Jiaoxue Yu Ceshi

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

# 高一数学

# 教学与测试

- 新教材
- 教师用书
- 必修

苏州大学出版社

4.15

# 高一数学教学与测试

（教师用书）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 主编

苏州大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高一数学教学与测试.教师用书/苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编.—2版.—苏州:苏州大学出版社,2002.6(2006.6 重印)
必修
ISBN 7-81037-965-8

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 029742 号



**高一数学教学与测试**(教师用书)
苏州大学《中学数学月刊》编辑部 主编
责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
江苏省新华书店经销
丹阳兴华印刷厂印装
(地址:丹阳市胡桥镇 邮编:212313)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 25 字数 622 千
2002 年 6 月第 2 版 2006 年 6 月第 15 次修订印刷
ISBN 7-81037-965-8/G·414 定价:34.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

# 目录

## 第一章　集合与简易逻辑



## 第二章　函　　数



## 第三章　数　　列



## 第四章　三角函数

## 第五章　平面向量

# 第一章　集合与简易逻辑

## 1. 集合的概念

### 一、基础训练题

首尔. 北海道

1. ①“全体著名文学家”构成一个集合；　② 小于 8 且大于 $-2$ 的偶数集合是 $\{0,2,4,6\}$；
③ 集合 $\{0\}$ 中不含元素；　④ $\{1,2\}$，$\{2,1\}$ 是不同的集合.
则上述四个叙述中，正确的个数是　(B)
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

**提示**　②是正确的.

2. 设集合 $A=\{y\mid y=x^2+1\}$. 则下列元素属于集合 $A$ 的是　(C)
(A) $(0,1)$　(B) $-1$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\{1\}$

**提示**　$\because y=x^2+1\geqslant 1$，$\therefore A=\{y\mid y\geqslant 1\}$，$\therefore \sqrt{2}\in A$.

3. 设 $M=\{P\mid |PA|=3, A$ 为定点$\}$，定点 $B$ 满足 $|AB|=2$，则点 $B$ 与圆 $M$ 的位置关系是　(B)
(A) 点 $B$ 在圆上　(B) 点 $B$ 在圆内　(C) 点 $B$ 在圆外　(D) 点 $B$ 在圆心

**提示**　$M$ 表示以定点 $A$ 为圆心，3 为半径的圆上的点的集合，由 $|BA|=2$ 知点 $B$ 在圆内.

4. 若 $-3\in\{a-3, 2a-1, a^2-1\}$，则 $a=$ __$-1$__.

**提示**　由 $a-3=-3$ 得 $a=0$，此时 $2a-1=a^2-1=-1$，不合要求；由 $2a-1=-3$ 得 $a=-1$，经检验符合要求；由 $a^2-1=-3$，无解. $\therefore a=-1$.

5. 由实数 $x, -x, |x|$ 所组成的集合，其元素最多有 __2__ 个.

**提示**　$|x|=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$　当 $x=0$ 时，集合只有一个元素；$x\neq 0$ 时，集合有两个元素.

### 二、例　题

1. 下列研究对象能否构成一个集合？如果能，采用适当的方式表示它.
(1) 小于 5 的自然数；　(2) 某班所有高个子的同学；
(3) 不等式 $2x+1>7$ 的整数解；　(4) 平面直角坐标系内第一、三象限的角平分线上的所有点.

**解**　由于(2)中的对象没有明确的标准，不具备确定性，故不能组成一个集合，而其他的对象都可以组成集合，分别表示为：(1) 可以表示为 $\{0,1,2,3,4\}$. (3) 可以表示为 $\{x\mid x\in\mathbf{Z}$，且 $2x+1>7\}$. (4) 可以表示为 $\{(x,y)\mid y=x, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

**说明**　只有研究对象确定时才能构成集合. 表示集合的方法依据对象的特点或个数的多少采用适当的形式，如个数较少的有限集合可采用列举法，而其他的大多采用描述法. 在描述法表示中，要特别注意用数学

语言或符号来表示.

**2.** 判断下列集合是有限集还是无限集.如为有限集,用列举法表示;如为无限集,写出它的两个元素.

(1) $\{x|x^2-x-6=0\}$;　　(2) $\{y|y=x^2-x-6,x\in\mathbf{R}\}$;

(3) $\{(x,y)|y=x^2-x-6,x\in\mathbf{R}\}$;　　(4) $\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}\}$.

**解** (1) 是有限集.该集合是方程 $x^2-x-6=0$ 的解集,有两个元素,可表示为$\{-2,3\}$.

(2) 是无限集.表示 $x\in\mathbf{R}$ 时函数 $y=x^2-x-6$ 所有函数值 $y$ 的集合.由 $y=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\geqslant-\frac{25}{4}$得该集合为$\left\{y\middle|y\geqslant-\frac{25}{4}\right\}$,元素有$-\frac{25}{4}$,0 等.

(3) 是无限集.满足 $y=x^2-x-6$ 的所有$(x,y)$构成的集合,元素有$(0,-6)$,$(1,-6)$等.

(4) 是有限集.当 $x\in\mathbf{N}^*$,$y\in\mathbf{N}$ 且满足 $x+y=5$ 的$(x,y)$组成的集合.用列举法表示为$\{(1,4),(2,3),(4,1),(5,0)\}$.

**说明** 用描述法表示集合时,代表元素的形式十分重要,第(1)、(2)、(3)题中,虽然元素所满足的条件关系式相同或相似,但由于代表元素的形式不同,所以含义完全不同.第(1)、(2)题的集合是数集,而(3)、(4)题的集合是点集.

**3.** 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2+2x+1=0\}$,$a$ 为实数.

(1) 若 $A$ 是空集,求 $a$ 的取值范围;　　(2) 若 $A$ 是单元素集,求 $a$ 的值;

(3) 若 $A$ 中至多只有一个元素,求 $a$ 的取值范围.

**解** (1) 若 $A$ 是空集,则$\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta=2^2-4a<0,\end{cases}$ $\therefore$ $a>1$. (2) 若 $A$ 是单元素集,则 $a=0$,此时 $A=\{x\in\mathbf{R}|2x+1=0\}=\{-\frac{1}{2}\}$;或$\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta=2^2-4a=0,\end{cases}$ 即 $a=1$,此时 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2x+1=0\}=\{-1\}$. $\therefore$ $a=0$ 或 $a=1$. (3) 若 $A$ 中至多有一个元素,即 $A$ 为空集或单元素集,则 $a=0$ 或 $a\geqslant1$.

**说明** 形如二次方程(函数)$ax^2+bx+c=0$ 应注意二次项系数 $a$ 能否为 0,只有当 $a\neq0$ 时,才能利用其判别式来判定实根情况.

## 三、思考题

设 $M=\{m|m=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$. (1) 判断 8,9,10 是否属于 $M$;(2) 若 $a\in M,b\in M$,求证:$ab\in M$.

**解** (1) 由 $8=3^2-1^2$,$9=3^2-0^2$ 得 $8\in M$,$9\in M$. 假设 $10=x^2-y^2$,$x,y\in\mathbf{Z}$,$\because$ 10 为偶数,$\therefore$ $x,y$ 的奇、偶相同.若 $x,y$ 皆为奇数,可设 $x=2k_1+1$,$y=2k_2+1(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$,则 $x^2-y^2=(2k_1+1)^2-(2k_2+1)^2=4(k_1{}^2+k_1-k_2{}^2-k_2)$为 4 的整数倍.同理,若 $x,y$ 皆为偶数,也可得 $x^2-y^2$ 为 4 的整数倍.但 10 不能被 4 整除,$\therefore$ 不存在整数 $x,y$ 使 $x^2-y^2=10$,故 $10\notin M$. (2) 若 $a\in M,b\in M$,设 $a=x_1{}^2-y_1{}^2$,$b=x_2{}^2-y_2{}^2(x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{Z})$,则 $ab=(x_1{}^2-y_1{}^2)(x_2{}^2-y_2{}^2)=(x_1{}^2x_2{}^2+y_1{}^2y_2{}^2)-(x_1{}^2y_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2)=(x_1{}^2x_2{}^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1{}^2y_2{}^2)-(x_1{}^2y_2{}^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2{}^2y_1{}^2)=(x_1x_2-y_1y_1)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2\in M$.

## 四、说　明

**1.** 通过本节的学习,应理解集合的概念,了解集合中元素的确定性、互异性和无序性,会判断一组对象是否组成集合,能说出常用数集的名称和符号.了解某个对象属于或不属于集合的意义.

**2.** 掌握两种集合表示方法的符号和特征,并会运用它们正确表示一些简单的集合.要特别重视理解空集的意义和它的记号.空集是一个特殊的集合,它不含有任何元素.

## 五、备用题

**1.** 下列各题中，集合 $M$ 与 $P$ 表示同一集合的是 (C)

(A) $M=\{x\in\mathbf{R}|x^2+0.01=0\}$，$P=\{x|x^2=0\}$

(B) $M=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{(x,y)|x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

(C) $M=\{y|y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$，$P=\{t|t=(y-1)^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

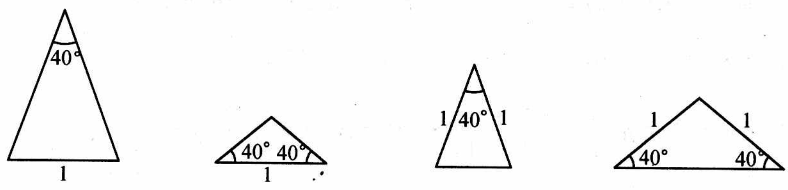
(D) $M=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

**2.** 设 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{12}{5-x}\in\mathbf{N}\right\}$，用列举法表示集合 $A=\underline{\{-7,-1,1,2,3,4\}}$.

**提示** $5-x$ 可取 $1,2,3,4,6,12$. ∴ $x$ 可取 $4,3,2,1,-1,-7$.

**3.** 集合{有长度为 1 的边及 40°的内角的等腰三角形}中有多少个元素？试画出这些元素来.

**解** 有 4 个元素，它们分别是：(1) 底边为 1，顶角为 40°的等腰三角形；(2) 底边为 1，底角为 40°的等腰三角形；(3) 腰长为 1，顶角为 40°的等腰三角形；(4) 腰长为 1，底角为 40°的等腰三角形.




(A) (B) (C) (D)

**4.** 设 $x,y,z$ 都是非零实数，试用列举法将 $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来.

**解** 当 $x,y,z$ 都是正数时，原式 $=4$；当 $x,y,z$ 中有且仅有两个是正数时，原式 $=0$；当 $x,y,z$ 中有且仅有一个是正数时，原式 $=0$；当 $x,y,z$ 都是负数时，原式 $=-4$. 综上讨论，所求的集合为 $\{4,0,-4\}$.

**5.** 已知集合 $A=\{x|x=3a+5b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y|y=7m+10n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，试判断 $A$ 与 $B$ 的关系.

**解** 设 $x\in A$，则 $x=3a+5b=(10-7)a+(40-35)b=7(-a-5b)+10(a+4b)$，∴ $x\in B$，$A\subseteq B$.

设 $y\in B$，则 $y=7m+10n=(10-3)m+5(2n)=3(-m)+5(2m+2n)$，∴ $y\in A$，$B\subseteq A$. 因而 $A=B$.

**说明** 上述配凑不惟一，如 $3a+5b=7(x_1a+y_1b)+10(x_2a+y_2b)$，则满足 $\begin{cases}7x_1+10x_2=3,\\7y_1+10y_2=5\end{cases}$ 的任一整数解均合要求.

**6.** 设集合 $A=\{n\in\mathbf{Z}||n|\leqslant 3\}$，集合 $B=\{y|y=x^2-1,x\in A\}$，集合 $C=\{(x,y)|y=x^2-1,x\in A\}$，试用列举法分别写出集合 $A,B,C$.

**解** $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$；$B=\{-1,0,3,8\}$； $C=\{(-3,8),(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3),(3,8)\}$.

**说明** 弄清集合中元素的构成特点，为后续的学习作好铺垫.

## 六、自我测试

**1.** 下面有四个命题：

① 集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数是 1；② 0 是自然数；③ $\{1,2,3\}$ 是不大于 3 的自然数组成的集合；④ $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b\geqslant 2$.

其中正确命题的个数是 (B)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

**提示**　只有②是正确的.

**2.** 下列关系中表述正确的是 (D)

(A) $0\in\{x^2=0\}$　　(B) $0\in\{(0,0)\}$　　(C) $0\in\varnothing$　　(D) $0\in\mathbf{N}$

**提示**　(A) 集合中的元素为方程 $x^2=0$，正确表述为 $0\in\{x\mid x^2=0\}$；(B) 集合中的元素为二元数组(0,0)；(C) 空集不含任何元素.

**3.** 方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x-2y=-1\end{cases}$ 的解集为 (C)

(A) $\{x=1,y=1\}$　　(B) $\{1\}$　　(C) $\{(1,1)\}$　　(D) $\{(x,y)\mid(1,1)\}$

**提示**　方程组的解为数对(1,1)，用列举法只有(C)正确. 如果用描述法，可表示为 $\{(x,y)\mid x=1,y=1\}$.

**4.** 已知集合 $M=\{0,2,3,7\}$，$P=\{x\mid x=ab,a\in M,b\in M,a\neq b\}$，则用列举法表示集合 $P$ 为 $\underline{\{0,6,14,21\}}$.

**提示**　$0\times2=0\times3=0\times7=0,2\times3=6,2\times7=14,3\times7=21$.

**5.** 用列举法表示不等式组 $\begin{cases}2x+4>0,\\1+x\geqslant2x-1\end{cases}$ 的整数解组成的集合为 $\underline{\quad\{-1,0,1,2\}\quad}$.

**提示**　不等式组的实数解为 $-2<x\leqslant2$，整数解为 $-1,0,1,2$.

**6.** 数集 $\{1,a,a^2-a\}$ 中的元素 $a$ 不能取的值是 $\underline{\quad 0,1,2,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\quad}$.

**提示**　由元素互异性应满足 $\begin{cases}a\neq1,\\a^2-a\neq1,\\a\neq a^2-a.\end{cases}$

**7.** 集合 $A=\{x\mid x=\sqrt{2}m+n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$，判断下列元素 $x$ 是否属于集合 $A$.

(1) $x=0$；(2) $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$；(3) $x_1\in A,x_2\in A,x=x_1+x_2$.

**解**　(1) ∵ $x=0=\sqrt{2}\times0+0$，且 $0\in\mathbf{Z}$，∴ $x\in A$. (2) ∵ $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}\times1+(-1)$，又 $1\in\mathbf{Z},-1\in\mathbf{Z}$，∴ $x\in A$. (3) ∵ $x_1\in A$，∴ 存在整数 $m_1,n_1$ 使 $x_1=m_1\sqrt{2}+n_1$，同理存在整数 $m_2,n_2$ 使 $x_2=m_2\sqrt{2}+n_2$，∴ $x=x_1+x_2=(m_1+m_2)\sqrt{2}+(n_1+n_2)$，∵ $m_1+m_2\in\mathbf{Z},n_1+n_2\in\mathbf{Z}$，∴ $x\in A$.

**8.** 设 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{1-x^2}=1\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=1-x^2\}$，若 $C=\{(x,y)\mid(x,y)\in B$ 且 $(x,y)\notin A\}$，用列举法表示集合 $C$.

**解**　由 $\frac{y}{1-x^2}=1$ 得 $y=1-x^2(x\neq\pm1)$，∴ $A=\{(x,y)\mid y=1-x^2$ 且 $x\neq\pm1\}$.

∵ $(x,y)\in B$ 且 $(x,y)\notin A$，∴ $\begin{cases}x=\pm1,\\y=1-x^2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\pm1,\\y=0,\end{cases}$ ∴ $C=\{(-1,0),(1,0)\}$.

**9.** 已知集合 $A=\left\{a\,\middle|\,\frac{x^2-4}{x+a}=1\text{ 有惟一解}\right\}$，用列举法表示集合 $A$.

**解** 本题应分两种情况讨论.(1) $\begin{cases} x^2-x-a-4=0, & ① \\ x+a\neq 0 & ② \end{cases}$ 有惟一实数解.由①,$\Delta=1+4(a+4)=0\Rightarrow a=-\frac{17}{4}$,此时 $x=\frac{1}{2}$,$x+a\neq 0$,$\therefore -\frac{17}{4}\in A$.(2) 方程可写成 $\frac{(x-2)(x+2)}{x+a}=1$. ③ $a=2$ 时,方程③有惟一解 $x=3$;$a=-2$ 时,方程③有惟一解 $x=-1$.$\therefore 2\in A,-2\in A$.综上,$A=\left\{-\frac{17}{4},2,-2\right\}$.

**10.** 被 8 除余数是 $k(k=0,1,2,\cdots,7)$ 的正整数集合记作 $C_k$,已知 $a\in C_1$,$b\in C_5$,若 $2a+3b\in C_x$,求 $x$ 的值.

**解** $\because a\in C_1$,$\therefore a=8m+1,m\in\mathbf{N}$,$\because b\in C_5$,$\therefore b=8n+5,n\in\mathbf{N}$.
$\therefore 2a+3b=2(8m+1)+3(8n+5)=8(2m+3n+2)+1\in C_1$,$\therefore x=1$.

# 2. 子　　集

## 一、基础训练题

**1.** 若集合 $A=\{x|1<x<2\}$,集合 $B=\{x|x^2>0\}$,则 (D)
(A) $A\not\subseteq B$　(B) $B\subsetneqq A$　(C) $A=B$　(D) $A\subsetneqq B$

**提示** $B=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$,画出数轴可知 $A\subsetneqq B$.

**2.** 若集合 $A=\{-1,2\}$,$B=\{x|x^2+ax+b=0\}$,且 $A=B$,则有 (C)
(A) $a=1,b=-2$　(B) $a=2,b=2$　(C) $a=-1,b=-2$　(D) $a=-1,b=2$

**提示** 由 $A=B$ 知 $-1$ 与 $2$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根,求出 $a=-1,b=-2$.

**3.** 设集合 $M=\{(x,y)|xy>0$ 且 $x+y<0\}$,$N=\{(x,y)|x<0$ 且 $y<0\}$,则 $M$ 与 $N$ 之间的关系是 (C)
(A) $N\subsetneqq M$　(B) $N\supsetneqq M$　(C) $M=N$　(D) $N\cap M=\varnothing$

**提示** 若 $xy>0$ 且 $x+y<0$,则 $x<0$ 且 $y<0$,$\therefore M\subseteq N$;反之,若 $x<0$ 且 $y<0$ 则 $xy>0$ 且 $x+y<0$,$\therefore M\supseteq N$,$\therefore M=N$.

**4.** 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant\sqrt{10}\}$,由其中所有偶数构成的集合为 <u>$\{2,0\}$</u>.

**提示** $x=0,1,2,3$,$\therefore P=\{0,1,2,3\}$.0 是偶数.

**5.** 下列命题:① 任何一个集合必有两个或两个以上子集;② 空集没有子集;③ 空集是任何一个集合的真子集;④ 若 $A\supseteq B$,则不属于 $A$ 的对象必不属于 $B$;⑤ 若 $A\not\subseteq B$,则 $B\not\subseteq A$.其中正确的是 <u>④</u>.

**提示** ① 错,空集只有一个子集;② 错,$\varnothing\subseteq\varnothing$;③ 错,空集不是空集的真子集;⑤ 错,如 $\{1,2\}\not\subseteq\{1\}$,但 $\{1\}\subseteq\{1,2\}$.

## 二、例　题

**1.** 判定下列集合之间的关系,用适当的符号表示它们的关系.
(1) $A=\{x\in\mathbf{Z}|x=2n,n\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x$ 是偶数$\}$;
(2) $A=\{x|x$ 是平行四边形$\}$,$B=\{x|x$ 是正方形$\}$;
(3) $A=\{x\in\mathbf{R}|y=\sqrt{x-2},y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\in\mathbf{R}|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$;
(4) $A=\{x|x$ 是奇数$\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x=4n\pm 1,n\in\mathbf{Z}\}$.

**解** (1) ∵ $A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，$B=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\}$，∴ $A\subsetneqq B$. (2) ∵ 正方形一定是平行四边形，∴ $A\supsetneqq B$. (3) 使 $y=\sqrt{x-2}$，$y\in\mathbf{R}$ 有意义的 $x$ 值为 $x\geqslant2$，故 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant2\}$. 又对 $x\in\mathbf{R}$，有 $y=x^2\geqslant0$，∴ $B=\{y\in\mathbf{R}\mid y\geqslant0\}$. ∴ $A\subsetneqq B$. (4) 对于任一 $B$ 中元素 $x$，都有 $x\in A$，∴ $B\subseteq A$；另一方面，对于 $A$ 中任一元素 $y=2n-1$，($n\in\mathbf{Z}$)；当 $n$ 为偶数，即 $n=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，则 $2n-1=4m-1\in B$；当 $n$ 为奇数，即 $n=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，则 $2n-1=4m+1\in B$，故有 $A\subseteq B$. ∴ $A=B$.

**说明** 两个集合的关系存在着包含、相等或不包含等情况，其中包含情况要注意是否是真包含，而集合相等往往应从正反两个方面予以说明. 了解一些常见集合的不同表现形式可以使我们更好地研究问题.

**2.** 已知 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$，$B=\{x\mid 4x+p<0\}$，当 $B\subseteq A$ 时，求实数 $p$ 的取值范围.

**解** ∵ $B=\{x\mid 4x+p<0\}=\{x\mid x<-\frac{p}{4}\}$，将集合 $A$ 在数轴上表示出来，由 $B\subseteq A$，∴ $-\frac{p}{4}\leqslant-1$，即 $p\geqslant4$，所以实数 $p$ 的取值范围是 $\{p\mid p\geqslant4\}$.

**3.** 已知集合 $P=\left\{1,\frac{a}{b},b\right\}$，集合 $Q=\{0,a+b,b^2\}$，且 $P=Q$，求 $a^{2006}+b^{2005}$ 的值.

**解** ∵ $P=Q$，即 $\left\{1,\frac{a}{b},b\right\}=\{0,a+b,b^2\}$，显然，$b\neq0$，∴ $a=0$. 从而 $b$ 和 $b^2$ 中有一个为 1，由集合中元素的互异性，$b\neq1$，∴ $b^2=1$，从而 $b=-1$. 因此，$a^{2006}+b^{2005}=(-1)^{2005}=-1$.

## 三、思考题

集合 $P=\{x,1\}$，$Q=\{y,1,2\}$，其中 $x,y\in\{1,2,3,\cdots,9\}$，且 $P\subseteq Q$. 把满足上述条件的有序数对 $(x,y)$ 作为点的坐标，则这样的点的个数是 (B)

(A) 9 个　(B) 14 个　(C) 15 个　(D) 21 个

**解** ∵ $P\subseteq Q$，∴ $x=2$ 或 $x=y$，而由元素互异性知 $y\in\{3,4,\cdots,9\}$，当 $x=2$ 时，$y$ 可以取 $3,4,\cdots,9$，有 7 个点；当 $x=y$ 时，有 $(3,3)$，$(4,4)$，…，$(9,9)$ 共 7 个点. 因此共有 14 个点.

## 四、说　明

**1.** 理解子集、真子集的概念，正确运用有关的术语、符号和图示方法；正确区分术语“包含于”与“包含”以及符号“$\subseteq$”与“$\subsetneqq$”的不同意义.

**2.** 掌握子集的有关性质：(1) $\varnothing\subseteq A$（空集是任何集合的子集，当然也是空集的子集，且是任何非空集合的真子集）；(2) $A\subseteq A$（任何非空集合 $A$ 都有两个特殊的子集 $\varnothing$、$A$）；(3) 传递性：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；(4) 相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$（即相等的两个集合的元素完全相同）.

**3.** 能写出有限集的所有子集. 一般地，若非空的有限集 $A$ 中有 $n$ 个元素，则 $A$ 有 $2^n$ 个子集，$2^n-1$ 个真子集，$2^n-1$ 个非空子集，$2^n-2$ 个非空真子集.

**4.** 数学中经常用封闭曲线的内部来表示集合，它称为文氏图（文氏是指英国逻辑学家John Venn，1834—1923）. 文氏图可以帮助我们直观地理解集合间的各种关系.

## 五、备用题

**1.** 符合 $\{a\}\subsetneqq P\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合 $P$ 的个数是 (B)

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

**提示** $P=\{a,b\}$ 或 $\{a,c\}$ 或 $\{a,b,c\}$.

**2.** $A=\{x\mid x^2-x=0\}$，$B=\{x\mid x^2-|x|=0\}$，则 $A,B$ 之间的关系为 $\underline{\ A\subsetneqq B\ }$.

**提示** $A=\{0,1\}$，$B=\{0,-1,1\}$.

**3.** 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且 $B\subsetneqq A$，求 $a$ 的值.

**解**　∵ $B\subsetneqq A$，∴ $a^2-a+1=3$ 或 $a$. 若 $a^2-a+1=3$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$，检验适合；若 $a^2-a+1=a$，解得 $a=1$，与集合 $A$ 中元素互异性矛盾. 故 $a=-1$ 或 $a=2$.

**4.** 已知集合 $B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$，写出满足条件的集合 $A$.

**解**　$A$ 中的元素既在 $B$ 中，又在 $C$ 中. 而 $B$ 与 $C$ 的公共元素为 0，2，4.
∴ $A\subseteq\{0,2,4\}$，即集合 $A$ 共有 8 个：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{0,2\}$，$\{0,4\}$，$\{2,4\}$，$\{0,2,4\}$.

**5.** 同时满足(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；(2) 若 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 $M$ 有多少个？写出这些集合来.

**解**　按集合 $M$ 中元素个数分类：① $M$ 中只有 1 个元素时，仅有 $3\in M$，$6-a=3\in M$，∴ $M=\{3\}$；② $M$ 中有 2 个元素时，$M=\{1,5\}$，$M=\{2,4\}$；③ $M$ 中有 3 个元素时，$M=\{1,3,5\}$，$M=\{2,3,4\}$；④ $M$ 中有 4 个元素时，$M=\{1,2,4,5\}$；⑤ $M$ 中有 5 个元素时，$M=\{1,2,3,4,5\}$. 因此，适合条件的集合 $M$ 共有 7 个.

**6.** 若集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $B\subseteq A$，求由 $m$ 的可能值组成的集合.

**解**　(1) 当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；(2) 若 $B\neq\varnothing$，且满足 $B\subseteq A$，应有：
$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m\geqslant -3,\\ m\leqslant 3,\end{cases}$ ∴ $2\leqslant m\leqslant 3$. 故 $m<2$，或 $2\leqslant m\leqslant 3$，所求的集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

## 六、自我测试

**1.** 四个关系式：① $\varnothing\subsetneqq\{0\}$；② $0\in\{0\}$；③ $\varnothing\in\{0\}$；④ $\varnothing=\{0\}$. 其中表述正确的为　(A)

(A) ①，②　　(B) ①，③　　(C) ①，④　　(D) ②，④

**2.** 若集合 $\{x\mid 2x-a=0,a\in\mathbf{N}^*\}\subsetneqq\{x\mid -1<x<3\}$，则 $a$ 的所有取值所组成的集合中元素之和为　(C)

(A) 10　　(B) 12　　(C) 15　　(D) 17

**解**　由条件知：$-1<\frac{a}{2}<3$，即 $-2<a<6$，又 $a\in\mathbf{N}^*$，∴ $a$ 的取值为 $\{1,2,3,4,5\}$，元素之和为 15.

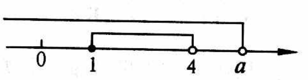
**3.** 集合 $A=\{y\in\mathbf{N}\mid y=-x^2+4,x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数为　(C)

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

**提示**　$A=\{0,3,4\}$，故 $A$ 有 7 个真子集.

**4.** 已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 $a$ 的取值集合为 $\underline{\{a\mid a\geqslant 4\}}$.

**解**　将数集 $A$ 表示在数轴上(如图)，要满足 $A\subsetneqq B$，那么表示数 $a$ 的点必须在 4 或 4 的右边. 因此，所求 $a$ 的取值集合为 $\{a\mid a\geqslant 4\}$.




**5.** 已知 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$正方形$\}$，$C=\{$平行四边形$\}$，那么 $A,B,C$ 之间的关系是 $\underline{B\subsetneqq A\subsetneqq C}$.

**提示**　正方形是特殊的菱形，菱形是特殊的平行四边形.

**6.** 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+5x+2=0\}$，若 $A$ 的子集个数至多有 2 个，则 $a$ 的取值范围是 $\underline{\left\{a\mid a=0\text{ 或 }a\geqslant\frac{25}{8}\right\}}$.

**解**　∵ $A$ 的子集个数至多有 2 个，∴ $A$ 中至多有 1 个元素. 当 $a=0$ 时，$A=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ 成立. 当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=25-8a\leqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{25}{8}$. ∴ $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{25}{8}$.

7. 已知集合 $A=\{x|x^2+3x+3=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$A\subseteq X\subseteq B$，求满足条件的集合 $X$.

**解** ∵ $A=\{x|x^2+3x+3=0\}=\varnothing$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，∴ $\varnothing\subseteq X\subseteq\{2,3\}$满足条件的集合 $X$ 有$\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{2,3\}$.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-(m+1)x+m=0\}$.

(1) 若 $B\subsetneqq A$，求 $m$ 的值的集合 $P$；　(2) 若 $B\subseteq A$，求 $m$ 的值的集合 $Q$.

**解** $A=\{1,2\}$. 集合 $B$ 中的方程可写成$(x-1)(x-m)=0$. 当 $m=1$ 时，$B=\{1\}\subsetneqq A$；$m=2$ 时 $B=\{1,2\}=A$. 因此，(1) $P=\{1\}$；(2) $Q=\{1,2\}$.

9. 设数集 $A=\{1,2,a\}$，$B=\{1,a^2-a\}$，若 $A\supseteq B$，求实数 $a$ 的值.

**解** ∵ $B\subseteq A$，∴ $a^2-a=2$ 或 $a^2-a=a$. 若 $a^2-a=2$，得 $a=2$ 或 $-1$，根据集合的元素的互异性，舍去 2，∴ $a=-1$. 若 $a^2-a=a$，得 $a=0$ 或 2，检验只有 0 符合要求. 综上，$a=-1$ 或 $a=0$.

10. 已知集合 $A=\{x|-2k+6<x<k-3\}$，$B=\{x|-k<x<k\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 $k$ 的取值范围.

**解** 当$\begin{cases}-2k+6\geqslant k-3,\\-k<k\end{cases}$即 $0<k\leqslant 3$ 时，$A=\varnothing$，$B\neq\varnothing$，有 $A\subsetneqq B$ 成立. 当 $k>3$ 时，若 $A\subsetneqq B$，则$\begin{cases}-2k+6\geqslant -k,\\k-3\leqslant k\end{cases}$(等号不同时成立)得 $3<k\leqslant 6$. 综上得 $k$ 的取值范围是$\{k|0<k\leqslant 6\}$.

**说明** 此题容易忽略 $A=\varnothing$ 的情况以及 $B\neq\varnothing$ 的隐含条件.

## 3. 全集与补集

### 一、基础训练题

1. 已知集合 $S=\{x|x$ 是小于 15 的质数$\}$，集合 $A=\{3,5\}$，则 $\complement_S A$ 等于　(D)

(A) $\{1,7,9,11\}$　(B) $\{7,11,13\}$　(C) $\{1,2,7,11,13\}$　(D) $\{2,7,11,13\}$

2. 已知 $A=\{x|x>2+\sqrt{3}\}$，$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则　(C)

(A) $a\subseteq A$　(B) $\{a\}\in A$　(C) $a\in\complement_{\mathbf{R}}A$　(D) $a\in A$

**提示** $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$，$a=2+\sqrt{3}$，∴ $a\in\complement_{\mathbf{R}}A$.

3. 设 $U=\{x\in\mathbf{R}|x\geqslant -1\}$，$A=\{x\in\mathbf{R}|x\geqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$ __$\{x\in\mathbf{R}|-1\leqslant x<1\}$__.

**提示** 可借助数轴进行判断.

4. 设 $S=\{(x,y)|y=x-1\}$，$A=\{(x,y)|y=\dfrac{x^3-x}{x^2+x}\}$，则 $\complement_S A=$ __$\{(0,-1),(-1,-2)\}$__.

**提示** $A=\{(x,y)|y=x-1,x\neq 0,x\neq -1\}$，∴ $\complement_S A=\{(x,y)|y=x-1,x=0$ 或 $x=-1\}=\{(0,-1),(-1,-2)\}$.

5. 设 $S=\{1,2,3,4\}$，$M=\{x\in S|x^2-5x+p=0\}$，若 $\complement_S M=\{1,4\}$，则 $p=$ __6__.

**提示** ∵ $\complement_S M=\{1,4\}$，∴ $M=\{2,3\}$，即 $x^2-5x+p=0$ 的两根为 2，3，∴ $p=6$.

## 二、例　题

**1.** 若集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，当全集 $U$ 分别取下列集合时，求 $\complement_U A$：

(1) $U=\mathbf{R}$；　(2) $U=\{x\mid x\leqslant 3\}$；　(3) $U=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.

**解**　(1) $\complement_U A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}$. (2) $\complement_U A=\{x\mid x<-1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$. (3) $\complement_U A=\{x\mid -2\leqslant x<-1$ 或 $x=2\}$.

**说明**　本题可以借助于数轴来求解.

**2.** 设全集是数集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 $a,b$ 的值.

**解**　$\because$ $\complement_U A=\{5\}$，$\therefore$ $5\in U$ 且 $5\notin A$. 又 $b\in A$，$\therefore$ $b\in U$，由此得 $\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\ b=3.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=2,\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4,\\ b=3,\end{cases}$ 都符合题意.

**3.** 若下列三个方程 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax+(a^2-a+1)=0$，$ax^2-x+2=0$ 中至少有一个方程有实根，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**　若三个方程均无实根，则 $\begin{cases}\Delta_1=1-4a<0,\\ \Delta_2=4a^2-4(a^2-a+1)<0,\\ \Delta_3=1-8a<0,\end{cases}$ 得 $\frac{1}{4}<a<1$. 记 $A=\{a\mid \frac{1}{4}<a<1\}$，$\therefore$ 三个方程至少有一个有实根的集合为 $\complement_{\mathbf{R}} A=\{a\mid a\leqslant \frac{1}{4}$ 或 $a\geqslant 1\}$.

**说明**　本题从条件直接求解较复杂，故考虑条件的反面，利用补集求解.

## 三、思考题

对于非空集合 $A$ 和 $B$，把所有属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差集，记作 $A\backslash B$. 已知 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\backslash B=$ __$\{1,2\}$__. 一般地，在什么条件下，$A\backslash B=\complement_A B$？

**解**　根据题设中差集的意义，$A\backslash B=\{1,2\}$，当 $B\subseteq A$ 时，$A\backslash B=\complement_A B$.

## 四、说　明

1. 理解补集的概念，能正确运用补集的符号. $S$ 中子集 $A$ 的补集记号及其意义为 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$. 会用文氏图表示一个集合中某个子集的补集.
2. 对于补集，有下面的性质：$\complement_U A\subseteq U$；$\complement_U(\complement_U A)=A$；$\complement_U U=\varnothing$；$\complement_U\varnothing=U$.
3. 写出给定集合 $S$ 中子集 $A$ 的补集是本课的基本技能.

## 五、备用题

**1.** 已知集合 $S=\{x\mid -3<x<6\}$，$A=\{x\mid -2<x<1\}$，$B=\{x\mid 5<x<6\}$，则集合 $A$ 与 $\complement_S B$ 的关系是 = __$A\subsetneqq\complement_S B$__.

**2.** 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，$\{3\}\subseteq B\subsetneqq\complement_U A$. 写出所有满足要求的集合 $B$.

**解**　$\complement_U A=\{3,4,5\}$，集合 $B$ 满足 $\{3\}\subseteq B\subsetneqq\{3,4,5\}$，集合 $B$ 为 $\{3\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$.

**3.** 设全集 $U=\{2,4,1-a\}$，$A=\{2,a^2-a+2\}$，且 $\complement_U A=\{-1\}$，求 $a$ 和 $A$.

**解** $\begin{cases}a^2-a+2=4,\\1-a=-1\end{cases}\Rightarrow a=2$，则 $A=\{2,4\}$.

**4.** 设 $U=\left\{-\frac{1}{3},5,-3\right\}$，$-\frac{1}{3}$ 是 $A=\{x|3x^2+px-5=0\}$ 与 $B=\{x|3x^2+10x+q=0\}$ 的公共元素，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

**解** $A$，$B$ 中的方程都有一根为 $-\frac{1}{3}$，分别代入，得 $\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p-5=0,\\\frac{1}{3}-\frac{10}{3}+q=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}p=-14,\\q=3.\end{cases}$ $\therefore A=\{x|3x^2-14x-5=0\}=\{x|(3x+1)(x-5)=0\}=\left\{-\frac{1}{3},5\right\}$，$B=\{x|3x^2+10x+3=0\}=\{x|(3x+1)(x+3)=0\}=\left\{-\frac{1}{3},-3\right\}$. $\therefore \complement_U A=\{-3\}$，$\complement_U B=\{5\}$.

**说明** 设 $\alpha$ 是 $3x^2+px-5=0$ 的一个根，$\beta$ 是 $3x^2+10x+q=0$ 的一个根，$\alpha\neq-\frac{1}{3}\neq\beta$，则由韦达定理，$-\frac{1}{3}\alpha=-\frac{5}{3}$，$-\frac{1}{3}+\beta=-\frac{10}{3}$，$\therefore\alpha=5$，$\beta=-3$. 即 $A=\left\{-\frac{1}{3},5\right\}$，$B=\left\{-\frac{1}{3},-3\right\}$.

**5.** 设集合 $A=\{a|a=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{b|b=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，试证明 $A=B$.

**证明** 设 $a\in A$，则 $a=3n+2=3(n+1)-1$. $\because n\in\mathbf{Z}$，$\therefore n+1\in\mathbf{Z}$，$\therefore a\in B$，故 $A\subseteq B$. ① 又设 $b\in B$，则 $b=3k-1=3(k-1)+2$. $\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k-1\in\mathbf{Z}$，$\therefore b\in A$，故 $B\subseteq A$. ② 由①②知，$A=B$.

**6.** 定义 $A-B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$，若 $M=\{x|1\leqslant x\leqslant 2005,x\in\mathbf{N}\}$，$P=\{y|2\leqslant y\leqslant 2006,y\in\mathbf{N}\}$，则 $P-M=$(D)

(A) $M$　　(B) $P$　　(C) $\{1\}$　　(D) $\{2006\}$

**提示** $P-M=\{x|x\in P\text{ 且 }x\notin M\}=\{2006\}$.

## 六、自我测试

**1.** 设 $U$ 为全集，$\varnothing$ 为空集，$A$，$B$ 为 $U$ 的非空子集，则下列命题正确的是　(D)

(A) $\complement_U\varnothing=\varnothing$　　(B) $\complement_U(\complement_U A)=\{A\}$

(C) 若 $A\subseteq B$，则 $\complement_U A\subseteq\complement_U B$　　(D) 若 $A\subseteq\complement_U B$，则 $\complement_A\supseteq B$

**提示** (A)错. $\complement_U\varnothing=U$. (B)错，$\complement_U(\complement_U A)=A$. (C)错，若 $A\subseteq B$，则 $\complement_U A\supseteq\complement_U B$.

**2.** 已知全集 $U=\{3,5,7\}$，数集 $A=\{3,|a-7|\}$，如果 $\complement_U A=\{7\}$，则 $a$ 的值为　(A)

(A) 2 或 12　　(B) $-2$ 或 12　　(C) 12　　(D) 2

**提示** 由 $\complement_U A=\{7\}$ 知，$7\notin A$，故 $|a-7|=5$，$a=2$ 或 12.

**3.** 设集合 $A$，$B$，$C$ 都是 $\mathbf{R}$ 的子集，若 $A=\complement_{\mathbf{R}}B$，$B=\complement_{\mathbf{R}}C$，则 $A$ 与 $C$ 的关系是　(D)

(A) $A\subsetneqq C$　　(B) $C\subsetneqq A$　　(C) $A\not\subseteq C$　　(D) $A=C$

**提示** $\complement_{\mathbf{R}}B=\complement_{\mathbf{R}}(\complement_{\mathbf{R}}C)=C$. 故 $A=C$.

**4.** 已知全集 $U=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x>5\}$，则 $\complement_U A$ 用列举法表示为 <u>$\{0,1,2,3,4,5\}$</u>.

**提示** $\complement_U A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 5\}$.注意不要遗漏自然数 0.

**5.** 设全集 $U=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-8x+15=0\}$,$\complement_U A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax-1=0\}$,则由实数 $a$ 组成的集合为 $\underline{\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}}$.

**6.** 设 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x=a^2-2a+2\}$,$B=\{t\mid t=-b^2+4b+1\}$,则 $\complement_U A$ 与 $B$ 的关系是 $\underline{\complement_U A\subsetneqq B}$.

**提示** 由 $x=a^2-2a+2=(a-1)^2+1\geqslant 1$,得 $A=\{x\mid x\geqslant 1\}$;由 $t=-b^2+4b+1=-(b-2)^2+5\leqslant 5$,得 $B=\{t\mid t\leqslant 5\}$,$\complement_U A=\{x\mid x<1\}$,$\therefore$ $\complement_U A\subsetneqq B$.

**7.** 设全集 $U=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$A=\{x\mid x^2+px+2q=0\}$.若 $\complement_U(\complement_U A)=U$,求 $p^2+q^2$ 的值.

**解** $\because$ $\complement_U(\complement_U A)=U$,$\therefore$ $\complement_U A=\varnothing$,$\therefore$ $A=U$,$\therefore$ $\begin{cases}p=-5,\\2q=6,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}p=-5,\\q=3,\end{cases}$ $\therefore$ $p^2+q^2=(-5)^2+3^2=34$.

**8.** 设全集 $U=\mathbf{R}$,$P=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$,$B=\{x\mid m\leqslant x<m+1\}$.记所有满足 $B\subseteq\complement_U P$ 的 $m$ 组成的集合为 $M$,求 $\complement_U M$.

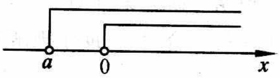
**解** $\complement_U P=\{x\mid 1<x<3\}$,由 $B\subseteq\complement_U P$ 得 $\begin{cases}1<m,\\m+1\leqslant 3,\end{cases}$ 所以 $M=\{m\mid 1<m\leqslant 2\}$,则 $\complement_U M=\{m\mid m\leqslant 1$ 或 $m>2\}$.

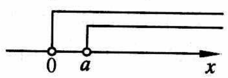
**9.** 已知 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$,$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$.

(1) 若 $M\subseteq N$,求 $a$ 的取值范围;(2) 若 $M\supseteq N$,求 $a$ 的取值范围;(3) 若 $\complement_{\mathbf{R}}M\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}N$,求 $a$ 的取值范围.

**解** (1) $\because$ $M\subseteq N$,如图得 $a\leqslant 0$.(2) $\because$ $M\supseteq N$,如图得 $a\geqslant 0$.

(3) $\because$ $\complement_{\mathbf{R}}M=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 0\}$,$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant a\}$.而 $\complement_{\mathbf{R}}M\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}N$,即 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 是 $\complement_{\mathbf{R}}N$ 的真子集,故 $a>0$.




**说明** (1) 注意验证端点值;(2) 也可求满足 $M\supsetneqq N$ 的 $a$ 的值.

**10.** 已知全集 $S=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$,$A=\{1,|2x-1|\}$,如果 $\complement_S A=\{0\}$,则这样的实数 $x$ 是否存在?若存在,求出 $x$;若不存在,请说明理由.

**解** $\because$ $\complement_S A=\{0\}$,$\therefore$ $\begin{cases}A\subseteq S,\\0\in S,\\0\notin A,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^3+3x^2+2x=0, & ①\\|2x-1|=3. & ②\end{cases}$ 由①得 $x=0$,$x=-1$,$x=-2$,代入②知 $x=-1$,

$\therefore$ 满足条件的实数 $x$ 存在,$x=-1$.

## 4. 交集与并集(1)

### 一、基础训练题

**1.** 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$,$Q=\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q$ 等于 (A)

(A) $\{1,2\}$　(B) $\{3,4\}$　(C) $\{1\}$　(D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

**解** $Q=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$\therefore$ $P\cap Q=\{1,2\}$.

**2.** 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$P=\{3,4,5\}$,$Q=\{1,3,6\}$,则集合 $\{2,7,8\}$ 是 (D)

(A) $P\cup Q$　(B) $P\cap Q$　(C) $(\complement_U P)\cup(\complement_U Q)$　(D) $\complement_U(P\cup Q)$

**解** $\because$ $P\cap Q=\{3\}$,$P\cup Q=\{1,3,4,5,6\}$,$\therefore$ $\complement_U(P\cup Q)=\{2,7,8\}$.

**3.** 已知 $A=\{(x,y)\mid y=1-x^2\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{(0,1),(-1,0)\}}$.

**解** $A\cap B=\{(x,y)\mid y=x+1$ 且 $y=1-x^2\}=\{(0,1),(-1,0)\}$.

**4.** 已知 $A=\{x\mid x^2-4=0\}$，$B=\{x\mid x^3-x^2-6x=0\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{-2\}}$，$A\cup B=$ $\underline{\{-2,0,2,3\}}$.

**提示** $A=\{-2,2\}$，$B=\{0,-2,3\}$.

**5.** 已知 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 2x+a>0\}$，若 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，则 $a$ 的取值范围是 $\underline{\{a\mid a\geqslant 2\}}$.

**解** $B=\{x\mid x>-\frac{a}{2}\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant-\frac{a}{2}\}$. $\because A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，$\therefore -\frac{a}{2}\leqslant -1$，得 $a\geqslant 2$.

## 二、例　题

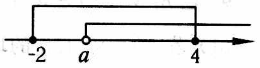
**1.** 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x>a\}$.

(1) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B\neq A$，求实数 $a$ 的取值范围；

(3) 若 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap B\neq A$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解** 将集合 $A$ 表示在数轴上(如图). (1) 要使 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $a<4$(注意 $a\neq 4$)；(2) 要使 $A\cap B\neq A$，则 $a\geqslant -2$(注意 $a=-2$ 是适合的)；(3) 要使 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap B\neq A$，应有 $-2\leqslant a<4$.




**说明** 研究集合的子集及集合的交集、并集、补集间的关系时，如能借助直观图形，用运动的观点去看待变化着的集合，将有助于理解集合间的各种关系，找到解题的突破口.

**2.** 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2-y^2-y=4\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-xy-2y^2=0\}$，$C=\{(x,y)\mid x-2y=0\}$，$D=\{(x,y)\mid x+y=0\}$. (1) 判断 $B,C,D$ 间的关系；(2) 求 $A\cap B$.

**解** (1) $\because x^2-xy-2y^2=(x-2y)(x+y)$，$\therefore B=\{(x,y)\mid (x-2y)(x+y)=0\}=\{(x,y)\mid x-2y=0$ 或 $x+y=0\}=C\cup D$.

(2) $A\cap B=A\cap(C\cup D)=(A\cap C)\cup(A\cap D)=\{(x,y)\mid x^2-y^2-y=4$ 且 $x-2y=0\}\cup\{(x,y)\mid x^2-y^2-y=4$ 且 $x+y=0\}=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),(-2,-1)\right\}\cup\{(4,-4)\}=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),(-2,-1),(4,-4)\right\}$.

**3.** 已知数集 $A=\{a^2,a+1,-3\}$ 与数集 $B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $A\cup B$.

**解** $A\cap B=\{-3\}$，$\therefore -3\in B$. $\because a^2+1>0$，$\therefore$ 集合 $B$ 中等于 $-3$ 的元素只有 $a-3$ 或 $2a-1$ 两种情形.

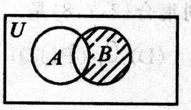
(1) 当 $a-3=-3$，即 $a=0$ 时，$A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$. 这时 $A\cap B=\{-3,1\}$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾，故舍去 $a=0$；(2) 当 $2a-1=-3$，即 $a=-1$ 时，$A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，符合要求. 因此 $A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$.

**说明** $A\cap B=\{-3\}$ 包含两层意义：一是 $-3$ 是 $A$ 与 $B$ 的公共元素，二是 $A$ 与 $B$ 的公共元素只有一个，是 $-3$.

## 三、思考题

图中 $U$ 是全集，$A,B$ 是 $U$ 的两个子集.

(1) 用集合的交集和补集表示下列各图中的阴影部分：

①



②



③