等职业教育教材的职业教育特色.

3. 教材要处理好传统内容与现代内容的关系，注意渗透现代数学的观点、概念和方法，提高学生获取现代知识的能力.要努力突破原有课程体系的界限，促进相关课程和相关内容的有机结合和相互渗透，促进不同学科内容的融合，淡化复杂的数学运算技巧的训练，着重培养学生的数学思维、数学素质、应用能力和创新精神，提高学生的文化素养和科学素养.为学生的终身学习与创业发展打下坚实的数学基础.

4. 教材中注意反映人类世界的先进科研成果，注意信息技术的应用，实现信息技术与数学课程内容的有机整合.淡化手工计算，特别是计算技巧的训练，采用数学建模、数学实验方式，编入数学软件包——Mathematica，培养学生逐步采用数学软件处理各种计算，提高学生解决实际问题的能力，调动学生学习数学的积极性。

5. 为激发学生的学习兴趣，教材内容编排特别注意结合内容不断地吸引学生.为此，教材每章内容分为两个层次：在基本教学内容部分，注意根据教学内容结合名人名言、数学史、数学家简介、数学故事等进行教材的特色建设，激发学生的学习兴趣；在复习拓展

部分，注意提高学生对数学的应用能力，加强学生的成就感和学习欲望.考虑到高等职业教育自身的特点：一是专业门类多；二是学生数学基础参差不齐，是哟一教学要有利于分层教学，因材施教.根据教学大纲的要求，知识内容的难度，在习题与复习题的编排上分 A 组、B 组，两组题有明显的梯度，使其具有层次性和选择性，一边适应不同地区、不同专业、不同数学基础学生的不同需求.

6. 全书可读性强，起点低，坡度小，有利于学生小花所学内容，有利于培养学生学习数学的兴趣。根据目前大多数高职高专院校的课程设置情况，全部内容按 80~120 课时的设计，在教学的使用上具有一定的弹性.

本教材主要参编人员均为高等专业教育数学教学第一线的教师，长期从事职业教育数学教学与数学教育研究工作，积累了丰富的教学与教学改革经验，为将教学与教学改革过程中产生的新思想及时反映在本教材的编写过程中打下了良好的基础.

本教材有北京数学会高职高专教育工作委员会金桂堂主任主持本书的统稿工作，各章执笔人如下：

金桂堂编写第 1 章、第 9 章、附录 F1

赖展翅编写第 3 章

施伟斌编写第 5 章、第 7 章

谢克斌编写第 4 章

张喜生编写第 2 章

韩智劳编写第 6 章

吉耀武编写第 8 章

本教材在编写过程中还得到北京数学会的鼎力相助，北京师范大学严士健教授、北京大学李忠教授、清华大学韩云瑞教授、中国人民大学胡显佑教授、北京航空航天大学徐兵教授等对教材编写工作提出了很多有益的建议，对于教材编写工作顺利进行给与了具体的指导与极大地帮助.

本教材难免存在不足之处，恳请各位老师与同学提出宝贵意见与建议，以便不断改进与完善，为高职教育改革与发展作出应有的贡献.

编　者

目　录

学习任何知识必须先学数学，数学在科学的等级中是最高级的，不论对普通教育还是专门教育，数学教育乃是作任何教育的起点.

——孔德

第1章　函数

函数描述变量之间的对应关系，图形则是它们的直观表示. 在实际生活中遇到的图形更是多种多样，但它不见得都是简单函数的图形，寻求它们的数学表述——方程、了解方程所表示图象的性质等即成为人们必须要研究的课题，也是我们很好使用函数(或方程)的基础. 本章我们主要介绍函数及其图形和性质.

1.1　函数的概念

1.1.1　健身费用、存款与心电图

在讨论函数的概念之前，我们先来讨论一个实际生活中的例子.

例1　某健身中心实行会员制，会员享受健身场地使用价格的八折优惠，但需每年交纳会员费500元. 问若某人只在此健身中心健身，每年花在健身方面的钱至少是多少(按价格计算)才能真正受惠？

解：假设按价格计算此人一年内健身所花费用为 x 元，则获得会员优惠应为 $0.2x$，但因交纳了500元会员费，因此实际获得的优惠 y 是 $0.2x-500$，即 $y=0.2x-500$. 按此公式我们可以计算出表1-1所示结果.

表1-1

花费钱数 x(元)	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
受惠钱数 y(元)	−500	−400	−300	−200	−100	0	100	200	300

从表1-1中我们可以看出至少需花2500元健身才能真正受惠.

例2　假定某人1997年8月在中国工商银行以活期方式存入人民币1000元，此时人民币活期存款的年利率为1.98%，试计算从存入之日起1年后、2年后、……x 年后取款时的总金额.

解：1年后，本金为1000元，利息为1000×1.98%元，总额为

$$1000+1000\times1.98\%=1000\times(1+1.98\%)=1000\times1.0198(\text{元}).$$

第一年不取，待第二年后，本金为1000×1.0198元，利息为1000×1.0198×1.98%，总额为 1000×1.0198^2 元；同理，第三年后，总额为 1000×1.0198^3，…

故 x 年后总额 $y=1000\times1.0198^x$(元),即 $y=1.0198^x$(千元).

例 3 心电图(EKG)可以显示病人的心率模式.它是由心电图仪直接根据病人的心率情况绘制的.如图 1-1 所示,它是某被测者的心电图,由图形可以看出,它的图象上每一点都代表着相应时间对应的电流活动值.从而,这里的图形又表示了变量与变量间的对应关系.

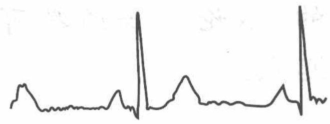

图 1-1

上述三个例子,都是要确定变量间对应关系的问题,类似的问题还很多,如股票价格曲线、生物生长量计算等.变量间的对应关系就是下面要介绍的函数.

1.1.2 函数的概念及其表示

前述的三个例子都涉及了函数,我们给出函数的如下定义.

定义 1.1 设 D 为一集合,若对于 D 中每一个元素 x,按照对应规则 f,都有集合 $\mathbf{R}$ 中的唯一一个元素 y 与之对应,则称这一对应规则定义了一个函数.记为:$y=f(x)$.其中 D 称为函数的定义域,x 称自变量,y 称因变量(对于一个确定的 x 而言也称为函数值).所有函数值组成的集合 S 称为函数 $f(x)$ 的值域,它满足 $S\subseteq\mathbf{R}$.

可见,所谓函数就是一种对应规则.如图 1-2 所示,函数 $f(x)$ 是集合 D 与集合 $\mathbf{R}$ 之间的一种对应关系或对应规则,它使得集合 D 中的每个元素均与集合 $\mathbf{R}$ 中的唯一一个元素对应,且每个 D 中的元素只与 $\mathbf{R}$ 中的一个元素对应.

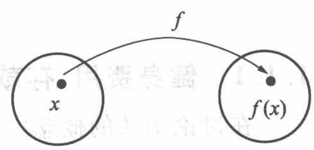

图 1-2

如定义域为$\{x|x$ 是人的编号$\}$(即由所有人的编号组成定义域)的生日函数

$$B(x)=x \text{ 的出生日期}$$

给定了人的编号与日期之间的一种对应关系,如果张强是 1985 年 12 月 20 日出生的,则函数 B 把定义域中的元素"张强的编号"与值域中的元素 19851220 对应起来,称函数 B 在"张强的编号"这点的值是 19851220,记为:

$$B(\text{张强的编号})=19851220$$

尽管定义域和值域中的元素形式可以多种多样,但在本书中,我们只讨论定义域及值域中的元素均为实数的函数,这种函数称为一元函数.

按照函数定义,给定一个函数,必须给定一个定义域及一个对应规则.但对于实值函数而言,如果不特殊说明,则默认其定义域为能使函数表达式计算出实数结果的实数集合.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 和 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$ 的定义域.

解:对于函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,要想 $f(x)$ 是实数,必须 $1-x^2\geqslant0$,所以函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant1$.

对于函数 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$,要想 $g(r)$ 是实数,必须 $r^2-1>0$,即 $r>1$ 或 $r<-1$,所以函数 $g(r)=\dfrac{2}{\sqrt{r^2-1}}$ 的定义域为 $r>1$ 或 $r<-1$.

1.1.3　区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$. 数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$. 数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点,这里 $a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$.

类似地可说明:

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},\ (a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来,分别如图 1-3(a)与(b)所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},\ (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-3(c)、(d)所示.

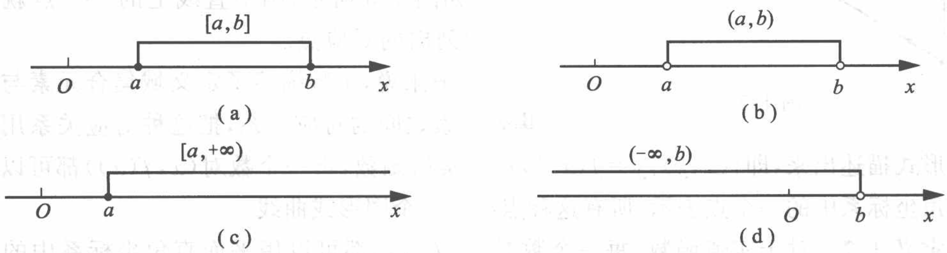

图 1-3

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为"区间",且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径(图 1-4).

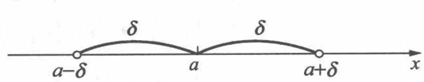

图 1-4

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

1.1.4 函数的图象与函数的零点

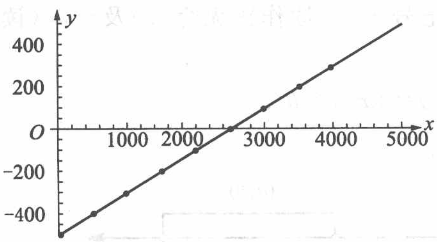

图 1-5

如果我们把满足例 1.1 中关系式 $y=0.2x-500$ 的一组 x 和 y，用平面直角坐标系中的点 (x,y) 标记，根据中学中有关平面解析几何的知识可知，所有这样的点组成的图形是坐标系中的一条直线，如图 1-5 所示，图中直线上的"•"点就是表 1-1 中列出的对应点.

一般来说，函数描述了定义域集合元素与值域集合元素之间的对应关系，把这种对应关系用元素对的形式描述出来，即 $\{(x,y) \mid y=f(x)\}$，对于实值函数，每一个数对 $(x,f(x))$ 都可以用平面直角坐标系中的一个点表示，所有这种点组成一个图形或曲线.

定义 1.2 对于实值函数，每一个数对 $(x,f(x))$ 都可以用平面直角坐标系中的一个点表示，所有这种点组成的图形称为函数 $y=f(x)$ 的图象，或这一函数的函数曲线.

定义 1.3 函数 $f(x)$ 的图形与 x 轴交点的横坐标是方程 $f(x)=0$ 的根，这里的根称为函数 $y=f(x)$ 的零点.

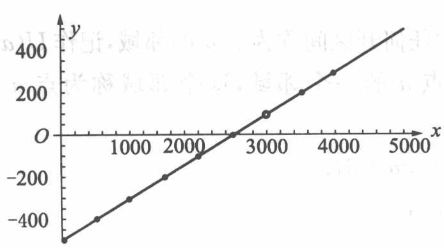

图 1-6

函数曲线上点的横坐标集合就是函数的定义域，纵坐标集合就是函数的值域. 过横轴上定义域内的一点 x 作与横轴垂直的直线，该直线与函数曲线交点的纵坐标 y 就是曲线所给定的函数在 x 点的值，即 $y=f(x)$. 约定在函数图形中，用表示度的符号"◦"标记的点表示相应点不在曲线上，标记"•"的点表示相应点在曲线上. 如图 1-6 所示，是函数 $f(x)=\dfrac{(0.2x-500)(x-3000)}{x-3000}$ 的

图象.

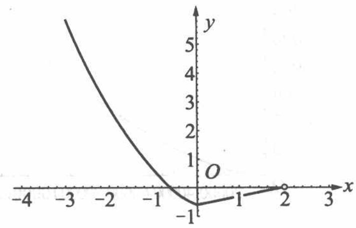

图 1-7

例 5　函数曲线如图 1-7 所示，求函数的定义域、值域以及零点.

解：观察函数 $y=f(x)$ 的图形，因曲线横坐标为 2 的点有标记"∘"，所以不包括 2，曲线点的横坐标为小于 2 的实数，故函数 $y=f(x)$ 的定义域为小于 2 的实数集合，即 $(-\infty,2)$，用不等式表示为 $x<2$；曲线上有一最低点，这一点的纵坐标为 -1，从而曲线上点的纵坐标为大于等于 -1 的实数，值域为大于等于 -1 的实数集合，即 $[-1,+\infty)$，用不等式表示为 $y\geqslant -1$；因点 $(2,0)$ 标记"∘"，不是曲线上的点，从而曲线与 x 轴只有一个交点 $(-0.6,0)$，故函数 $y=f(x)$ 的零点为 -0.6.

1.1.5　分段函数

例 6　我国国家税务总局 2005 年公布的新个人所得税交纳金额有如下规定：

级数	全月应纳税所得额	税率%	速算扣除法(元)
1	不超过 500 元的	5	0
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10	25
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15	125
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20	375
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25	1375
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30	3375
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35	6375
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40	10375
9	超过 100000 元的部分	45	15375

费用基数扣除额为：1600 元，即 1600 以下者(含 1600 元)，不交纳个人所得税。试分析月收入与所得税金额之间的函数关系.

解：设某人月收入为 x 元，应交纳所得税 y 元. 则当 $0\leqslant x\leqslant 1600$ 时，$y=0$；当 $1600<x\leqslant 2100$ 时，$y=(x-1600)\times 5\%$；当 $2100<x\leqslant 3600$ 时，$y=(x-1600)\times 10\%-25$；当 $3600<x\leqslant 6600$ 时，$y=(x-1600)\times 15\%-125$；当 $6600<x\leqslant 21600$ 时，$y=(x-1600)\times 20\%-375$；当 $21600<x\leqslant 41600$ 时，$y=(x-1600)\times 25\%-1375$，当 $41600<x\leqslant 61600$ 时，$y=(x-1600)\times 30\%-3375$；当 $61600<x\leqslant 81600$ 时，$y=(x-1600)\times 35\%-6375$；当 $81600<x\leqslant 101600$ 时，$y=(x-1600)\times 40\%-10375$；当 $101600<x$ 时，$y=(x-1600)\times 45\%-15375$. 所求函数表达式为：

函数示意图如图 1-8 所示.

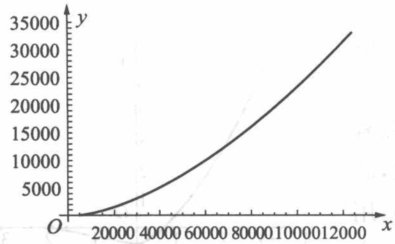

图 1-8

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1600\\ 0.05(x-1600), & 1600<x\leqslant 2100\\ 0.1(x-1600)-25, & 2100<x\leqslant 3600\\ 0.15(x-1600)-125, & 3600<x\leqslant 6600\\ 0.2(x-1600)-375, & 6600<x\leqslant 21600\\ 0.25(x-1600)-1375, & 21600<x\leqslant 41600\\ 0.3(x-1600)-3375, & 41600<x\leqslant 61600\\ 0.35(x-1600)-6375, & 61600<x\leqslant 81600\\ 0.4(x-1600)-10375, & 81600<x\leqslant 101600\\ 0.45(x-1600)-15375, & 101600<x\end{cases}$$

定义 1.4 如果一个函数,其定义不是用一个表达式完成的,而是把整个定义域分成若干个区间段,与一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出.这种函数我们称之为分段函数.

分段函数的图形在每一个分段上与相应表达式函数的图形相同.

例 7 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2x, & -2<x\leqslant 0\\ -x-1, & x\leqslant -2\end{cases}$$

(1) 求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-1)$、$f(-2)$和 $f(-3)$;

(2) 画出函数图形.

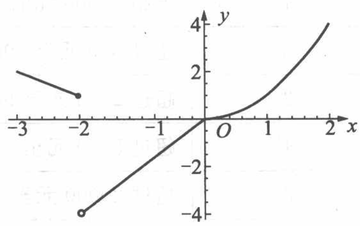

图 1-9

解:(1)当 $x=1$ 时,条件 $x>0$ 成立,按表达式 x^2 计算 $f(1)=1^2=1$;当 $x=0$ 时,条件 $-2<x\leqslant 0$ 成立,按表达式 $2x$ 计算 $f(0)=2\times 0=0$;同理

$$f(-1)=2\times(-1)=-2$$
$$f(-2)=-(-2)-1=1$$
$$f(-3)=-(-3)-1=2$$

(2)函数 $f(x)$图形由抛物线 $y=x^2$ 的$(0,+\infty)$段、直线 $y=2x$ 的$(-2,0]$段和直线 $y=-x-1$的$(-\infty,-2]$段组成,如图 1-9 所示.

1.1.6 函数的特性

1. 有界性

从前面的讨论可以看到,函数的函数值取决于函数的对应规则和函数的定义域.有些函数的函数值只在某一有限的范围内,即局限于某一有限区间,从而这类函数的图形可以夹在两条平行于横轴的直线之间,称这类函数为有界函数;另一些函数的函数值可以遍布整个数轴,或数轴的一边,即函数值的取值区间为无穷区间,这类函数,找不到将其图形夹在中间的两条平行于 x 轴的直线,称这类函数为无界函数.

如函数 $y=\sin x$ 是有界函数,而函数 $y=x^3$ 则是无界函数.

数学上,函数的有界可以描述为:

定义 1.5　如果函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，且满足：存在常数 $M>0$，使得

对于任何 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界，否则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上无界.

2. 单调性

我们已经看到，有一些函数的函数值随自变量取值的增大而不断增大，有一些函数的函数值则随着自变量取值的增大而不断减小，而另一些则随着自变量的增大，函数值有时增大有时减小. 随着自变量的增大，函数值也增大的函数我们称其为单调增函数；随着自变量的增大，函数值减小的函数我们称其为单调减函数；单调增函数和单调减函数统称为单调函数. 而那些随着自变量的增大，函数值增减不定的函数我们称其为非单调函数. 如函数 $f(x)=x^3$ 是单调增函数，$f(x)=-x^3$ 是单调减函数，$f(x)=x^2-2x-3$ 是非单调函数.

有时我们需要把非单调函数的定义域分成几个区间段，讨论自变量取值限定在某区间段上增大时函数值的增减. 如函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间$(-\infty,1)$上单调减小，在区间$(1,+\infty)$上单调增大，函数在其上为单调增或单调减的区间称为函数的单调区间.

单调增函数与单调减函数的数学描述：

定义 1.6　函数 $y=f(x)$在区间 I 上定义，如果满足：

对于任何 $x_1,x_2\in I$，由 $x_1<x_2$ 即可导出 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增（或单调减）.

3. 奇偶性

定义 1.7　如果函数 $f(x)$的图形关于 y 轴对称，即对于定义域$[-a,a]$内的任一元素 x，$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为偶函数；如果函数 $f(x)$的图形关于原点对称，即对于定义域$[-a,a]$内的任一元素 x，$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为奇函数. 如函数 $f(x)=x^2-4$ 是偶函数，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

4. 周期性

定义 1.8　给定函数 $f(x)$，如果有实常数 $l>0$，使对于定义域内的任一 x，有 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$是周期为 l 的周期函数. 通常我们说周期函数的周期是指满足上述条件的最小正数.

周期函数的图象可以由函数在某一周期内的图象，沿 x 轴将这一段按周期延拓而得到. 如函数 $f(x)=\begin{cases}\{x\} & x>0\\ 1+\{x\} & x\leqslant 0\end{cases}$，其中$\{x\}$表示 x 的小数部分，如图 1-8 所示，函数 $f(x)$是周期为 1 的周期函数.

如果函数 $f(x)$是周期为 l 的周期函数，则函数 $f(x+a)$也是周期为 l 的周期函数，函数 $f(ax)$是周期为$\dfrac{l}{a}$的周期函数. 例如，如图 1-10 所示函数 $f(x)$是周期为 1 的函数，则函数 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$是周期为 2 的周期函数，如图 1-11 所示.

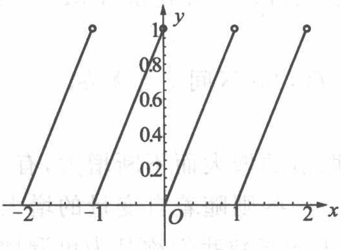

图 1-10

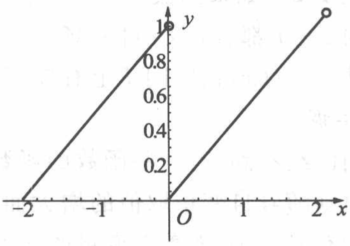

图 1-11

1.1.7 反函数

先看一个例子.

例 8 已知 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$，$g(x)=2x+1$，试求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

解：$f(g(x))=f(2x+1)=\dfrac{(2x+1)-1}{2}=x$，$g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+1=x$.

定义 1.9 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对任意一个 $y\in R$，D 内只有一个数 x 与 y 对应，使得 $y=f(x)$，这时把 y 看作自变量，x 看作因变量，就得到一个新的函数，称为直接函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于 $x=f^{-1}(y)$ 表示 x 依对应法则 f^{-1} 对应每一个 y，即 y 为自变量，而 x 为函数值. 为了方便，常记为 $y=f^{-1}(x)$，并称为 $y=f(x)$ 的反函数. 因此，函数与其反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称. 事实上，如果给定互为反函数的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)=f^{-1}(x)$，曲线 $y=f(x)$ 上的点 (a,b) 满足 $b=f(a)$，便是满足 $f^{-1}(b)=a$，从而若点 (a,b) 在曲线 $y=f(x)$ 上，则点 (b,a) 必在曲线 $y=g(x)=f^{-1}(x)$ 上，即函数 $f(x)$ 与其反函数 $g(x)=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

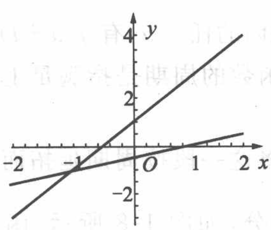

图 1-12

例 8 中两个函数互为反函数，画出它们的图象，如图 1-12 所示，从图形容易看出，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，如果两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：对于函数 $g(x)$ 定义域内的任一 x，$f(g(x))=x$；同样，对于函数 $f(x)$ 定义域内的任一 x，$g(f(x))=x$. 则满足这些条件的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 必互为反函数. 注意，这里的 $f^{-1}(x)$ 不是 $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$.

如果说函数 $f(x)$ 是把方程 $y=f(x)$ 中变量 x 看成自变量(图形上以横轴表示)，变量 y 看成因变量(图形上以纵轴表示)，所确定的对应关系，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 就是把同一个方程 $y=f(x)$ 中变量 y 看成自变量，变量 x 看成因变量，所确定的对应关系. 因此，在已知函数 $f(x)$ 求函数 $f^{-1}(x)$ 时，应先把方程 $y=f(x)$ 中的变量名对换，即将方程 $y=f(x)$ 改写成 $x=f(y)$，然后将其整理为 $y=g(x)$ 的形式，则 $g(x)$ 即为所求的反函数 $f^{-1}(x)$.

例 9 已知 $f(x)=4-x^2$，$x\geqslant 0$. 画出函数 $f^{-1}(x)$ 的图形，并求出 $f^{-1}(x)$ 的表达式.

解：函数 $y=4-x^2$ 是顶点为 $(0,4)$，开口向下，零点为 2 和 −2 的抛物线，因函数

$f(x)=4-x^2$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，故 $f(x)$ 的曲线是该抛物线在顶点的右半支. 根据函数 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 曲线关于 $y=x$ 对称的原理，可画出 $f^{-1}(x)$ 的图形. 如图 1-13 所示.

在求解 $f^{-1}(x)$ 的表达式时，应先将方程 $y=f(x)=4-x^2$，$x\geqslant 0$ 换名成 $x=4-y^2$，$y\geqslant 0$，然后整理方程为 $y=\sqrt{4-x}$. 故所求反函数为 $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}$.

对于任一函数 $f(x)$ 的曲线，我们都可以画出其关于直线 $y=x$ 的对称图形，但这一图形不一定是一个(单值)函数的图形，如图 1-14 所示. 因此，不是任一函数都有(单值)反函数.

从图形上确定其是否为单值函数图形的条件是任一垂直横轴的直线与图形曲线只交于一点，故任一单值函数 $f(x)$ 曲线关于 $y=x$ 对称的图形是函数曲线的条件是函数 $f(x)$ 曲线与任一平行于横轴的直线只交于一点. 如图 1-15(a) 中曲线所确定的函数 $f(x)$ 无(单值)反函数，而图 1-15(b) 中的曲线所确定的函数 $f(x)$ 有(单值)反函数.

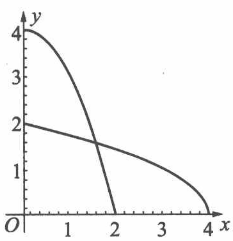

图 1-13

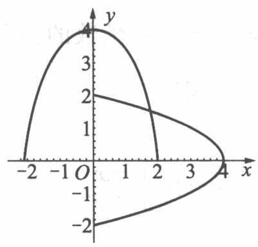

图 1-14

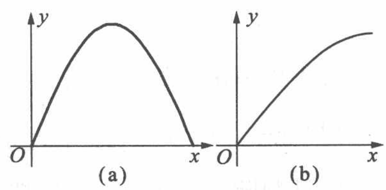

图 1-15

习题 1.1

A 组

1. 求以下函数的定义域

(1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(3) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

2. 求以下函数的反函数

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；　　(2) $y=x^2-1$.

3. 请回答以下问题

(1) 如果函数 $y=f(x)$ 满足：存在常数 M,N，使得 $N\leqslant f(x)\leqslant M$，问函数 $y=f(x)$ 是否有界？

(2) 有界函数的图象具有什么特征？

(3) 奇函数的图象具有什么特性？偶函数的图象具有什么特性？

(4) 周期函数的图象具有什么特性？

(5) 单调增、单调减函数的图象分别具有什么特性？

4. 给定函数的图象如下

请问：(1) 它们对应函数的零点分别是多少？(2) 函数在 y 轴上的截距大约是多少？